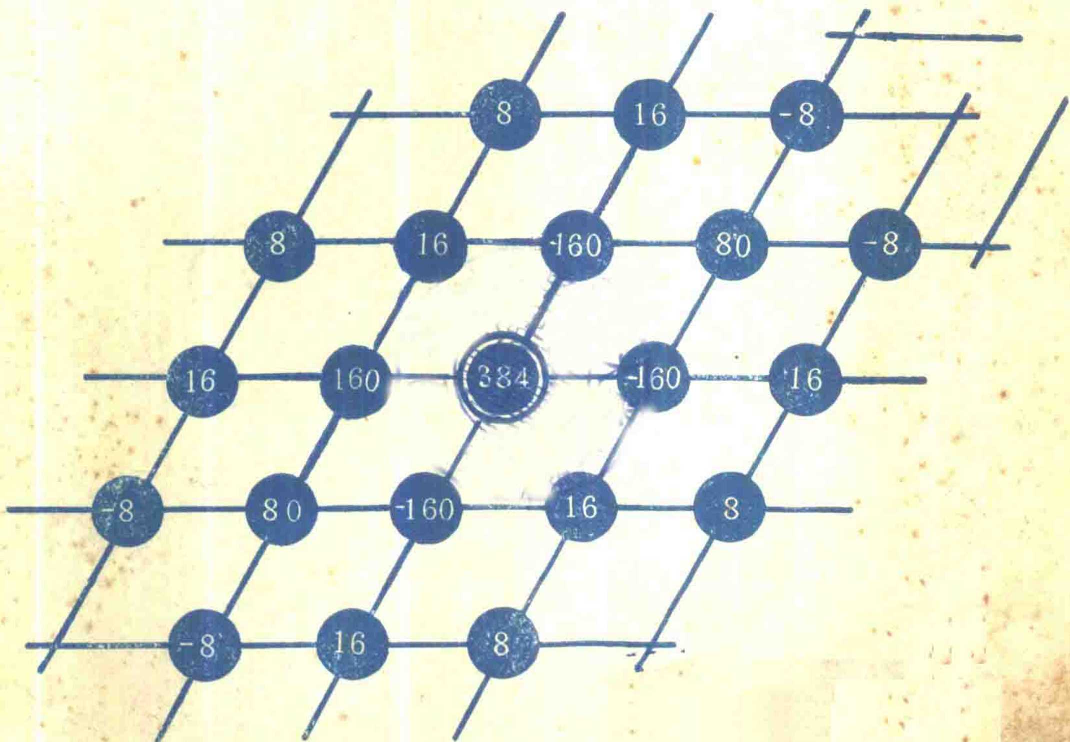
结构分析的有限差分法

王 磊 李家宝 编著



人民交通出版社

结构分析的有限差分法

王　磊　李家宝　编著

人　民　交　通　出　版　社

结构分析的有限差分法

王　磊　李家宝　编著

人民交通出版社出版
新华书店北京发行所发行
各 地 新 华 书 店 经 售
人民交通出版社印刷厂印
开本：$787\times1092\frac{1}{16}$ 印张：13.25　字数：323　千
1982年12月　第1版
1982年12月　第1版　第1次印刷
印数：0001—7,000册　定价：2.05元

内 容 提 要

本书主要介绍有限差分法在结构分析中的应用。书中从弹性力学基本概念出发，系统地介绍了有限差分的基本方法，然后分章论述了梁（常截面和变截面的弹性地基梁、连续梁）、板（各种边界条件下常截面和变截面弹性弯曲薄板、斜板）、壳（常曲率扁壳、圆锥壳）以及圆形水池和无侧移刚架有限差分计算法，并列举出大量算例，可用以解决广泛的工程结构问题。

本书可供从事桥梁、建筑、水利、机械、航空、造船等专业设计和科研技术人员及有关院校师生学习参考。

前　言

有限差分法在结构分析中是一种沿用较久的数值解法，它为广大科技人员所熟悉和喜用。在有限单元法出现后，有限差分法仍不失为一种比较有效的计算方法，对于形状比较规则的结构，用有限差分法来处理将是更为适合的。可以说有限差分法和有限单元法是两种平行的相辅相成的数值计算法。

本书主要介绍有限差分法在结构分析中的应用，这是我们学习国内外资料的体会，也是我们前段工作的小结。其中有的章节直接引用了有关资料上的若干图表、公式和算例，并补充了一些推导过程，而不少内容都是通过学习后按自己的体会写出的。另外，为了阅读的方便，在每一章里还简要地介绍了有关弹性理论的若干基础知识。第五、七、八、九、十、十一章以及§2-4、§6-9的内容，则是我们自己的一些体会。

