



面向 21 世纪 课程 教材
Textbook Series for 21st Century

线 性 代 数 及 其 应 用

邓泽清 主编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面向 21 世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

线性代数 及其应用

邓泽清 主编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内 容 提 要

本书是教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果,是面向 21 世纪课程教材。

本教材以矩阵为主线,突出矩阵的运算、化简和数字特征,突出用矩阵方法研究线性方程组、二次型和经济模型,本教材力求将数学、应用和计算机三者相结合;本教材对于抽象的理论,总是从具体问题入手,再将其推广到一般情形,而略去了许多繁冗的理论推导,便于农林院校学生接受。

本书主要内容有矩阵、线性方程组、向量、矩阵的对角化与二次型、线性规划问题,以及 Mathematica 简介、LINDO 软件简介等。

本书可供高等农林院校本科教学作为教材使用。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及其应用/邓泽清主编. —北京:高等教育出版社,2001 (2003 重印)

ISBN 7-04-009572-6

I. 线… II. 邓… III. 线性代数-高等学校-教材
IV. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 78665 号

线性代数及其应用

邓泽清 主编

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号

邮政编码 100009

传 真 010-64014048

购书热线 010-64054588

免费咨询 800-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所

排 版 高等教育出版社照排中心

印 刷 国防工业出版社印刷厂

开 本 787×960 1/16

印 张 15.75

字 数 280 000

版 次 2001 年 1 月第 1 版

印 次 2003 年 2 月第 4 次印刷

定 价 15.30 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

前 言

1995年原国家教委适时推出了“高等农林教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”。从1995年开始,我们经历了申报、立项、制定改革方案和试验等过程。在教委高教司的指导下,华中农业大学于1997年和1998年按照新的改革方案进行了两轮试验。在邓泽清、朱倩军主编《线性代数》教材的基础上,又将线性代数的杰出应用成果(投入产出模型和线性规划模型)和数学建模、数学实验纳入教学内容。在试用两轮之后,又征求多方面意见,反复修改、仔细推敲而成为现在呈现在读者面前的这本“面向21世纪课程教材”。

线性代数的教学有两大难点:一是概念、理论抽象,二是计算量大。近年出版的国内、国外教材均在这两个方面作了许多工作。我们也试图从这两个方面进行突破,本教材就是我们改革思路和改革工作的结晶。其特点是:

1. 本教材在保留线性代数和线性规划基本内容的基础上,本着重概念、重方法、重应用、重数学意识和能力培养的精神,对课程内容、知识结构进行了较大的调整。它以矩阵为主线,突出矩阵的运算、化简和数字特征,突出用矩阵方法研究线性方程组、二次型和经济模型。

2. 本教材力求将数学、应用、计算机相结合,增加了数学建模、常用软件介绍和数学实验课。

3. 本教材好教好学,根据人的认知特点,在编写上遵循从具体到抽象,从特殊到一般的原则。对于抽象的理论,总是从具体问题入手,再把它推广到一般情形,而略去了很多繁琐、冗长的理论推导,这对于非数学专业学生是合适的。

4. 本教材精选例题、习题、复习题,形成一个小循环,有利于学生消化、巩固和运用所学知识。

本书由邓泽清主编。张凤元、王伯曾、朱倩军任副主编。邓泽清副教授负责编写第1,2章和复习题;朱倩军副教授负责编写第3,5章;王伯曾副教授负责编写第4章;刘承平副教授负责编写第6章和计算机绘图;张凤元副教授负责编

写第7,8章;董锐副教授负责编写第9章。

本书由樊啟斌审稿。

在本书出版的时候,我们要感谢教育部,是教育部富有远见地推出了“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”,为我们提供了一个参与的机会。还要感谢教育部高教司、《面向21世纪高等农林教育教学内容和课程体系改革计划》工作协调指导小组、04-6项目组,以及河北农业大学、湖南农业大学、华中农业大学教务处、理学系、数学教研室等所给予的支持和帮助。

