

科學圖書大庫

數學與計算機

譯者 陳 世 卿
賈 玉 輝

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

數學與計算機

譯者 陳 世 卿
賈 玉 輝

徐氏基金會出版

我們的工作目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力，在整個社會長期發展上，乃人類對未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同把人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之成就，已超越既往之累積，昔之認為絕難若幻想者，今多已成爲事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人有無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，允爲社會、國家的基本任務。培養人才，起自中學階段，學生對普通科學，如物理、數學、生物、化學，漸作接觸，及至大專院校，便開始專科教育，均仰賴師資與圖書的啓發指導，不斷進行訓練。從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學。旨趣崇高，至足欽佩！

科學圖書是學人們研究、實驗、教學的精華，明確提供科學知識與技術經驗，本具互相啓發作用，富有國際合作性質，歷經長久的交互影響與演變，遂產生可喜的收穫。我國民中學一年級，便以英語作主科之一，然欲其直接閱讀外文圖書，而能深切瞭解，並非數年所可苛求者。因此，本部編譯出版科學圖書，引進世界科技新知，加速國家建設，實深具積極意義。

本基金會由徐銘信氏捐資創辦，旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利。民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，返國服務者十不得一。另贈國內大學儀器設備，輔助教學頗收成效；然審度衡量，仍嫌未能普及，乃再邀承國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。主任委員徐銘信氏爲監修人，編譯委員林碧鏗氏爲編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱。「科學圖書大庫」首期擬定二千冊，凡四億言，叢書百種，門分類別，細大不捐；分爲叢書，合則大庫。從事翻譯之學者五百位，於英、德、法、日文中精選最新基本或實

II

用科技名著，譯成中文，編譯校訂，不憚三復。嚴求深入淺出，務期文圖並茂，供給各級學校在校學生及社會大眾閱讀，有教無類，效果宏大。賢明學人同鑑及此，毅然自公私兩忙中，撥冗贊助，譯校圖書，心誠言善，悉付履行，感人至深。其旅居國外者，亦有感於爲國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬菲薄，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，報國熱忱，思源固本，僑居特切，至足欽慰！

今科學圖書大庫已出版七百餘冊，都一億八千餘萬言；排印中者，二百餘冊，四千餘萬字。依循編譯、校訂、印刷、發行一貫作業方式進行。就全部複雜過程，精密分析，設計進階，各有工時標準。排版印製之衛星工廠十餘家，直接督導，逐月考評。以專業負責，切求進步。校對人員既重素質，審慎從事，復經譯者最後反覆精校，力求正確無訛。封面設計，納入規範，裝訂注意技術改善。藉技術與分工合作，建立高效率系統，縮短印製期限。節節緊扣，擴大譯校複核機會，不斷改進，日新又新。在翻譯中，亦三百餘冊，七千餘萬字。譯校方式分爲：(1)個別者：譯者具有豐富專門知識，外文能力強，國文造詣深厚，所譯圖書，以較具專門性而可從容出書者屬之。(2)集體分工者：再分爲譯、校二階次，或譯、編、校三階次，譯者各具該科豐富專門之知識，編者除有外文及專門知識外，尚需編輯學驗與我國文字高度修養，校訂者當爲該學門權威學者，因人、時、地諸因素而定。所譯圖書，較大部頭、叢書、或較有時間性者，人事譯務，適切配合，各得其宜。除重質量外，並爭取速度，凡美、德科學名著初版發行半年內，本會譯印之中文本，賡即出書，欲實現此目標，端賴譯校者之大力贊助也。

謹特掬誠呼籲：

自由中國大專院校教授，研究機構專家、學者，與從事科學建設之工程師；

旅居海外從事教育與研究學人、留學生；

大專院校及研究機構退休教授、專家、學者。

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或聯袂而來譯校叢書，或就多年研究成果，撰著成書，公之於世。本基金會樂於運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。祈學人們，共襄盛舉是禱！