按照弹性半空间理论，用差分法计算弹性地基梁，这是我国蔡四维提出的方法，为便于应用，计算了一套表格，比苏联日莫契金的方法简单，并且可以重复使用。我们在上法的基础上，解决了梁受集中力矩作用和阶梯形变截面地基梁截面突变的影响等问题。对于变厚度矩形板、正交各向异性矩形板等，我们推导了便于应用的差分格式，可供参考使用和进行比较研究。

书中§8-2的材料是由湖南大学李存权、揭立男提供的，在此表示衷心感谢。

由于作者水平有限，希望读者对书中的缺点和错误予以批评指正。

作　者

1981年4月于长沙

目　录

第一章　差分公式的推导

在分析各种类型结构的内力和变形时，问题往往归结为在给定的边界条件下求解某些基本的微分方程。但是，只在一些最简单的问题中，才能用严格的方法来处理这些方程。而在一般情况下，往往得不到问题的严格解答，必须借助于各种近似的方法。有限差分法（简称差分法）就是这些方法中的一种，它是一种数值方法，解题时将微分方程近似地用相应的差分方程来代替，从而将求解微分方程的问题化为求解一组代数方程的问题。

为了上述目的，首先须将微分方程中未知函数的各阶导数（或偏导数）用有限个点上的函数值（这些函数值是待求的）来表示，这就是本章要讨论的差分公式。

§1-1　标准一阶差分公式

图1-1，a 表示某函数 $y=f(x)$ 的曲线图形，在曲线上取五个点，编号为 $i-2$、$i-1$、i、$i+1$、$i+2$，这些点在 x 轴方向具有等间距 λ，各点的横坐标为：x_{i-2}、x_{i-1}、x_i、x_{i+1}、x_{i+2}；纵坐标为：y_{i-2}、y_{i-1}、y_i、y_{i+1}、y_{i+2}。

$(i-\frac{1}{2})$是 $i-1$、i 两点之间的中点，坐标为（$x_{i-\frac{1}{2}}$、$y_{i-\frac{1}{2}}$）。

$(i+\frac{1}{2})$是 i、$i+1$ 两点之间的中点，坐标为（$x_{i+\frac{1}{2}}$，$y_{i+\frac{1}{2}}$）。

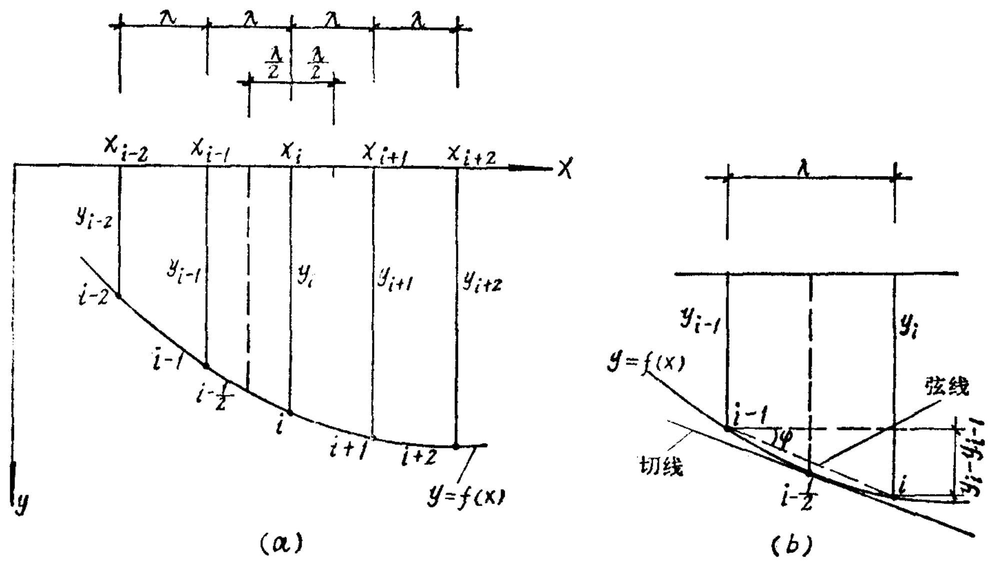


图　1-1

若用曲线上两点（$i-1$ 和 i）之间连线（如图1-1，b 虚线所示，称为弦线）的斜率代替曲线上$(i-\frac{1}{2})$点处切线的斜率，则由图1-1，b 可知，弦线的斜率为

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{y_i-y_{i-1}}{\lambda}$$

因此可得

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{i-\frac{1}{2}}\approx\frac{1}{\lambda}(y_i-y_{i-1}) \tag{a}$$

由于 $i-\frac{1}{2}$ 是 $i-1$ 和 i 的中点，所以这种近似处理方法称为中心差分法。式(a)叫做差分公式。相似地，曲线段 i、$i+1$ 的差分公式为

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{i+\frac{1}{2}}\approx\frac{1}{\lambda}(y_{i+1}-y_i) \tag{b}$$

按照与上述相同的处理方法，即认为曲线上 i 点的斜率变化率近似地等于在 $i+\frac{1}{2}$ 与 $i-\frac{1}{2}$ 的斜率差值被间矩 λ 除，于是可得二阶导数的差分公式