武汉大学教授樊啟斌博士在百忙之中为本书审稿,并提出了许多前瞻性与指导性意见,为本书增色不少,我们表示衷心的感谢。

最后,对高等教育出版社为本书的顺利出版所付出的辛勤劳动和大力支持,我们表示衷心的感谢。

由于编者水平所限,对书中的不妥之处,恳请读者和使用本书的教师批评、指正。

编 者

2000年7月于华中农业大学

目 录

1 矩阵	1
1.1 矩阵的概念	1
1.1.1 矩阵的概念	1
1.1.2 几种特殊的矩阵	2
1.1.3 矩阵的相等	3
1.2 矩阵的运算	3
1.2.1 矩阵的线性运算	3
1.2.2 矩阵的乘法	4
1.2.3 方阵的幂	6
1.2.4 矩阵的转置	7
1.3 矩阵的应用	8
1.3.1 线性方程组	8
1.3.2 线性变换	10
1.3.3 关系和关系矩阵	11
1.3.4 动物种群的增长模型	11
1.4 方阵的行列式	13
1.4.1 行列式的定义	13
1.4.2 行列式的性质	15
1.4.3 行列式的计算	16
1.4.4 克拉默(Cramer)法则	20
1.5 可逆矩阵	22
1.5.1 可逆矩阵的概念与性质	22
1.5.2 求逆阵的方法	24
1.5.3 简单的矩阵方程	25

1.6	矩阵的应用(续)——投入产出模型	26
1.6.1	投入产出模型	27
1.6.2	直接消耗系数矩阵的幂的经济意义	28
1.7	分块矩阵	30
1.7.1	分块矩阵的概念	30
1.7.2	分块矩阵的运算	30
1.7.3	分块对角阵	32
1.8	矩阵的初等变换	34
1.8.1	矩阵的初等变换	34
1.8.2	初等方阵	35
1.8.3	用初等行变换求逆阵	37
	习题 1	38
2	矩阵的秩与线性方程组	42
2.1	矩阵的秩	42
2.1.1	秩的概念与性质	42
2.1.2	秩的计算	43
2.2	线性方程组的解	44
2.2.1	线性方程组概述	44
2.2.2	齐次线性方程组	46
2.2.3	非齐次线性方程组	51
2.3	迭代法	56
2.3.1	雅可比迭代法	56
2.3.2	高斯-赛德尔迭代法	58
	习题 2	59
3	向量	61
3.1	向量的几何表示	61
3.2	向量的线性相关性	62
3.2.1	向量的线性组合	62
3.2.2	向量的线性相关性	64
3.2.3	关于线性相关性的几个定理	66
3.3	向量组的最大无关组和秩	68
3.3.1	向量组的最大无关组和秩	68
3.3.2	向量组的秩和最大无关组的求法	70
	习题 3	71
4	矩阵的对角化与二次型	73

4.1 矩阵的特征值与特征向量	73
4.1.1 矩阵的特征值与特征向量的概念	73
4.1.2 矩阵的特征值与特征向量的性质	77
4.2 矩阵的对角化	78
4.2.1 相似矩阵	78
4.2.2 矩阵的对角化	80
4.3 实对称阵的对角化	83
4.3.1 正交矩阵	83
4.3.2 实对称阵的对角化	88
4.4 二次型及其标准形	92
4.4.1 二次型及其矩阵形式	92
4.4.2 二次型的标准形	94
4.4.3 用正交变换化二次型为标准形	96
4.5 正定二次型	99
习题 4	101
复习题 1	103
5 线性规划问题	108
5.1 线性规划问题的数学模型	108
5.1.1 线性规划问题举例	108
5.1.2 线性规划问题的数学模型	110
5.2 线性规划问题的几何解释	110
5.3 线性规划问题的标准形式	113
5.4 基及其典式	115
5.5 线性规划问题解的性质	118
5.5.1 凸集与极点	118
5.5.2 线性规划问题解的存在定理	119
习题 5	121
6 单纯形方法	124
6.1 单纯形表	124
6.2 单纯形方法	126
6.2.1 最优判别准则	126
6.2.2 换基迭代	127
6.2.3 单纯形法解题步骤	129
6.3 找第一个可行基的方法	136
6.4 对偶单纯形法	148