原 序

科學家們共同的抱怨是科學已經變得太複雜了，那麼對科學的門外漢而言，要想瞭解其原理或追隨其進步的希望被幻滅就不足為奇了。

然而就整個時期言，現在正是需要門外漢來瞭解且支持科學的時代，科學家們孤軍奮鬥的日子似乎已經過去，現在均需要由代表國民的政府提供支持，而最後獲益者却還是國民。

對門外漢而言，欲在一特別的科學領域中，對錯綜複雜的知識能了然於心，若無深度的訓練是不可能的。但看起來可能且更重要的是應該對基本觀念有所瞭解，並對科學努力的精神有所認識。

作者寫這本書的動機，就是對希望增加了解科學新知者能有些許貢獻。我們嘗試使讀者認識的領域廣泛說來是應用數學，並特別注意到在過去幾年中蔚為奇觀的自動數位計算機。

我們要說的計算機，是一種冷靜的、無智慧的但是能把數學應用在科學上、技術上、商業上的一種有用的工具，而不是如同科學小說、通俗報紙以及最不可原諒的是有些照理說應懂得較多的科學家所說的具有智慧且不可思議的超人。我們覺得計算機應該看作是一種重要的但非孤立的發展，它們是為協助把數學應用在一直增加中的人類各問題而發展的機器族中之成員，正就是數學上的應用，使計算機格外重要。

在第一章中，我們把以後要用到的一些基本數學觀念，作了一個簡單的描述，學數學的讀者對這一定感到並不陌生而可跳過。

在結束本序之前，我們願意引用偉佛 (Warren Weaver) 說的：能增加¹⁰倍或 100 倍能力時才能實際上算是一種新能力。若我們接受這金言，我們就必須承認高速計算機是具有這種新能力，因為它確實較三十年前的計算機的自動化（無論從任何角度度量自動化）大過十倍，而速度則較其前輩遠大過 100 倍。

目

錄

第一章	數學，計算機與問題.....	1
第二章	應用數學與解法.....	17
第三章	問題種類與來源.....	29
第四章	計算機沿革.....	41
第五章	數值分析.....	59
第六章	數位計算機分件.....	85
第七章	數位計算機的邏輯設計.....	111
第八章	類比計算機和模擬器.....	127
第九章	應用隨機數的計算.....	147
第十章	計算機誤差.....	161
第十一章	計算機作業.....	167

第一章 數學，計算機問題

1-1. 應用數學與計算機介紹

假如你想與那位數學家疏遠時，只要遞給他紙和筆，然後說：「你是數學家，這場比賽的計分工作就請你代勞了。」如果你的朋友是一位「純粹」數學家，他可能一氣之下永遠不再理你，若是一位「應用」數學家，他可能很不樂意地要你爲他準備一具加數器。不論是前者或是後者，由於禮貌與涵養，他雖然不會當眾令你難堪；多少總會對時下一般人對於數學及其在近代文明中所擔任角色的誤解，有所不滿與感歎！事實上，任何一位玩伴都能記得很好，數學家們並不具有較常人善於計算的天性。

也許就因爲數學家們這種不善於遞加數字的緣故，在近代高速度自動化計算機未出現以前，許多數學家對當時一些已經設計完成用以替代複雜計算的器械感到濃厚的興趣，經由他們對高速度計算機發展的關注與貢獻，到了今天，它不僅是一件省事的設備，而且已經成爲應用數學結構的一部份，更深深地影響到這門學科的方法和方向。我們之間的絕大多數，雖未與其直接發生接觸，但透過政府與各個機構，早已變成一組巨型計算機的擁有者，人們用它來處理國防、經濟、氣候等等，使得吾人生活有很大的改進。這些計算機按照一定的規則迅速從事各種困難的數字操作，這些計算的技巧，在十五或二十年前還被認爲是不可能實現的幻想呢！

一架大型的「數位計算機」(digital computer) 並不是常人所稱的「電腦」，若稱其爲電腦，還不如說它是一個低能巨人的腦子更爲妥當；亦非這行內一些膚淺之士所極力強調的，計算機乃是與人類神經系統相似的結構。不過，它的確是非常有效的機器，即使除去人們給它的裝飾，計算機仍是一種極端有用的工具。