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i\approx\frac{1}{\lambda}\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_{i+\frac{1}{2}}-\left(\frac{dy}{dx}\right)_{i-\frac{1}{2}}\right]$$

将(a)、(b)二式代入上式，得

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i\approx\frac{1}{\lambda^2}(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}) \tag{c}$$

重复以上步骤，可以写出三阶，四阶导数的差分公式如下：

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{i+\frac{1}{2}}&\approx\frac{1}{\lambda}\left[\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)_{i+1}-\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i\right]\\&=\frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{\lambda^2}(y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i)-\frac{1}{\lambda^2}(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1})\right]\\&=\frac{1}{\lambda^3}(y_{i+2}-3y_{i+1}+3y_i-y_{i-1})\end{aligned} \tag{d}$$

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_i\approx\frac{1}{\lambda^4}(y_{i+2}-4y_{i+1}+6y_i-4y_{i-1}+y_{i-2}) \tag{e}$$

在以上公式中，只有 $i-\frac{1}{2}$ 和 $i+\frac{1}{2}$ 点处一阶和三阶导数的差分公式，如果要写出 i 点处一阶和三阶导数的差分公式（即用 $i-2$、$i-1$、$i+1$、$i+2$ 各点的纵坐标近似地表示这些导数的公式），则可按相似的方法写出：

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_i\approx\frac{1}{2\lambda}(y_{i+1}-y_{i-1}) \tag{f}$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_i\approx\frac{1}{2\lambda^3}(y_{i+2}-2y_{i+1}+2y_{i-1}-y_{i-2}) \tag{g}$$

在写公式(f)、(g)时注意，$i-1$ 与 $i+1$ 两点的间距为 2λ。

式(c)、(e)、(f)、(g)称为标准一阶差分公式，现将其汇集起来并写成差分系数的形式列于表1-1中。

有了这些公式，就可将常微分方程变换成为差分方程。

在矩形区域的弹性体上，我们用平行于坐标轴的两组平行线画成网格（图1-2）。设 $w=f(x, y)$ 为弹性体内的某一个连续函数，这个函数在平行于 x 轴的一根网线上，只随 x 坐标的改变而变化；在平行于 y 轴的一根网线上，只随 y 坐标的改变而变化。因此，i 点的各阶偏导数的差分公式，可用上述类似的方法写出如下：

表1-1

	差分系数					
$\left(\frac{dy}{dx}\right)_i$	$\frac{1}{2\lambda}$		-1		+1	
$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i$	$\frac{1}{\lambda^2}$		+1	-2	+1	
$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_i$	$\frac{1}{2\lambda^3}$	-1	+2		-2	+1
$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_i$	$\frac{1}{\lambda^4}$	+1	-4	+6	-4	+1
结点		$i-2$	$i-1$	i	$i+1$	$i+2$

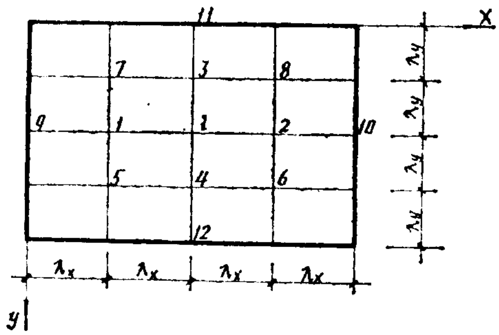


图 1-2

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i \approx \frac{1}{2\lambda_x}(f_2 - f_1) \tag{1-1}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_i \approx \frac{1}{2\lambda_y}(f_4 - f_3) \tag{1-2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i \approx \frac{1}{\lambda_x^2}(f_1 - 2f_i + f_2) \tag{1-3}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_i \approx \frac{1}{\lambda_y^2}(f_3 - 2f_i + f_4) \tag{1-4}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_i \approx \frac{1}{2\lambda_y}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_4 - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_3\right]$$

即

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_i \approx \frac{1}{4\lambda_x\lambda_y}(-f_5 + f_6 + f_7 - f_8) \tag{1-5}$$

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_i \approx \frac{1}{2\lambda_x^3}(-f_9 + 2f_1 - 2f_2 + f_{10}) \tag{1-6}$$

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right) \approx \frac{1}{2\lambda_y^3}(-f_{11} + 2f_3 - 2f_4 + f_{12}) \tag{1-7}$$

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_i \approx \frac{1}{2\lambda_y}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_4 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_3\right]$$

即

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_i \approx \frac{1}{2\lambda_x^2\lambda_y}(f_5 - 2f_4 + f_6 - f_7 + 2f_3 - f_8) \tag{1-8}$$

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right)_i \approx \frac{1}{2\lambda_x}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_1\right]$$

即

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right)_i \approx \frac{1}{2\lambda_x\lambda_y^2}(f_6 - 2f_2 + f_8 - f_5 + 2f_1 - f_7) \tag{1-9}$$