习题 6	152
7 线性规划问题的进一步讨论	154
7.1 灵敏度分析	154
7.1.1 目标函数系数 c_j 的灵敏度分析	154
7.1.2 约束方程右端项的灵敏度分析	157
7.1.3 增加一个新变量的分析	158
7.1.4 增加一个新约束条件的分析	160
7.2 对偶线性规划	162
7.2.1 对偶线性规划	162
7.2.2 对偶线性规划的性质	167
7.2.3 影子价格及其应用	168
7.3 整数规划	171
7.3.1 整数规划的概念	171
7.3.2 整数规划问题的解法	172
7.3.3 0-1 整数规划	177
习题 7	180
8 线性规划建模	184
8.1 建模的基本方法	184
8.2 线性规划建模举例	186
习题 8	191
复习题 2	193
9 数学实验	195
实验 1 矩阵的基本运算	195
实验 2 解线性方程组	199
实验 3 求矩阵的特征值与特征向量	202
实验 4 线性规划建模与求解	205
附录 1 Mathematica 简介	209
附录 2 LINDO 软件简介	219
附录 3 习题答案	225
参考文献	241

1 矩 阵

矩阵是线性代数的研究对象和重要工具,许多理论问题和实际问题可以用矩阵表示,并通过矩阵的研究得以解决.本章主要介绍矩阵的概念、运算及应用.

1.1 矩阵的概念

1.1.1 矩阵的概念

人们在从事经济活动、社会调查和科学实验时,会获得许多重要的数据资料.将这些数据排成一个矩形的数表:

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

以便储存、运算和分析.这种矩形的数表就叫做矩阵.

定义 1 $m \times n$ 个数 $a_{ij} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ 排成的矩形数表

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

称为 m 行 n 列矩阵或 $m \times n$ 矩阵.组成矩阵的每个数称为矩阵 A 的元素,元素 a_{ij} 称为矩阵 A 的第 i 行第 j 列的元素,简称为 A 的 (i, j) 元.元素为实数的矩阵

称为实矩阵,元素为复数的矩阵称为复矩阵.

(1) 式常简记作 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 或 $A = (a_{ij})$.

$n \times n$ 矩阵称为 n 阶方阵或 n 阶矩阵. n 阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的左上角到右下角元素的连线称为主对角线,左下角到右上角元素的连线称为副对角线. 1 阶方阵 (a_{11}) 是一个数,括号可略去.

$1 \times n$ 矩阵称为行矩阵或行向量, $m \times 1$ 矩阵称为列矩阵或列向量. 行向量和列向量统称向量. 向量的元素称为分量,由 n 个分量组成的向量称为 n 维向量.

通常用黑体大写字母 A, B, C, \dots 表示矩阵,用黑体小写字母 a, b, c, \dots 或黑体小写希腊字母 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 表示向量. 矩阵与向量有密切联系,矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 可以看成由 m 个 n 维行向量

$$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

组成,也可以看成由 n 个 m 维列向量

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

组成.

1.1.2 几种特殊的矩阵

下面介绍几种特殊矩阵.

零矩阵 元素全为 0 的矩阵称为零矩阵,记作 O . 特别,零向量常记作 0 .

负矩阵 矩阵

$$\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 的负矩阵,记作 $-A$.

上(下)三角矩阵 主对角线下(上)方元素全为 0 的方阵称为上(下)三角矩阵.

对角矩阵 除主对角线上的元素外,其余元素全为 0 的方阵称为对角矩阵.

单位矩阵 主对角线上的元素全为 1, 其余元素全为 0 的方阵称为单位矩阵, 记作 I 或 E . 本书中均用 I 表示单位矩阵.

显然, 单位矩阵是对角矩阵, 对角矩阵是上(下)三角矩阵.