本書的主題，一方面是介紹各種計算機器如何達成其奇蹟似的運算任務，另一方面，在數學思想逐漸影響到日常生活與對外界科學探討的今天，計算機究竟擔任了什麼角色？本書對此亦將有所論述。計算機與需用計算機解

決的各類問題，以及計算機賴以解決這些問題的數學方法，三者之間息息相關。對應用數學沒有很深的瞭解，便無法完全明白計算機的原理，對應用數學與純粹數學之間的關係認識不清楚，亦無法體會應用數學所提供的方法。因此，作者要求讀者先瞭解數學在實際事物上的應用。

1-2. 應用數學描述事務

羅素 (Bertrand Russell) 曾說過：所謂純粹數學者，就是一種令人無法明白它所談論的，亦無法知道它所談的是對或是錯的學科，我們可以加註一句：如果某人能瞭解其以數學方式所談論的事物，或者對他自己的見解具有信心，那麼他所談的一定是應用數學而非純粹數學。更進一步說：只要是用數字來描述這些事物的現象，那就得視為「計算」的數學了。

高中的幾何學已經觸及這三方面的論題，然而學生們很少能看清楚這個事實。幾何學的確是部份屬於純粹數學，部份屬於應用數學，而一部份則屬於計算科學。歐幾里德假設 (Euclid's postulates) 以及由此假設，依邏輯步驟推論出來的各種定理，乃屬於純粹數學。依假設與定理的邏輯觀念，並在紙上畫出相應的圖形，則屬於應用數學。而對於這些圖形的數據處理和解答，則又屬於計算方面。

純粹數學告訴我們許多關於所謂「線」，「圓」，與「三角形」的適當觀念，但既稱之為「純」，它就根本不談及我們在紙上用鉛筆鉤畫出來而稱之為「圓」和「三角形」的鉛筆線條。應用數學則假設這些鉛筆線條的幾何意義是「線」。它並假設光的射線是一條幾何上的直線，一部汽車的質量是一個數字，時間是數學上的一個變數等等。整個外界的實際事物，均可仿此一一予以假設。我們知道這些作法只是一種假想的方式，但由於經驗的顯示，這樣的假設，除了經濟省事外，並能帶給我們知識上的高度滿足。

有時候，這些假設看起來非常的自然和實在，以致於我們之間，很少人能知道它是出於假設，尤其是那些由平日常見事物，發展出來的應用數學原本性質，我們特別易於忽視。例如我們計算桌面或地板的面積時，就用上了簡單的矩形幾何原理。因為概率論中假設的條件甚為明顯，因此我們比較不易忽略它的性質，可是許多其他方面的應用數學假設性質，我們早就忘得一乾二淨。

一位精巧的藝術家，會謹慎的選擇而將某些具有代表性的景物繪入他的圖畫中。一位應用數學家，以數學描繪實際事物時，他也只將主要的成分抽

揀出來，給予象徵性的表達。這種集中主要成分的方法，使得應用數學的用途擴大；但因此，也可能使一些門外漢覺得它像是一門奇異的學科。事實上，若不採用這種方法，我們如何能描述出一種主題，使其同時可以用在處理橋中的應力，電力網路中的電流與心理學家的性向研究方面？電子管放大器的穩定度，肥皂沫的形狀和多項式的根，均可視為同一主題，一位喝醉的水手在柵欄滿佈的地區蹣跚而行，其彎曲的足跡與一個佈有電荷的表面上電位的分佈情況屬於同一現象。若不採用這種方法，我們又如何能描繪得出這些相同的主題呢？

幾年前，一家詞鋒犀利的新聞雜誌，由於對應用數學的方法缺乏瞭解，因此激烈的批評政府化費公帑在研究旋轉中陀螺的數學理論方面。事實上，如無此旋轉陀螺與其同性質的「旋轉儀」(gyroscope)的研究，便無今日賴以導航的旋轉儀，亦無穩定儀，使得海軍艦隊可以在搖盪的船上發砲射擊目標。