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_i \approx \frac{1}{\lambda_y^2}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_4 - 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_3\right]$$

即

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_i \approx \frac{1}{\lambda_x^2\lambda_y^2}(f_5 - 2f_4 + f_6 - 2f_1 + 4f_i - 2f_2 + f_7 - 2f_3 + f_8) \tag{1-10}$$

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_i \approx \frac{1}{\lambda_x^4}(f_9 - 4f_1 + 6f_i - 4f_2 + f_{10}) \tag{1-11}$$

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)_i \approx \frac{1}{\lambda_y^4}(f_{11} - 4f_3 + 6f_i - 4f_4 + f_{12}) \tag{1-12}$$

有了这些公式，就可以将偏微分方程变换成为差分方程。具体应用将在后面各章中讨论。

和梁的变形曲线 $y=f(x)$ 有斜率 $=\frac{dy}{dx}$，曲率 $\approx\frac{d^2y}{dx^2}$ 相类似，上述偏导数也有一定的物理意义，即对于曲面 $w=f(x、y)$，式(1-1)、(1-2)分别表示曲面上 i 点在 x 和 y 方向的斜率，式(1-3)为曲面上 i 点在 x 方向的曲率，式(1-4)是 y 方向的曲率。

式(1-5)的二阶混合偏导数，则是曲面上 i 点的扭曲率，它等于4点和3点在 x 方向的斜率之差被 $2\lambda_y$ 除。用同样的方法，二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 的差分公式(1-5)，也可以由2点和1点在 y 方向的斜率之差被 $2\lambda_x$ 除而得到，即

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_i &\approx \frac{1}{2\lambda_x}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1\right] \\ &= \frac{1}{2\lambda_x}\left[\frac{1}{2\lambda_y}(f_6 - f_8) - \frac{1}{2\lambda_y}(f_5 - f_7)\right] \\ &= \frac{1}{4\lambda_x\lambda_y}(-f_5 + f_6 + f_7 - f_8)\end{aligned}$$

与式(1-5)比较，可见两种方法推导的混合偏导数的差分公式完全相同。

§1-2 高阶差分公式

上一节我们利用弦线的斜率代替切线的斜率这一简单的概念，导出了标准一阶差分公式，这是本书往后讨论结构分析的差分解法时要用到的基本差分公式。为了在求得足够精确的函数值后，能据以获得较为精确的导数值，这里打算从函数插值的概念出发，导出比标准一阶差分公式精确的高阶差分公式。

1.插值和插值公式

所谓插值，就是在已给定的函数值之间，再插进一些所需要的中间值。

插值的方法是，设法构造某一个简单函数，将其作为真实函数的近似表达式，然后用这个近似函数来计算某一需要点上的近似函数值。

近似函数的类型可有不同选法，最常用的是代数多项式。用代数多项式作为工具研究插值问题，称为代数插值。下面分述几种代数插值公式：

（1）线性插值公式

设已知函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$、$x=x_1$ 的值分别为 y_0、y_1（图1-3），欲在这两点之间插值，我们可取 x 的线性函数

$$p_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}y_1 \tag{1-13}$$

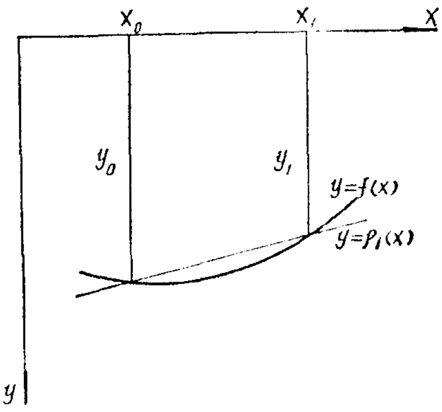


图 1-3

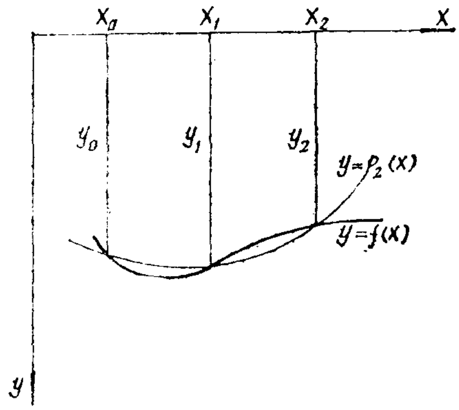


图 1-4

作为真实函数 $f(x)$ 的近似表达式。这样选择的 $p_1(x)$ 在点 x_0、x_1 的值应分别等于 y_0、y_1。利用式(1-13)即可求得点 x_0、x_1 之间任何一点处的函数近似值。式(1-13)称为线性插值公式，或称一次插值多项式。

