实用高中物理解题思维方法小丛书

极值问题新思索

李春霖
王怀中
编著

SHANXI EDUCATION PRESS

实用高中物理解题思维方法小丛书

极值问题新思索

李春霖　王怀中　编著

山西教育出版社

〔晋〕新登字3号

实用高中物理解题思维方法小丛书
极值问题新思索
李春霖　王怀中
*
山西教育出版社出版（太原并州北路十一号）
山西省新华书店发行　山西人民印刷厂印刷
*
开本：787×1092 1/32　印张：8.125　字数：64千字
1992年7月第1版　1992年7月山西第1次印刷
印数：1—3 000册
*
ISBN 7—80578—662—3
G·656　　定价：1.60元

序 言

长期以来，学生难以解脱“茫茫题海”和“泛泛资料”的包围，特别是近年来，繁多的教学内容和过量的课外作业，使学生的负担日趋加重，不少学生陷于机械性、模仿性地练习之中，从而抑制了学生的积极思维活动，严重地影响了智能的健康发展，为了减轻学生负担，利于复习巩固，进而开拓思路，提高学习效率，掌握解题的方法技巧。笔者根据国家教委颁发的中学物理教学新大纲的具体要求和当前中学物理教学改革的新动态，从提高中学生思维能力和应变能力出发，编写了这套《实用高中物理解题思维方法小丛书》，这本《极值问题新思索》分册，系统地介绍了极值问题的解题思路与方法，并用小专题的形式讲解了生活中涉及到的一些极值问题，以活跃思维，进而达到学以致用的目的。

本书在撰写过程中承蒙得不少有丰富教学经验的特级、高级教师、教育工作者的支持和具体指导；得到了教育专家、教授的帮助和鼓励，在此特表谢意。

由于作者水平有限，错误和不妥之处一定不少，恳请广大读者批评指正。

作　者

1990.10.1于太原

目 录

一、极值问题的解题思路

求物理量的极值是中学物理中常见的重要问题之一，它的种类繁多，在解法上既要受到各物理量存在条件和性质的约束，又要受到数学规律和取值范围的限制。所以要正确地解答极值问题，不但要掌握扎实的物理概念、定律和定理，而且还要懂得数学中函数的性质、定义域和值域的取法、不等式的性质等方面的重要基础知识，其解题过程具有下面的特点：

(1) 注意题目中各物理量的取值条件和具体的取值。

(2) 根据物理知识列出相应的方程。

(3) 要重视数学性质定理，巧用各种极值判别法求解。

1.基本的极值问题

基本的极值问题又叫运算简易的极值问题，它的特点是只受物理性质、条件、过程规律的约束，在求解中只要简单的数学方法便能直接得出结果的极值问题。

例1 一小球沿半径为R的光滑圆环轨道运动，要使小球达到圆环轨道最高点不会落下来，它在圆环轨道最高点时，至少应具有多大的速率？

分析与思考：

小球达圆环轨道最高点时，刚好不会落下来的物理约束条件是轨道对小球的弹力为零（即小球对轨道无压力）。

解： 作小球在环最高点时的受力示意简图，如图1-1。此时对于小球有

图 1-1

$$N+mg=m\frac{v^2}{R}$$

根据题意和物理约束条件可知

当$N=0$时，小球刚好不会离开环形轨道的最高点，可求出小球具有的速率临界值。

$v_o=\sqrt{gR}$

∴小球应具有的速率

$v\geqslant\sqrt{gR}$

例2 已知水的折射率为$\frac{4}{3}$，当点光源S在水面下深为1米时，求出该光源最多能照亮的水面为多大？

分析与思考：

水下光源发出的光线照到水面时，产生全反射的部分便不会照亮水面，所以该题目的物理约束条件是入射角i大于、等于临界角A，即$i\geqslant A$。

解： 作水下光源S发出的光线射向水面后产生全反射的光路图，如图1-2，设i为入射角，A为临界角。

图 1-2

根据题目要求和物理约束条件，当$i\geqslant A$，会产生全反射现象。

$$\because\quad \sin A=\frac{1}{n}=\frac{3}{4}$$

又 $\angle BSO=\angle A$

$\therefore \quad \sin A = \dfrac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}$