我們必須記住，應用數學是以模擬的方式，描繪實際的情況，只要描繪得充份，即能正確地使用數學理論，且導出正確的結果。至於如何去相信應用數學的模擬理論，這就是一门奧妙的藝術。過度的相信，會導致許多嚴重的錯誤，例如飛機無法飛行的「證明」即為一例。在此特例中，其錯誤發生在模擬實際狀況時，會忽略了空氣的滯力。同時，一種理論可能在許多方面已是週密和完全，但用於另外方面則不見得完美。

使用應用數學時，如果模擬實際的情況不夠充份，其對結果的危害程度就更不用說了。尤以「數值分析」(numerical analysis)方面，特別容易造成此類錯誤。用一長串數字所寫出的數學描述，特別是在冗長的計算後所得到的敘述，常常催眠似的麻醉了我們的警覺性。我們進行運算的基本假設乃是以數學上的「數」代表物理量。可是，我們却常忽略了一項事實——「數」可能準確無誤，而物理的量度却無法達到這個地步，因此極易由這些數字描述中得到錯誤的結論。

總之，有一個重點必須記住，應用數學所處理的是一些實際事物的描述，這些描述必須經過適當的選擇，才能使其主要的特色，以數學表達出來。使用時則應小心地將足夠的細節描述進去，如此，其數學推論，方能用；但也須避免過度的繁瑣，以致於導致無用和多餘的工作。

1-3. 應用數學的輔助設備

當應用數學家擬好了假想或建立起一個數學的模型以後，他便利用純數學的理論去分析和找尋有關此模型的性質與資料，他可能得到一類或同時兩類的資料。一類是，同一種物體或情況所具有的相同特性，例如：所有繞着重物而轉動的質點，其軌道均如地球繞日之軌道，成為橢圓形狀；或者任何鐘擺依一個小弧度擺動時所形成的週期性運動等等。另一類是，某些度量與某類數學計算之間所存在的關係。例如，一張方桌兩邊量度各為 x 和 y 時，則對角線之量度必與 $x^2 + y^2$ 的平方根相等；或者一物體由高處自由下落，經過 t 秒後，下落的距離大約等於 $16t^2$ 呎。

這兩類的資料都有用，但此處主要是介紹計算機與某些度量的計算關係，因此目前我們不準備討論特性方面的推理。不過讀者若仔細觀察某些度量的運算過程，它也有一定的通性存在，本書稍後將以非計算的方法來推論這些通性。早期應用數學的性質，多偏於計算方面，很久以前，人們就知道，假如我給你 6 隻牛，而你爲了某些理由又還我兩隻，其交易結果與我們用石子或在沙上以記號代表牛隻而計算的答案相同。然而，以計算的方式却較將那些牛隻來回牽扯更爲容易和滿意，尤其計算所用的式子 $6 - 2 = 4$ 不僅可用於牛隻，並可適用於其他方面，如矛，妻子等等。

因爲交易和買賣在社會上一直居於重要的地位，而計算因能節省交易的勞力，自然的，也變得日益重要了。可是，即使能節省勞力的計算工作，到最後也會變得十分乏味和單調，致使金錢的計算常常發生錯誤與困擾。人類的天性本是好逸惡勞的，他們盡可能想法避免費力太多的事，因此在早期的發明中，已有專爲商業交易而設計的計算器械出現，這是很自然而一點也不奇怪的事。即使今天，大部份計算機所做的工作也是商業性的運算，雜貨店員所使用的加數器和收銀機，對數學不內行的人也都熟悉，每家雜貨店至少都有一架這樣的機器，其理由非常明顯，對處理眾人事物的店員而言，機器是非常優良的助手，因爲它不容易出錯，因此很少有顧客會和加數器發生爭執，此外，它也比人工便宜。另一件與雜貨店的加數器同樣普遍周知的是象徵工程師的職務標記——計算尺。漫畫中的工程師，手上若不拿著一把計算尺，這幅畫便不算完全。如此說法，並非誇張，蓋計算尺一度會爲工程師所必備的工具。