（2）抛物线插值公式

设已知函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$、$x=x_1$、$x=x_2$ 的值分别为 y_0、y_1、y_2（图1-4），欲在这三点间插值，我们可取 x 的二次多项式

$$p_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2 \tag{1-14}$$

作为真实函数 $f(x)$ 的近似表达式。这样选择的 $p_2(x)$ 在点 x_0、x_1、x_2 的值应分别等于 y_0、y_1、y_2。式(1-14)称为抛物线插值公式，或称二次插值多项式。

（3）拉格朗日插值公式

仿照线性插值和二次插值，我们即可得一般的 n 次插值多项式如下：

$$\begin{aligned}p_n(x)=&\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)}y_1\\&+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\cdots(x_2-x_n)}y_2+\cdots\cdots\\&+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}y_n\end{aligned} \tag{1-15}$$

这就是拉格朗日插值公式。

2.差分

下面，我们给出几个差分的定义。

（1）向前差分

如图1-5所示，设已知函数 $y=f(x)$ 在一串点（各相邻点的横坐标之差相等，并设为λ）i、$i+1$、$i+2$……上的值为 y_i、y_{i+1}、y_{i+2}、……，则定义表达式

$$\Delta y_i=y_{i+1}-y_i \tag{1-16}$$

为 $y=f(x)$ 在点 i 处的一阶向前差分。λ 称为步长，i、$i+1$、$i+2$……称为差分结点。

同样，$y=f(x)$ 在点 $i+1$ 的一阶向前差分为

$$\Delta y_{i+1}=y_{i+2}-y_{i+1} \tag{1-17}$$

一阶差分的一阶差分，称为二阶差分，记为

$$\Delta^2 y_i=\Delta y_{i+1}-\Delta y_i$$

将式(1-16)、(1-17)代入，则

$$\Delta^2 y_i=y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i \tag{1-18}$$

一般说，n阶差分定义为$(n-1)$阶差分的一阶差分，即

$$\Delta^n y_i=\Delta^{n-1}y_{i+1}-\Delta^{n-1}y_i \tag{1-19}$$

各阶向前差分见表1-2。

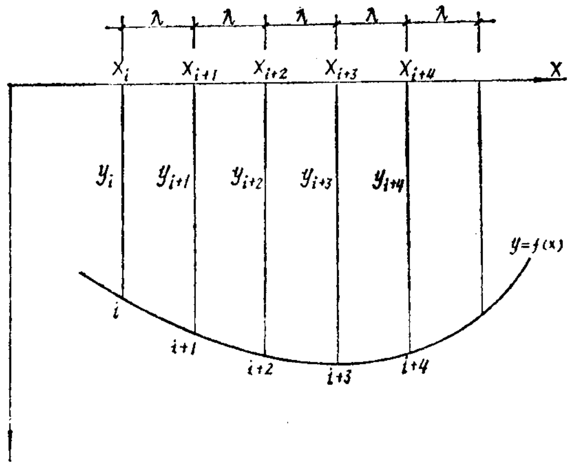


图 1-5

（2）中心差分

设已知函数$y=f(x)$在一串点$\cdots i-2$、$i-1$、i、$i+1$、$i+2$、$\cdots$上的值为$\cdots y_{i-2}$、y_{i-1}、y_i、y_{i+1}、y_{i+2}、……（参阅图1-1）。则定义表达式

$$\delta y_i=y_{i+\frac{1}{2}}-y_{i-\frac{1}{2}} \tag{1-20}$$

为$y=f(x)$在点i处以λ为步长的一阶中心差分。

同样，函数$y=f(x)$在$i+\frac{1}{2}$和$i-\frac{1}{2}$点处的一阶中心差分为

$$\delta y_{i+\frac{1}{2}}=y_{i+1}-y_i \tag{a}$$

$$\delta y_{i-\frac{1}{2}}=y_i-y_{i-1} \tag{b}$$

一阶中心差分的一阶中心差分，称为二阶中心差分，即

$$\delta^2 y_i=\delta y_{i+\frac{1}{2}}-\delta y_{i-\frac{1}{2}}$$

将(a)、(b)式代入，得

$$\delta^2 y_i=y_{i+1}-2y_i+y_{i-1} \tag{1-21}$$

同理有

$$\delta^2 y_{i+1}=y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i$$

$$\delta^2 y_{i-1}=y_i-2y_{i-1}+y_{i-2}$$

三阶中心差分为

$$\begin{aligned}\delta^3 y_{i+\frac{1}{2}}&=\delta^2 y_{i+1}-\delta^2 y_i\\&=y_{i+2}-3y_{i+1}+3y_i-y_{i-1}\end{aligned} \tag{c}$$

$$\begin{aligned}\delta^3 y_{i-\frac{1}{2}}&=\delta^2 y_i-\delta^2 y_{i-1}\\&=y_{i+1}-3y_i+3y_{i-1}-y_{i-2}\end{aligned} \tag{d}$$

$$\delta^3 y_i=y_{i+\frac{3}{2}}-3y_{i+\frac{1}{2}}+3y_{i-\frac{1}{2}}-y_{i-\frac{3}{2}} \tag{1-22}$$

