面向21世纪课程教材

面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

线性代数及其应用

邓泽清 主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

线性代数及其应用

邓泽清 主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪课程教材。

本教材以矩阵为主线，突出矩阵的运算、化简和数字特征，突出用矩阵方法研究线性方程组、二次型和经济模型，本教材力求将数学、应用和计算机三者相结合；本教材对于抽象的理论，总是从具体问题入手，再将其推广到一般情形，而略去了许多繁冗的理论推导，便于农林院校学生接受。

本书主要内容有矩阵、线性方程组、向量、矩阵的对角化与二次型、线性规划问题，以及Mathematica简介、LINDO软件简介等。

本书可供高等农林院校本科教学作为教材使用。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及其应用/邓泽清主编.—北京：高等教育出版社，2001（2003重印）
ISBN 7-04-009572-6

Ⅰ.线… Ⅱ.邓… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材
Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第78665号

线性代数及其应用
邓泽清 主编

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市东城区沙滩后街55号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网 址	http://www.hep.edu.cn
传 真	010-64014048		http://www.hep.com.cn

经 销	新华书店北京发行所		
排 版	高等教育出版社照排中心		
印 刷	国防工业出版社印刷厂		
开 本	787×960 1/16	版 次	2001年1月第1版
印 张	15.75	印 次	2003年2月第4次印刷
字 数	280 000	定 价	15.30元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

前　言

1995 年原国家教委适时推出了"高等农林教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划". 从 1995 年开始,我们经历了申报、立项、制定改革方案和试验等过程. 在教委高教司的指导下,华中农业大学于 1997 年和 1998 年按照新的改革方案进行了两轮试验. 在邓泽清、朱倩军主编《线性代数》教材的基础上,又将线性代数的杰出应用成果(投入产出模型和线性规划模型)和数学建模、数学实验纳入教学内容. 在试用两轮之后,又征求多方面意见,反复修改、仔细推敲而成为现在呈现在读者面前的这本"面向 21 世纪课程教材".

线性代数的教学有两大难点:一是概念、理论抽象,二是计算量大. 近年出版的国内、国外教材均在这两个方面作了许多工作. 我们也试图从这两个方面进行突破,本教材就是我们改革思路和改革工作的结晶. 其特点是:

1. 本教材在保留线性代数和线性规划基本内容的基础上,本着重概念、重方法、重应用、重数学意识和能力培养的精神,对课程内容、知识结构进行了较大的调整. 它以矩阵为主线,突出矩阵的运算、化简和数字特征, 突出用矩阵方法研究线性方程组、二次型和经济模型.

2. 本教材力求将数学、应用、计算机相结合,增加了数学建模、常用软件介绍和数学实验课.

3. 本教材好教好学,根据人的认知特点,在编写上遵循从具体到抽象, 从特殊到一般的原则. 对于抽象的理论,总是从具体问题入手,再把它推广到一般情形,而略去了很多繁琐、冗长的理论推导,这对于非数学专业学生是合适的.

4. 本教材精选例题、习题、复习题,形成一个小循环,有利于学生消化、巩固和运用所学知识.

本书由邓泽清主编. 张凤元、王伯曾、朱倩军任副主编. 邓泽清副教授负责编写第 1,2 章和复习题; 朱倩军副教授负责编写第 3,5 章;王伯曾副教授负责编写第 4 章;刘承平副教授负责编写第 6 章和计算机绘图;张凤元副教授负责编

写第7,8章;董锐副教授负责编写第9章.

本书由樊啟斌审稿.

在本书出版的时候,我们要感谢教育部,是教育部富有远见地推出了“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”,为我们提供了一个参与的机遇.还要感谢教育部高教司、《面向21世纪高等农林教育教学内容和课程体系改革计划》工作协调指导小组、04-6项目组,以及河北农业大学、湖南农业大学、华中农业大学教务处、理学系、数学教研室等所给予的支持和帮助.

武汉大学教授樊啟斌博士在百忙之中为本书审稿,并提出了许多前瞻性与指导性意见,为本书增色不少,我们表示衷心的感谢.