1-4. 計算機的發展與類別

任何人若注意到計算尺和加數器的構造，便可發現兩者相同的地方很少

。事實上，兩者代表了計算機演進時兩個明顯的不同途徑，在計算機演進的系譜中，有些類別發展的淵源很早，必須追溯歷史方能找到根源，而有些類別則歷史甚短，讀過「星期雜誌」(Sunday Supplement) 的人對其掌故或許記憶猶新。另外還有一些，到目前為止，仍是發明家眼中所孕育的一絲靈光而已，距離實現的目標為期尚遠(醞釀期間可能需要五年之久)。由體積來分，有些佔地龐大，充滿了數噸重的機器，有些則小到可以放在男人或女人的錢包裡，隱沒不現。有紙造的，木造的，玻璃或金屬造的。裡面含有齒輪，槓桿、凸輪或者由成群的電子管組合而成，仿如一具龐雜逾常的收音機，有些利用液體為基本的操作物體；有些則利用紙上的鉛筆標記。數據答案的準確度亦大不相同，有些連兆分之一的誤差也絕無僅有，而有些用途頗廣的加數器械的誤差，則可能大到它所計算數字的十分之一。

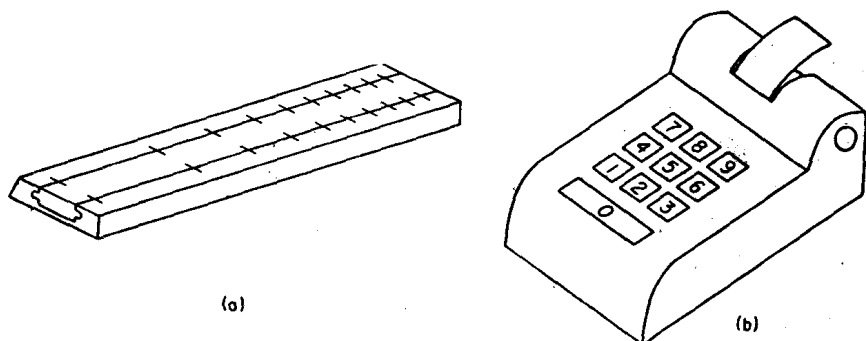


圖 1-1 代表計算機系譜中的二主流。(a)計算尺——類比計算機，
(b)加數器——數位計算機。

1-5. 計算機與用戶職業的關係

計算機雖非絕對不可少的工具，但在各種不同的廣泛領域內仍為一種有用的利器。數學最大的特色之一，就是它可以適合於各方面的應用，計算機即導源於應用數學，自然也秉賦了數學的特性，兼具有多方面的性能。船艙設計家為了計算船身結構內的應力，而以聯立方程式來描述其問題，更驚奇的是，心裡學家研究性向測驗時，亦用同樣的聯立方程式，且可能借助相同的計算機以解決他的問題。機械工具設計家與電力設備的設計師，均需要從事坐標轉換的器械，彈道專家和電話工程師，同樣需要解微分方程式的機器。

基於這些相互間的關係，在討論數學與計算設備時，若分別針對統計學家，電機學家或天文學家而擬以不同的科目加以討論，是非常不智的。因為各類計算機主要的差別是在於速度、準確性、或容量以及所表示的數學概念。如果某人擬使用計算機解決一項特別的微分方程式，每天運算十二次而誤差可及百分之一，則設計家只要供給一具能滿足這項條件的計算機即可，他勿須知道此機用戶的職業類別，更不必瞭解這些方程式所代表的物理意義。

計算機的工作原理，是將某種解題的方法轉換成實體裝置，換言之，計算機乃肇源於解題的方法，如果沒有這些問題，以及解決這些問題的方法與知識，就不會有計算機的出現。為了使讀者能明瞭計算機的原理以及它在科學和技術方面的地位，我們先介紹一些能夠使用計算機解決的問題，和利用計算機解題的方法，以及這些方法所淵源的應用數學有關論題。