四阶中心差分为

$$\delta^4 y_i=\delta^3 y_{i+\frac{1}{2}}-\delta^3 y_{i-\frac{1}{2}}$$

将(c)、(d)式代入得

$$\delta^4 y_i=y_{i+2}-4y_{i+1}+6y_i-4y_{i-1}+y_{i-2} \tag{1-23}$$

如果我们在相邻的三个差分结点间用二次抛物线插值，则可将式(1-20)、(1-22)的一阶和三阶中心差分用结点上的y值来表示。

表1-2 各阶向前差分

y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
y_i	$y_{i+1}-y_i$	$y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i$	$y_{i+3}-3y_{i+2}+3y_{i+1}-y_i$	$y_{i+4}-4y_{i+3}+6y_{i+2}-4y_{i+1}+y_i$	$y_{i+5}-5y_{i+4}+10y_{i+3}-10y_{i+2}+5y_{i+1}-y_i$	$y_{i+6}-6y_{i+5}+15y_{i+4}-20y_{i+3}+15y_{i+2}-6y_{i+1}+y_i$
y_{i+1}	$y_{i+2}-y_{i+1}$	$y_{i+3}-2y_{i+2}+y_{i+1}$	$y_{i+4}-3y_{i+3}+3y_{i+2}-y_{i+1}$	$y_{i+5}-4y_{i+4}+6y_{i+3}-4y_{i+2}+y_{i+1}$	$y_{i+6}-5y_{i+5}+10y_{i+4}-10y_{i+3}+5y_{i+2}-y_{i+1}$	
y_{i+2}	$y_{i+3}-y_{i+2}$	$y_{i+4}-2y_{i+3}+y_{i+2}$	$y_{i+5}-3y_{i+4}+3y_{i+3}-y_{i+2}$	$y_{i+6}-4y_{i+5}+6y_{i+4}-4y_{i+3}+y_{i+2}$		
y_{i+3}	$y_{i+4}-y_{i+3}$	$y_{i+5}-2y_{i+4}+y_{i+3}$	$y_{i+6}-3y_{i+5}+3y_{i+4}-y_{i+3}$			
y_{i+4}	$y_{i+5}-y_{i+4}$	$y_{i+6}-2y_{i+5}+y_{i+4}$				
y_{i+5}	$y_{i+6}-y_{i+5}$					

表1-3 各阶中心差分

δy_i	$\frac{1}{2}y_{i+1}-\frac{1}{2}y_{i-1}$
$\delta^2 y_i$	$y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}$
$\delta^3 y_i$	$\frac{1}{2}y_{i+2}-y_{i+1}+y_{i-1}-\frac{1}{2}y_{i-2}$
$\delta^4 y_i$	$y_{i+2}-4y_{i+1}+6y_i-4y_{i-1}+y_{i-2}$
$\delta^5 y_i$	$\frac{1}{2}y_{i+3}-2y_{i+2}+\frac{5}{2}y_{i+1}-\frac{5}{2}y_{i-1}+2y_{i-2}-\frac{1}{2}y_{i-3}$
$\delta^6 y_i$	$y_{i+3}-6y_{i+2}+15y_{i+1}-20y_i+15y_{i-1}-6y_{i-2}+y_{i-3}$
$\delta^7 y_i$	$\frac{1}{2}y_{i+4}-3y_{i+3}+7y_{i+2}-7y_{i+1}+7y_{i-1}-7y_{i-2}+3y_{i-3}-\frac{1}{2}y_{i-4}$
$\delta^8 y_i$	$y_{i+4}-8y_{i+3}+28y_{i+2}-56y_{i+1}+70y_i-56y_{i-1}+28y_{i-2}-8y_{i-3}+y_{i-4}$

由抛物线插值公式(1-14)，令其中的 $x_1-x_0=x_2-x_1=\lambda$，$x_2-x_0=2\lambda$，并将脚码 0 改为 $(i-1)$，1 改为 i，2 改为 $(i+1)$，则有

$$y\cong p_2(x)=\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{2\lambda^2}y_{i-1}+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{-\lambda^2}y_i+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{2\lambda^2}y_{i+1} \tag{e}$$

令 $x=x_{i+\frac{1}{2}}=x_i+\frac{\lambda}{2}$，由式(e)得

$$y_{i+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{8}y_{i-1}+\frac{3}{4}y_i+\frac{3}{8}y_{i+1} \tag{f}$$

令 $x=x_{i-\frac{1}{2}}=x_i-\frac{\lambda}{2}$，由式(e)得

$$y_{i-\frac{1}{2}}=\frac{3}{8}y_{i-1}+\frac{3}{4}y_i-\frac{1}{8}y_{i+1} \tag{g}$$