最后,对高等教育出版社为本书的顺利出版所付出的辛勤劳动和大力支持,我们表示衷心的感谢.

由于编者水平所限,对书中的不妥之处,恳请读者和使用本书的教师批评、指正.

编 者

2000年7月于华中农业大学

目　录

1
矩　阵

矩阵是线性代数的研究对象和重要工具，许多理论问题和实际问题可以用矩阵表示，并通过矩阵的研究得以解决.本章主要介绍矩阵的概念、运算及应用.

1.1　矩阵的概念

1.1.1　矩阵的概念

人们在从事经济活动、社会调查和科学实验时，会获得许多重要的数据资料.将这些数据排成一个矩形的数表：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

以便储存、运算和分析.这种矩形的数表就叫做**矩阵**.

定义 1　$m \times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的矩形数表

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

称为 m 行 n 列矩阵或 $m \times n$ 矩阵.组成矩阵的每个数称为矩阵 A 的元素，元素 a_{ij} 称为矩阵 A 的第 i 行第 j 列的元素，简称为 A 的 (i,j) 元.元素为实数的矩阵

称为实矩阵,元素为复数的矩阵称为复矩阵.

(1) 式常简记作 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$.

$n\times n$ 矩阵称为 **$\boldsymbol{n}$ 阶方阵**或 **$\boldsymbol{n}$ 阶矩阵**. n 阶方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的左上角到右下角元素的连线称为**主对角线**,左下角到右上角元素的连线称为**副对角线**. 1 阶方阵 (a_{11}) 是一个数,括号可略去.

$1\times n$ 矩阵称为**行矩阵**或**行向量**, $m\times 1$ 矩阵称为**列矩阵**或**列向量**. 行向量和列向量统称**向量**. 向量的元素称为分量,由 n 个分量组成的向量称为 n 维向量.

通常用黑体大写字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ 表示矩阵,用黑体小写字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots$ 或黑体小写希腊字母 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\cdots$ 表示向量. 矩阵与向量有密切联系,矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 可以看成由 m 个 n 维行向量

$$\boldsymbol{a}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}) \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

组成,也可以看成由 n 个 m 维列向量

$$\boldsymbol{a}_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

组成.

1.1.2 几种特殊的矩阵

下面介绍几种特殊矩阵.

零矩阵 元素全为 0 的矩阵称为零矩阵,记作 $\boldsymbol{O}$. 特别,零向量常记作 $\boldsymbol{0}$.

负矩阵 矩阵

$$\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的负矩阵,记作 $-\boldsymbol{A}$.

上(下)三角矩阵 主对角线下(上)方元素全为 0 的方阵称为上(下)三角矩阵.

对角矩阵 除主对角线上的元素外,其余元素全为 0 的方阵称为对角矩阵.

单位矩阵 主对角线上的元素全为 1,其余元素全为 0 的方阵称为单位矩阵,记作 $\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{E}$.本书中均用 $\boldsymbol{I}$ 表示单位矩阵.

显然,单位矩阵是对角矩阵,对角矩阵是上(下)三角矩阵.

请读者写出一个零矩阵,一个上三角矩阵,一个下三角矩阵,一个对角矩阵,一个单位矩阵,且它们都是 3 阶的.

1.1.3 矩阵的相等

定义 2 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$都是 $m\times n$ 矩阵,如果

$$a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等,记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

若两个矩阵行数相等,列数也相等,则称它们为**同型矩阵**.两个矩阵相等,当且仅当它们是同型矩阵且它们的对应元素都相等.

1.2 矩阵的运算

1.2.1 矩阵的线性运算

1.2.1.1 矩阵的加法

定义 1 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$都是 $m\times n$ 矩阵,规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵,且

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix},$$

由此定义及负矩阵的概念,我们定义矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的差

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}).$$

注意,只有同型矩阵才能相加(减).

1.2.1.2 数与矩阵的乘法(简称数乘)

定义 2 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是 $m\times n$ 矩阵,λ 是一个数,规定数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}\lambda$ 是一个 $m\times n$ 矩阵,且

$$\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\lambda=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

矩阵的加法和数乘统称为矩阵的**线性运算**，矩阵的线性运算满足如下规律：

定理 1　设 A,B,C 是同型矩阵，λ、μ 是数，则

(1) $A+B=B+A$；

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$；

(3) $A+O=A$；

(4) $A+(-A)=O$；

(5) $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$；

(6) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$；

(7) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$；

(8) $1A=A$.