请读者写出一个零矩阵, 一个上三角矩阵, 一个下三角矩阵, 一个对角矩阵, 一个单位矩阵, 且它们都是 3 阶的.

1.1.3 矩阵的相等

定义 2 设 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ 都是 $m \times n$ 矩阵, 如果

$$a_{ij} = b_{ij} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

则称矩阵 A 与 B 相等, 记作 $A = B$.

若两个矩阵行数相等, 列数也相等, 则称它们为同型矩阵. 两个矩阵相等, 当且仅当它们是同型矩阵且它们的对应元素都相等.

1.2 矩阵的运算

1.2.1 矩阵的线性运算

1.2.1.1 矩阵的加法

定义 1 设 $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$ 都是 $m \times n$ 矩阵, 规定矩阵 A 与 B 的和 $A + B$ 是一个 $m \times n$ 矩阵, 且

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix},$$

由此定义及负矩阵的概念, 我们定义矩阵 A 与 B 的差

$$A - B = A + (-B).$$

注意, 只有同型矩阵才能相加(减).

1.2.1.2 数与矩阵的乘法(简称数乘)

定义 2 设 $A = (a_{ij})$ 是 $m \times n$ 矩阵, λ 是一个数, 规定数 λ 与矩阵 A 的乘积 λA 或 $A\lambda$ 是一个 $m \times n$ 矩阵, 且

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

矩阵的加法和数乘统称为矩阵的线性运算,矩阵的线性运算满足如下规律:

定理 1 设 A, B, C 是同型矩阵, λ, μ 是数, 则

- (1) $A + B = B + A$;
- (2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- (3) $A + O = A$;
- (4) $A + (-A) = O$;
- (5) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$;
- (6) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
- (7) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
- (8) $1A = A$.

矩阵的线性运算规律与数的运算规律类似,但必须注意,并非任意两个矩阵的加法都有意义.

例 1 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $A + B$ 和 $2A - 3B$.

解 $A + B = \begin{pmatrix} 1+4 & -1+0 & 2+(-3) \\ 0+(-1) & 3+(-2) & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$;

$2A - 3B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 0 & -9 \\ -3 & -6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -2 & 13 \\ 3 & 12 & -1 \end{pmatrix}$.

1.2.2 矩阵的乘法

定义 3 设 $A = (a_{ij})$ 是 $m \times s$ 矩阵, $B = (b_{ij})$ 是 $s \times n$ 矩阵, 规定矩阵 A 与 B 的乘积 AB 是一个 $m \times n$ 矩阵, 且

$$AB = (c_{ij}),$$

其中 $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj}$ ($i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n$).

关于矩阵的乘法,读者务必注意:

(1) 只有当左矩阵 A 的列数等于右矩阵 B 的行数时, AB 才有意义;

(2) AB 有意义时, 它的行数等于左矩阵 A 的行数, 它的列数等于右矩阵 B 的列数, 它的 (i, j) 元等于 A 的第 i 行的元素与 B 的第 j 列的对应元素的乘积之和, 或者说它的 (i, j) 元等于 A 的第 i 个行向量与 B 的第 j 个列向量的乘积, 即

$$c_{ij} = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{is}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix}.$$

例 2 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix}.$$

求 AB 和 BA .

解 A 是 2×2 矩阵, B 是 2×3 矩阵, A 的列数等于 B 的行数, AB 有意义.

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar_1 + bs_1 & ar_2 + bs_2 & ar_3 + bs_3 \\ cr_1 + ds_1 & cr_2 + ds_2 & cr_3 + ds_3 \end{pmatrix},$$

由于 B 的列数不等于 A 的行数, 所以 BA 无意义.