根据式(1-20)、(f)、(g)，有

$$\delta y_i=y_{i+\frac{1}{2}}-y_{i-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}y_{i+1}-\frac{1}{2}y_{i-1} \tag{1-24}$$

同理可写出：

$$y_{i+\frac{3}{2}}-y_{i+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}y_{i+2}-\frac{1}{2}y_i \tag{h}$$

$$y_{i-\frac{1}{2}}-y_{i-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}y_i-\frac{1}{2}y_{i-2} \tag{i}$$

故由式(1-22)得

$$\begin{aligned}\delta^3 y_i&=y_{i+\frac{3}{2}}-3y_{i+\frac{1}{2}}+3y_{i-\frac{1}{2}}-y_{i-\frac{3}{2}}\\&=(y_{i+\frac{3}{2}}-y_{i+\frac{1}{2}})+(y_{i-\frac{1}{2}}-y_{i-\frac{3}{2}})-2(y_{i+\frac{1}{2}}-y_{i-\frac{1}{2}})\end{aligned}$$

利用式(h)、(i)及(1-24)，即可写出

$$\delta^3 y_i=\frac{1}{2}y_{i+2}-y_{i+1}+y_{i-1}-\frac{1}{2}y_{i-2} \tag{1-25}$$

各阶中心差分见表1-3。

以上式(e)和式(1-24)所表明的几何意义是：如果在相邻的三个差分结点之间用二次抛物线相连，则连接曲线上点 $(i-1)$ 和点 $(i+1)$ 的弦线，与连接曲线上点 $(i-\frac{1}{2})$ 和点 $(i+\frac{1}{2})$ 的弦线相平行，而且这两条弦线也平行于过曲线上 i 点的切线，如图1-6所示。

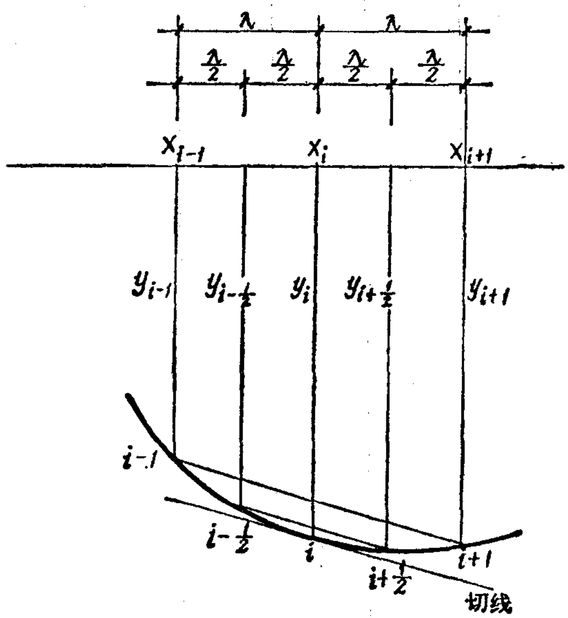


图 1-6

由此可见，§1-1 中谈到的用点 $(i-1)$ 与 i 之间弦线的斜率来代替中间点 $(i-\frac{1}{2})$ 处切线的斜率．这只有当曲线是二次抛物线时才是正确的，若为任意其他的曲线，则是一种近似的

表示法。

3. 牛顿向前插值公式和高斯向前插值公式

牛顿向前插值公式是一种带有向前差分的插值公式，具体形式如下

$$y=y_0+\Delta y_0\frac{x-x_0}{\lambda}+\frac{1}{2!}\Delta^2 y_0\frac{x-x_0}{\lambda}\cdot\frac{x-x_1}{\lambda}$$
$$+\frac{1}{3!}\Delta^3 y_0\frac{x-x_0}{\lambda}\cdot\frac{x-x_1}{\lambda}\cdot\frac{x-x_2}{\lambda}$$
$$+\frac{1}{4!}\Delta^4 y_0\frac{x-x_0}{\lambda}\cdot\frac{x-x_1}{\lambda}\cdot\frac{x-x_2}{\lambda}\cdot\frac{x-x_3}{\lambda}$$
$$+\cdots\cdots$$

如果令 $\dfrac{x-x_0}{\lambda}=u$

则

$$\frac{x-x_1}{\lambda}=\frac{[(x-x_0)-(x_1-x_0)]}{\lambda}=u-1$$

$$\frac{x-x_2}{\lambda}=\frac{[(x-x_0)-(x_2-x_0)]}{\lambda}=u-2$$

$$\frac{x-x_3}{\lambda}=u-3,\qquad \frac{x-x_4}{\lambda}=u-4,\ \cdots\cdots$$

于是牛顿向前插值公式可写成

$$y=y_0+u\Delta y_0+\frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$
$$+\frac{u(u-1)(u-2)(u-3)}{4!}\Delta^4 y_0+\frac{u(u-1)(u-2)(u-3)(u-4)}{5!}\Delta^5 y_0$$
$$+\frac{u(u-1)(u-2)(u-3)(u-4)(u-5)}{6!}\Delta^6 y_0+\cdots\cdots \tag{1-26}$$