矩阵的线性运算规律与数的运算规律类似，但必须注意，并非任意两个矩阵的加法都有意义.

例 1　设 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}4 & 0 & -3\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix}$，求 $A+B$ 和 $2A-3B$.

解　$A+B=\begin{pmatrix}1+4 & -1+0 & 2+(-3)\\ 0+(-1) & 3+(-2) & 4+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 7\end{pmatrix}$；

$2A-3B=\begin{pmatrix}2 & -2 & 4\\ 0 & 6 & 8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}12 & 0 & -9\\ -3 & -6 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & -2 & 13\\ 3 & 12 & -1\end{pmatrix}$.

1.2.2　矩阵的乘法

定义 3　**设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times s$ 矩阵，$B=(b_{ij})$ 是 $s\times n$ 矩阵，规定矩阵 A 与 B 的乘积 AB 是一个 $m\times n$ 矩阵，且**

$$AB=(c_{ij}),$$

其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum\limits_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$.

关于矩阵的乘法，读者务必注意：

(1) 只有当左矩阵 A 的列数等于右矩阵 B 的行数时，AB 才有意义；

(2) AB 有意义时，它的行数等于左矩阵 A 的行数，它的列数等于右矩阵 B 的列数，它的 (i,j) 元等于 A 的第 i 行的元素与 B 的第 j 列的对应元素的乘积之和，或者说它的 (i,j) 元等于 A 的第 i 个行向量与 B 的第 j 个列向量的乘积，即

$$c_{ij}=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{is})\begin{pmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{sj}\end{pmatrix}.$$

例 2　设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix}.$$

求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解 $\boldsymbol{A}$ 是 2×2 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 2×3 矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数,$\boldsymbol{AB}$ 有意义.

$$AB=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ar_1+bs_1 & ar_2+bs_2 & ar_3+bs_3 \\ cr_1+ds_1 & cr_2+ds_2 & cr_3+ds_3 \end{pmatrix},$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 的列数不等于 $\boldsymbol{A}$ 的行数,所以 $\boldsymbol{BA}$ 无意义.

例 3 设矩阵

$$A=(a_1\ a_2\cdots\ a_n), B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解 $$AB=(a_1\ a_2\cdots\ a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n).$$

$$BA=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}(a_1\ a_2\cdots\ a_n)=\begin{pmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & \cdots & b_1a_n \\ b_2a_1 & b_2a_2 & \cdots & b_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_na_1 & b_na_2 & \cdots & b_na_n \end{pmatrix}.$$

例 4 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解 $$AB=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 5 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{AC}$.

解 $$AB=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$AC=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

由例 2 到例 5 看出：

矩阵的乘法不满足**交换律**、**零因子律**和**消去律**，即一般情形下，

(1) $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$；

(2) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 不能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$；

(3) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$　且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，不能推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是可交换的.

矩阵的乘法与数的乘法运算的不同之处，应引起初学者的充分注意，但它们也有许多类似的运算规律.

定理 2　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是矩阵，λ 是数，且下列运算都是可行的，则

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

(2) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$；

(3) $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$；

(4) $(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})=\lambda(\boldsymbol{AB})$；

(5) $\boldsymbol{AI}=\boldsymbol{IA}=\boldsymbol{A}$.

1.2.3　方阵的幂

如前所述，并非任何两个矩阵都可以相加和相乘，但对于两个 n 阶方阵，它们的加法和乘法都有意义，而且运算的结果仍为 n 阶方阵.

定义 4　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，k 个 $\boldsymbol{A}$ 的连乘积 $\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂，记作 $\boldsymbol{A}^k$. 并称矩阵

$$P(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{I}+a_1\boldsymbol{A}+a_2\boldsymbol{A}^2+\cdots+a_k\boldsymbol{A}^k$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次多项式，其中 $a_i(i=0,1,\cdots,k)$ 是数，$\boldsymbol{I}$ 是 n 阶单位矩阵.