有 $\quad \dfrac{R}{\sqrt{R^2+1}} = \dfrac{3}{4}$ 变形得

$$4R = 3\sqrt{R^2+1}$$

化简得 $\quad R^2 = \dfrac{9}{7}$

所以水下光源 S 最多能照亮的形状是圆，其面积是

$$\pi R^2 = \frac{9}{7}\times\pi \approx 4.05(米)^2。$$

例3 用单色光照射氢原子，要使基态氢原子电离，照射光的波长最多应是多少埃？

分析与思考：

氢原子的基态能级为－13.6电子伏特，要使其电离，照射光子的能量$h\upsilon$不得小于13.6电子伏特。

解：氢原子基态能级时的能量

$$E_1 = -13.6电子伏特 = -21.76\times10^{-19}焦耳$$

根据光子说和玻尔理论可知，入射光子的能量$h\upsilon \geqslant 21.76\times10^{-19}$焦耳。

又 $\quad \upsilon = \dfrac{c}{\lambda}$，代入上式得

$$h\cdot\frac{c}{\lambda} \geqslant 21.76\times10^{-19}$$

变形得

$$\lambda \leqslant \frac{hc}{21.76\times10^{-19}}$$ 其中h为普朗克恒量、c为光速

即 $$\lambda \leqslant \frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{21.76\times10^{-19}} \approx 9.14\times10^{-8}\text{(米)}$$

所以照射光的波长$\lambda \leqslant 914$埃。

例4 两小球A、B分别吊在细绳上，静止时挨在一起，使A球偏离一个角度θ后放开，如图1-3，它回到原来位置时撞上B球，设两摆线长均为$l=1$米，$m_A=2$千克，$m_B=1$千克，$\theta=60°$，$g=10$米/秒，问两球相撞后总动能的可能取值范围。

分析与思考：

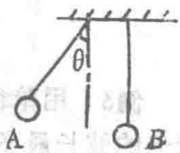

图 1-3

解答在碰撞过程中的动能损失的极值，需要从下面三个方面考虑，即：对于完全弹性碰撞，动能没有损失；对于完全非弹性碰撞，动能损失最大，而其余各种可能的碰撞，动能损失在以上两者之间。

解： 球A在下摆过程中机械能守恒，设该球在达最低点的速度为v_A，且两球作完全弹性碰撞，碰撞前两球的总动能为

$$E'_K=\frac{1}{2}m_Av'_A=m_Ag(1-\cos\theta)l$$

$$=2\times10\times(1-\cos60°)\times1=10\text{焦耳} \qquad ①$$

如果两球作完全非弹性碰撞，则机械能损失最大，故撞后两球的总动能最小，设两球撞后粘合到一起共同运动的速度为v。

列方程

$$m_A v_A = (m_A + m_B) v$$

$$v = \frac{m_A}{m_A + m_B} v_A \cdots\cdots ②$$

又 $v_A = \sqrt{10}$ 米/秒，把m_A、m_B、v_A代入上式有

$$v = \frac{2}{3}\sqrt{10} \text{ 米/秒.}$$

这时两球的最小动能

$$E''_K = \frac{1}{2}(m_A + m_B)v^2 = \frac{1}{2}(2+1)\times\left(\frac{2}{3}\sqrt{10}\right)^2$$

$$= 6\frac{2}{3} \text{（焦耳）}$$

由此得，两球相碰后总动能的取值范围是：$6\frac{2}{3}$焦耳$\leqslant E_k \leqslant 10$焦耳

例5 如图 1-4，CDF为光滑曲面，DF部分为水平面，在距DF面上高H的C处，放一质量为m_A的小球 A，让 A 球从静止开始沿曲面滑下，与DF面上静止的质量为m_B的小球 B 发生对心完全弹性碰撞，碰撞后 A 球以一定的速度返回曲面上，距 DF 面的高度为h处，然后再沿曲面滑下，欲使两球能引起第二次碰撞，求出$\frac{m_A}{m_B}$的比值范围。