1-6. 應用數學家的畫具

下面幾章將討論幾個較為簡單的數學論題，讀者並不需要具備什麼特別的技術或知識，即可閱讀這些章節，對數學不太熟悉的人，可能會願意化幾分鐘時間來溫習一下這些基本觀念。在此之後，對這些概念將不提出解釋，至於已受過數學訓練的人，可以將本章後面的幾節略過，因為對他而言，這些內容並無新奇之處。

我們如要明確地知道應用數學家如何描繪實際的事物，就必須先瞭解他使用的畫具，最容易瞭解的，可能是「整數」的集合，例如1，2，8，-15，0等等。這些「數」的觀念對應用數學家所處理的實際事物中的一小部份而言尚覺夠用。

通常，我們還需要超越整數的概念，如果我們說：溫度計的度數為75度，這敘述就不夠準確，氣象學家可能需要一個對溫度計更精確的描述，諸如75.23度，因此，他就必須將「有理數」包括進去以達到目的。所謂「有理數」乃是可用兩個整數(a/b)的比率表示的數，其中 b 不等於零。整數即可用此式表示，例如 $2 = 2/1$ ，是故亦為有理數。

即使將有理數包括在「數」的範圍內，我們仍無法適當地處理所有常見的度量。舉一個簡單的例子，如：每邊一吋長的正方形，其對角線的長度就無法以有理數表達出來。我們如欲以數學方式處理此對角線，就得將「無理數」包括進來。即使如此，數學的描述依然未能切合實際的需要。因為事實證明出，一個圓的圓周與其直徑的比率數值並不存在於整數、有理數或無理

數之間。代表這個比率的數稱為「超越數」(transcendental number)，其他類似於此數，多得數不勝數。

聚集所有的整數、有理數、無理數與超越數而成的集合，稱之為「實數」集合。我們利用實數可以把兩點間的距離、地球表面的面積以及其他種種度量，作充分的數學描述。

房地產的掙客，在廣告裡常用一個簡單的實數，指出某間房子係距離某個火車站半哩遠，實際上，顧客如要找到這間房子的確實位置，尚需更多的資料，例如，應向北或南，向東或西，走多遠？換言之，這屋子可以用一對實數來確定其方位。應用數學家曾經利用兩個、三個、四個或更多的實數集合來描述實際的事物。

一對實數，若依照特別的規則進行加法和乘法，則稱之為「複數」(complex number)。複數包括了兩個部份，其中一個為「實數」部份(real)，另外一個為「虛數」部份(imaginary)。讀者請勿將這兩個名詞與一般的「存在」或「不存在」觀念互相混淆。蓋虛數與實數同樣的實在，「虛」字只是當初首次應用複數時隨意命名的，正如同當初定義2和27的平方根時，因為無法以整數表達，只好稱之為「謬數」(surd or absurd)的道理相同。附帶提到一點，數學家常取用一些普通的字，而加以學術性的意義，諸如：「連續的」(continuons)，「微分」(differentiate)，「近乎週期」(almost periodic)，「格」(lattice)，「群」(group)等等，可舉之例數以千計。

複數所定義的加法和乘法規則與實數的加法和乘法規則可以並存不悖。事實上，實數本身即可以看成是虛數部份為零的特殊複數，假如 x 是複數，其實數和虛數部份各為4和2，此數可以寫成：

$$x = 4 + 2i$$

式中 $i^2 = -1$ 。加入這記號和規定，複數的加、減、乘、除運算即可按照通常的代數規則進行。每個複數均附帶着一個實數，此數稱為複數的「模數」(modulus)或絕對值。若 $x = a + bi$ ， x 的絕對值就寫成 $|x|$ ，其定義為：