由定义可以推出：$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$，$(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$，其中 k,l 为正整数. 但必须注意：由于矩阵乘法不满足交换律，故一般情形下，$(\boldsymbol{AB})^k\neq\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$.

例 6　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

解　$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{AA}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$，

$$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -4\\ -4 & 4\end{pmatrix},$$

由归纳法，得

$$\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}2^{n-1} & -2^{n-1}\\ -2^{n-1} & 2^{n-1}\end{pmatrix}.$$

例 7 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $(\boldsymbol{AB})^n$.

解 $$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$$

用例 6 的方法求 $(\boldsymbol{AB})^n$ 是很困难的，但注意到 $\boldsymbol{BA}=3$ 并根据矩阵乘法的结合律，得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{AB})^n &= (\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})\cdots(\boldsymbol{AB})\\ &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BA})(\boldsymbol{BA})\cdots(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{B}\\ &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BA})^{n-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(3^{n-1})\boldsymbol{B}\\ &= 3^{n-1}(\boldsymbol{AB})=3^{n-1}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

1.2.4 矩阵的转置

定义 5 **设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵，规定 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$（或 $\boldsymbol{A}'$）是一个 $n\times m$ 矩阵，且**

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

由定义可以看出，$\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 的行换成同序号的列得到的，因此，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行（列）是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列（行），$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的 (i,j) 元是 $\boldsymbol{A}$ 的 (j,i) 元.

矩阵的转置满足下列运算规律：

定理 3 **假设下面的矩阵运算都有定义，则**

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

(3) $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，其中 λ 是一个数；

(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

例 8　设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\end{pmatrix}$，求 $(AB)^{T}$.

解法 1　$AB=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-1\\18&-1\end{pmatrix}$，

$$(AB)^{T}=\begin{pmatrix}8&18\\-1&-1\end{pmatrix}.$$

解法 2　$(AB)^{T}=B^{T}A^{T}=\begin{pmatrix}2&3\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&18\\-1&-1\end{pmatrix}$.

注意：一般情形下，$(AB)^{T}\neq A^{T}B^{T}$. 请读者就例 8 中的两个矩阵直接验证这一点.

若 $A^{T}=A$，则称矩阵 A 为**对称阵**；若 $A^{T}=-A$，则称矩阵 A 为**反对称阵**.

对称阵和反对称阵必为方阵，且对称阵 $A=(a_{ij})$ 关于主对角线对称的元素相等，即 $a_{ij}=a_{ji}$，反对称阵 $A=(a_{ij})$ 关于主对角线对称的元素互为相反数，即 $a_{ij}=-a_{ji}$.

容易证明：若 A 是对称阵，则 A^{T}，λA（λ 是数）也是对称阵；若 A，B 是同阶的对称阵，则 $A+B$ 也是对称阵，但 AB 不一定是对称阵.

例 9　设 A 是 $m\times n$ 矩阵，试证：AA^{T} 和 $A^{T}A$ 都是对称阵.

证　AA^{T} 和 $A^{T}A$ 都有定义，且它们分别为 m 阶方阵和 n 阶方阵.

因为　$$(AA^{T})^{T}=(A^{T})^{T}A^{T}=AA^{T},$$

故 AA^{T} 是对称阵.

同理可证 $A^{T}A$ 是对称阵.

思考题

1. 叙述矩阵 A 与 B 可以相加的条件和可以相乘的条件.
2. 矩阵的乘法与数的乘法规律有哪些不同之处？
3. 数的乘法公式对于矩阵成立吗？试给出乘法公式成立的条件.
4. 若 A，B 是同阶对称阵，$A+B$ 与 AB 都是对称阵吗？

1.3　矩阵的应用

定义了矩阵的运算（特别是矩阵的乘法）后，许多复杂的问题可以用简单的矩阵记号表示，并通过对矩阵的研究得以解决，我们通过几个例子来说明.

1.3.1　线性方程组

许多实际问题和数值计算归结为求解一个线性方程组（即一次方程组），线性方程组的一般形式是