在点 $x=x_0$ 处，y 的各阶导数可以利用简单的微分法将其表为点 x_0 处的有限差分。注意到

$$u=\frac{x-x_0}{\lambda},\qquad \frac{du}{dx}=\frac{1}{\lambda}$$

且当 $x=x_0$ 时有 $u=0$，则得

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\frac{1}{\lambda}\left(\Delta y_0-\frac{1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{1}{3}\Delta^3 y_0-\frac{1}{4}\Delta^4 y_0+\frac{1}{5}\Delta^5 y_0-\cdots\cdots\right) \tag{1-27}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0=\frac{1}{\lambda^2}\left(\Delta^2 y_0-\Delta^3 y_0+\frac{11}{12}\Delta^4 y_0-\frac{5}{6}\Delta^5 y_0+\cdots\cdots\right) \tag{1-28}$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0=\frac{1}{\lambda^3}\left(\Delta^3 y_0-\frac{3}{2}\Delta^4 y_0+\frac{7}{4}\Delta^5 y_0-\frac{15}{8}\Delta^6 y_0+\cdots\cdots\right) \tag{1-29}$$

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_0=\frac{1}{\lambda^4}\left(\Delta^4 y_0-2\Delta^5 y_0+\frac{17}{6}\Delta^6 y_0-\cdots\cdots\right) \tag{1-30}$$

这些就是用各阶向前差分来表示函数导数的公式。下面再推导用各阶中心差分来表示的导数。

高斯向前插值公式是一种带有中心差分的插值公式，具体形式如下

$$
\begin{aligned}
y = {} & y_0 + u\delta y_{\frac{1}{2}} + \frac{u(u-1)}{2!}\delta^2 y_0 + \frac{u(u^2-1^2)}{3!}\delta^3 y_{\frac{1}{2}} \\
& + \frac{u(u^2-1^2)(u-2)}{4!}\delta^4 y_0 + \frac{u(u^2-1^2)(u^2-2^2)}{5!}\delta^5 y_{\frac{1}{2}} \\
& + \frac{u(u^2-1^2)(u^2-2^2)(u-3)}{6!}\delta^6 y_0 + \frac{(u^2-1^2)(u^2-2^2)(u^2-3^2)}{7!}\delta^7 y_{\frac{1}{2}} \\
& + \cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{1-31}
$$

式中 u 的含义与式（1-26）中的 u 相同。

注意到

$$\delta y_{\frac{1}{2}} = \delta y_0 + \frac{1}{2}\delta^2 y_0$$

$$\delta^3 y_{\frac{1}{2}} = \delta^3 y_0 + \frac{1}{2}\delta^4 y_0$$

$$\delta^5 y_{\frac{1}{2}} = \delta^5 y_0 + \frac{1}{2}\delta^6 y_0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

将其代入高斯向前插值公式（1-31），整理后得

$$
\begin{aligned}
y = {} & y_0 + u\delta y_0 + \frac{u^2}{2!}\delta^2 y_0 + \frac{u(u^2-1^2)}{3!}\delta^3 y_0 + \frac{u^2(u^2-1^2)}{4!}\delta^4 y_0 \\
& + \frac{u(u^2-1^2)(u^2-2^2)}{5!}\delta^5 y_0 + \frac{u^2(u^2-1^2)(u^2-2^2)}{6!}\delta^6 y_0 \\
& + \frac{u(u^2-1^2)(u^2-2^2)(u^2-3^2)}{7!}\delta^7 y_0 + \frac{u^2(u^2-1^2)(u^2-2^2)(u^2-3^2)}{8!}\delta^8 y_0 \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{1-32}
$$

将式（1-32）对 x 求导，并令 $x=x_0$ 得

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \frac{1}{\lambda}\left(\delta y_0 - \frac{1}{6}\delta^3 y_0 + \frac{1}{30}\delta^5 y_0 - \cdots\cdots\right) \tag{1-33}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = \frac{1}{\lambda^2}\left(\delta^2 y_0 - \frac{1}{12}\delta^4 y_0 + \frac{1}{90}\delta^6 y_0 - \cdots\cdots\right) \tag{1-34}$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 = \frac{1}{\lambda^3}\left(\delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\delta^5 y_0 + \frac{7}{120}\delta^7 y_0 - \cdots\cdots\right) \tag{1-35}$$

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_0 = \frac{1}{\lambda^4}\left(\delta^4 y_0 - \frac{1}{6}\delta^6 y_0 + \frac{7}{240}\delta^8 y_0 - \cdots\cdots\right) \tag{1-36}$$

4.高阶差分公式

有了公式(1-27)～(1-30)和表1-2，以及式(1-33)～(1-36)和表1-3，便可具体写出高阶差分公式。