$$|x| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

1-7. 應用數學家的畫具 —— 函數¹

大多數人都熟悉一種業餘性魔術師所玩的戲法，他要我們從1到10中選出一個數目，然後用心算將選出的數字加倍並加上37再平方，或者做其他類

以的運算，最後報出結果。數學家也做這類的運算，只是稍為堂皇正經一點而已，簡言之，他不說「選出的數目」，可能說 x 或 b ，而稱之為「引數」(argument)，並把最後報出來的數目稱為這個引數的「函數」(function)，但兩者的觀念仍然相同。如果我們將報出來的數目命名為 y ，則上述的遊戲只要用一個簡單式子就可以指出他的運算步驟：

$$y = (2x + 37)^2$$

或者更簡明一點，（特別是在不限制求 y 的規則時），上式便可以寫成：

$$y = f(x)$$

假設求 y 的規則中包含有加法、乘法和乘方時，數學家就稱此函數為「多項式」。例如下列寫法：

$$y = 1 + 3x - 4x^2$$

$$\text{或 } y = a + bx + cx^2 + dx^3$$

並非數學家所用的規則全像多項式一樣的簡單和容易瞭解。假如他寫成：

$$y = \sin x$$

我們就必須找到 y ，使成等於兩個長度的比率：一個為直角三角形中 x 角的對邊，另一個為這三角形的斜邊。數學家還可以利用其他不同的方法定義函數，如果他只需用到 x 的少數幾個值，便可用列表的方式寫出 y 對應於各個 x 的數值。例如 x 是小於 7 的正整數，則他所用到的 x 值不會太多，此時 x 的函數就可以表 1-1 加以定義：

表 1-1

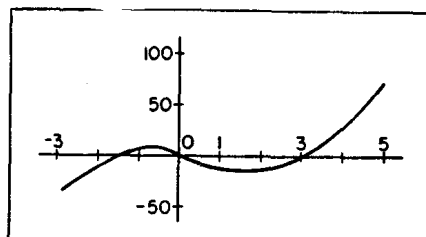
當 x 是	則 y 是
1	4
2	0
3	2
4	0
5	1
6	2

在此例中，我們如欲求 $x = 8$ 或 $x = 1.5$ 時 y 的數值，就不合適了。因為這函數根本就未曾定義在這些 x 的數值上。智力測驗中，有一個一般喜歡採用的試題是：「已知有一個數列 2, 4, 6, 8，試問下一個數字為何？」。此問題正如上述，毫無數學的函數意義。測驗者的原意為：「我正在思考一個由順序的位置求其函數值或求 y 值的規則；如果按此規則，第 1、2、3、4 位置的函數值各為 2、4、6、8，則依我想像的規則，在第五個位置

的函數值應為若干？」回答此問題的人，必須瞭解智力測驗學者與其思考的方法，可是却不必懂得太多的數學含義。

也許我們已扯得太遠，越出了數學家的函數範圍，在應用數學家認為有用的許多規則中，大部份都是對「所有的實數 x 」，或者對「所有的複數 x 」，或者對「在某些數之間的所有實數 x 」而言。但是，我們還是要記住一點，函數的觀念非常廣泛，我們不可能在同一時間內確實地論及所有的函數，爲了有效的敘述起見，通常我們只在函數中擇其特別的系類加以討論。

1-8. 「根」的意義



(a) 函數時常在紙上用曲線表示

$$y = x^3 - 2x^2 - 5x + 2$$

(b) 或用方程式

x	y	x	y	x	y
-5	-148	0	2	5	52
-4	-74	1	-4	6	116
-3	-28	2	-8	7	212
-2	-4	3	-4	8	346
-1	+4	4	+14	9	524

(c) 或用表列

圖 1-2 表示函數之不同方法

前節中，我們由魔術師的數字遊戲（從一到十中選出一個數字施以運算）開始了函數的討論。當初他的原意可能是想嚇唬我們，將告知他的數字 y 在其腦中做個反運算，找出我們原先所選取的數字 x ，以顯示他的奇術。數學家也經常用他的函數玩這種戲法，只不過他將這個反運算的過程美其名為「求根」或者「解方程式」而已。數學家們常會變個花樣，將函數改寫成下列的式子：