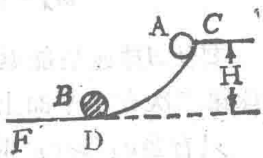

图 1-4

分析与思考：

该题的物理图象是A球沿光滑的CD轨道下滑 过 程 中，只有重力做功，当球A达D点后具有一定的速度v_A，然 后 与球B发生对心完全弹性碰撞，撞后A球的速度为v_A'，B 球的速度为v_B'，当A球沿曲面返回到高度为h时又重新下滑到 D 点，由机械能守恒定律可知，此时的速度v''_A方向与v'_A等值反向。要使A球与B球能发生第二次碰撞必满足$v_A''>v_B'$。

解： A球由C滑至D时，机械能守恒，列方 程

$$m_A gH = \frac{1}{2} m_A v_A{}^2 \quad ①$$

又因A、B两球做完全弹性碰撞，必有

$$m_A v_A = m_A v_A' + m_A v'_B \quad ②$$

$$\frac{1}{2} m_A v_A{}^2 = \frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2 \quad ③$$

由②、③联立得

$$v_A' = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_A \quad ④$$

$$v_B' = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_A \quad ⑤$$

要使A球碰后能返回曲面，v_A'为负值，可推出$m_A<m_B$，A球第二次在水平面上与B球撞前的速度 $v_A'' = -v_A'$

只有当$v_A''>v_B'$时，才有可能第二次与B球碰撞。

即 $$-\frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} \cdot v_A > \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_A$$

变形得 $m_B - m_A > 2m_A$

$$\therefore \quad \frac{m_A}{m_B} < \frac{1}{3}.$$

由此得出，当 $m_A < \frac{1}{3} m_B$时，第二次碰撞才有可能进行。

2.用二次函数的性质求极值

在研究物理问题的过程中，往往会碰到两个物理量间的关系可用二次函数的形式$y = ax^2 + bx + c$来表示，它的图象是一条抛物线。

（1） 若$a > 0$时，抛物线开口向上，当$x = -\frac{b}{2a}$函数y有极小值

$$y_{min} = \frac{4ac - b^2}{4a} \qquad ①$$

（2） 若$a < 0$时，抛物线开口向下，当$x = -\frac{b}{2a}$函数y有极大值。

$$y_{max} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

（3） 若函数值$y = 0$时，自变量x有无实数解，可用判别式$\Delta = b^2 - 4ac$确定。

当$\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0$时　x有实数解

当$\Delta = b^2 - 4ac < 0$时　x无实数解

利用二次函数的上述性质，求出物理量的极值是中学物理中很重要的问题，现举例如下。

例1 A、B两车在一条高速公路上同向匀速前进，A车的速度是50米/秒，B车的速度是20米/秒。当A车距B车500米时，突然B车加大油门，于是该车又具有10米/秒^{2}的加速度，问再经过多少时间两车相距最近？最小距离是多少？

解：按题意作两车的运动情况示意图，选定正方向，如图1-5。研究对象A始终作匀速直线运动，B车作初速度不为零的匀加速直线运动，设再经过时间t后两车相距最近。

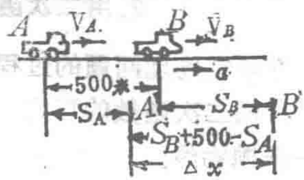

图 1-5

对于A车：$s_A = v_A \cdot t$

对于B车：$s_B = v_B t + \frac{1}{2}at^2$

两车距离：$\triangle x = 500 + s_B - s_A$

$$= 500 + v_B t + \frac{1}{2}at^2 - v_A t$$

$$= 500 + 5t^2 - 30t$$

根据二次函数的性质可知

$$时间 t = -\frac{b}{2a} = -\frac{-30}{2\times 5} = 3（秒）$$

$$最小距离 \triangle x_{min} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$= \frac{4\times 5\times 500 - (-30)^2}{4\times 5} = 455（米）$$

例2　A、B两地相距为L，B在A的正东，现有甲乙两人，同时从A、B出发，甲向B以速度v_1，乙向以C速度v_2，分别作匀速直线运动，已知$\angle ABC=\theta\leqslant 90°$，试求：