假如 $f(x) = 0$ ，請找出 x 值

這函數可能是 x 的多項式，任何 x 值如能使 $f(x)$ 等於零者，即稱為這個函數的「根」或「解」。因此，函數

$$1 + 3x - 4x^2 = 0$$

就有兩個解寫成：

$$x = -1/4 \quad \text{和} \quad x = +1$$

$-1/4$ 和 $+1$ 兩個數值又稱為此方程式的根。

經常，一個方程式會有複數根，例如下面這個方程式：

$$x^2 + 1 = 0$$

就只有複數根了。換言之，無任何實數可以取代 x 而令此多項式等於零，大多數人所學的解根方法，其方程式頂難也不過只包含了 x 的平方項。如果次數更多一點，這些方法不是無用就是不切實際，此時必須借助於分析的方法，這種方法將在本書的「數值分析」一章討論。如果方程式內含有三角或其他函數，則除了分析法之外，就得靠運氣才能找到另外的解根方法了。

前面的數字遊戲中，魔術師要我們從 1 到 10 中選出一個數目，當然他同樣可以要求我們不只選一個，而是選一對數目。他可以稱其為「第一個數」和「第二個數」，或者 u 和 v ，或者任何可以辨別的方法均可。此時，我們報給他的結果就是這一對數目 u 和 v 的函數，可以寫成 $F(u, v)$ 。數學家所處理的函數經常含有 2 個或 3 個甚至 50 個未知數或變數。

應用數學家利用正確的判斷，加上極佳的運氣，有時候再在數學的描述中，把一些實際問題中較難處理的因素省略，如此他常能將一些實際的事物以一組直線方程式描繪出來；換言之，他可以寫成許多方程式，其中未知數除了一次項之外，不再含有其他的乘冪，亦無未知數與未知數相乘的項。此類方程式稱為「線性」(linear)，形式如下：

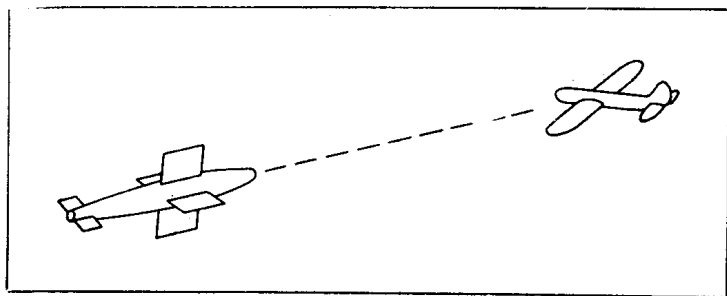
$$6x + 2y + 3z = 5$$

$$\text{或 } ax + by + cz = d$$

其中 x ， y 和 z 為未知數，而 a 、 b 和 c 為假設的已知數。

通常，除了一些顯著而煩冗的例子之外，如果方程式與未知數的數目相同，我們就可以解出這個系列的直線方程式，換言之，即找到一組數值，代入這些未知數，使得所有方程式都變成等式，例如 $3 = 3$ 或 $6a = 6a$ 。

讀者或許還記得在學校裡學過一組直線方程式的解法，本書後面有一章



(a)

飛彈的雷達測量 x ，即偏離航道的角度，產生一正比於 x 之信號，動作馬達使舵轉一角度 y

$$\frac{dy}{dt} + Ky = Kx \quad \dots\dots \text{信號影響舵之馬達}$$

$$\frac{dx}{dt} = -Wy \quad \dots\dots\dots \text{舵改變方向}$$

或

$$\frac{1}{W} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{W} \frac{dx}{dt} + Kx = 0$$

飛彈將穩定若且唯若

$$p^2 + Kp + KW = 0$$

之根，即

$$p_1 = \frac{-K + \sqrt{K^2 - 4KW}}{2}$$

$$p_2 = \frac{-K - \sqrt{K^2 - 4KW}}{2}$$

有負實數部分

(b)

圖 1—3 (a)一電導飛彈尋找一靶機，(b)一方程式的根告訴我們電導飛彈能否保持航道