（1）　经过多长时间后，甲、乙两人间的距离R最短，并求出最短距离的数学表达式。

（2）　若$\theta=90°$，$L=20$千米，$v_1=3$千米/小时，$v_2=4$千米/小时，求出时间t和距离R的数值。

解：（1）按题意作出甲乙两人运动情况示意图，选定正方向，如图1-6，设经过时间t后，研究对象甲由A点运动到D点，同时乙由B点运动到E点时，点D、E间的距离$DE=R$为最短。

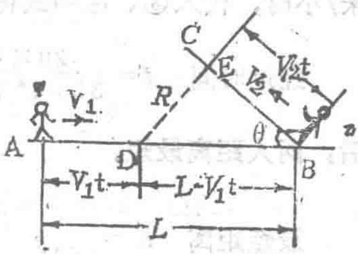

图 1-6

由余弦定理得

$$R^2=(v_2t)^2+(L-v_1t)^2-2(v_2t)\cdot(L-v_1t)\cdot\cos\theta$$

整理后得

$$R^2=(v_1{}^2+v_2{}^2+2v_1v_2\cos\theta)t^2$$
$$-2L(v_1+v_2\cos\theta)t+L^2 \quad ①$$

显然，等式右边是一个以时间t为自变量的一元二次函数，为计算方便，令

$$a=v_1{}^2+v_2{}^2+2v_1v_2\cos\theta$$
$$b=-2L(v_1+v_2\cos\theta)$$

上式中不论θ的取值如何，总有$a>0$（想想看，为什么？）

①式可简化为下式

$$R^2=at^2+bt+L^2$$

即　　$$R=\sqrt{at^2+bt+L^2} \quad ②$$

$\because$ $a>0$，当$t=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{L(v_1+v_2\cos\theta)}{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\theta}$ ③

时，R有极小值，即

$$R_{min}=\frac{v_2L\cdot\sin\theta}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\theta}} \quad ④$$

(2) 把$\theta=90°$，$L=20$千米，$v_1=3$千米/小时，$v_2=4$千米/小时，代入⑧、④两式得：

经过时间 $t=\dfrac{20\times(3+4\times\cos90°)}{3^2+4^2+2\times3\times4\times\cos90°}=2.4$(小时)

后，两人距离最短。

最短距离 $R=\dfrac{4\times20\times\sin90°}{\sqrt{3^2+4^2+2\times3\times4\cos90°}}=16$千米

例3 某电动机的供给电压为U，电枢线圈的电阻为r，试求：

(1) 电动机的最大输出功率P_{max}。

(2) 具有最大输出功率时，通过电动机的电流I。

(3) 电动机在输出功率最大时，它的效率η又是多大？

(4) 当$U=220$伏，$r=1$欧时，求出P_{max}、I的值。

解： 设P为电动机的输出功率，根据能量守恒定律，列方程。

$$P=IU-I^2r \quad ①$$

可见输出功率P为电流I的一元二次函数。其中$a=-r$ $b=u$ $c=0$

根据公式可以得出

当电流$I=-\frac{b}{2a}=-\frac{U}{2(-r)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{U}{r}$时，电动机的输出功率$P$有极大值，即

$$P_{max}=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\times(-r)\times 0-U^2}{4\times(-r)}=\frac{U^2}{4r}$$

电动机的效率：

$$\eta=\frac{P_{max}}{P_{总}}=\frac{\frac{U^2}{4r}}{IU}=\frac{\frac{U^2}{4r}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{U}{r}U}=50\%$$

由此可知，当电动机的输出功率为最大值时，它的效率仅有50%。

当$U=220$伏、$r=1$欧时，最大输出功率

$$P_{max}=\frac{U^2}{4r}=\frac{220^2}{4\times 1}=12100\ (瓦特)$$

此时电流 $I=\frac{1}{2}\cdot\frac{U}{r}=\frac{1}{2}\cdot\frac{220}{1}=110$（安培）

从上面的计算可以看出，当电动机的输出功率最大时，通过电动机的电流为起动电流$\frac{U}{r}$的一半。

例4 一司机在速率为v_1的火车中，看到在同一直线轨道上且在他前面相距为s_0处，有一列货车正以速率v_2沿同方向前进，$v_2<v_1$，于是司机便紧急刹车，此后火车以恒定的加速度a作匀减速运动，求出加速度a应满足怎样的条件，两