例 3 设矩阵

$$A = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n), B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

求 AB 和 BA .

$$\text{解 } AB = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n).$$

$$BA = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) = \begin{pmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & \cdots & b_1 a_n \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & \cdots & b_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n a_1 & b_n a_2 & \cdots & b_n a_n \end{pmatrix}.$$

例 4 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

求 AB 和 BA .

$$\text{解 } AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 5 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

求 AB 和 AC .

$$\text{解 } AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

由例 2 到例 5 看出:

矩阵的乘法不满足交换律、零因子律和消去律,即一般情形下,

- (1) $AB \neq BA$;
- (2) $AB = O$ 不能推出 $A = O$ 或 $B = O$;
- (3) $AB = AC$ 且 $A \neq O$, 不能推出 $B = C$.

若 $AB = BA$, 则称 A 与 B 是可交换的.

矩阵的乘法与数的乘法运算的不同之处,应引起初学者的充分注意,但它们也有许多类似的运算规律.

定理 2 设 A, B, C 都是矩阵, λ 是数,且下列运算都是可行的,则

- (1) $(AB)C = A(BC)$;
- (2) $A(B + C) = AB + AC$;
- (3) $(B + C)A = BA + CA$;
- (4) $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$;
- (5) $AI = IA = A$.

1.2.3 方阵的幂

如前所述,并非任何两个矩阵都可以相加和相乘,但对于两个 n 阶方阵,它们的加法和乘法都有意义,而且运算的结果仍为 n 阶方阵.

定义 4 设 A 为 n 阶方阵, k 个 A 的连乘积 $AA \cdots A$ 称为 A 的 k 次幂,记作 A^k . 并称矩阵

$$P(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_k A^k$$

为 A 的 k 次多项式,其中 $a_i (i=0, 1, \cdots, k)$ 是数, I 是 n 阶单位矩阵.

由定义可以推出: $A^k A^l = A^{k+l}$, $(A^k)^l = A^{kl}$, 其中 k, l 为正整数. 但必须注意: 由于矩阵乘法不满足交换律,故一般情形下, $(AB)^k \neq A^k B^k$.

例 6 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^n .

$$\begin{aligned} \text{解 } A^2 &= AA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \\ A^3 &= A^2 A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

由归纳法,得

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

例7 设 $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = (1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3})$, 求 AB 和 $(AB)^n$.

$$\text{解 } AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

用例6的方法求 $(AB)^n$ 是很困难的,但注意到 $BA = 3$ 并根据矩阵乘法的结合律,得

$$\begin{aligned} (AB)^n &= (AB)(AB)\cdots(AB) \\ &= A(BA)(BA)\cdots(BA)B \\ &= A(BA)^{n-1}B = A(3^{n-1})B \\ &= 3^{n-1}(AB) = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.2.4 矩阵的转置

定义5 设 $A = (a_{ij})$ 是 $m \times n$ 矩阵,规定 A 的转置矩阵 A^T (或 A') 是一个 $n \times m$ 矩阵,且

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

由定义可以看出, A 的转置矩阵 A^T 是由 A 的行换成同序号的列得到的,因此, A^T 的第 i 行(列)是 A 的第 i 列(行), A^T 的 (i, j) 元是 A 的 (j, i) 元.

矩阵的转置满足下列运算规律:

定理3 假设下面的矩阵运算都有定义,则.

- (1) $(A^T)^T = A$;
- (2) $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- (3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$, 其中 λ 是一个数;
- (4) $(AB)^T = B^T A^T$.

例 8 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, 求 $(AB)^T$.

解法 1 $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 18 & -1 \end{pmatrix}$,

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 8 & 18 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

解法 2 $(AB)^T = B^T A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 18 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

注意:一般情形下, $(AB)^T \neq A^T B^T$. 请读者就例 8 中的两个矩阵直接验证这一点.

若 $A^T = A$, 则称矩阵 A 为对称阵; 若 $A^T = -A$, 则称矩阵 A 为反对称阵.

对称阵和反对称阵必为方阵, 且对称阵 $A = (a_{ij})$ 关于主对角线对称的元素相等, 即 $a_{ij} = a_{ji}$, 反对称阵 $A = (a_{ij})$ 关于主对角线对称的元素互为相反数, 即 $a_{ij} = -a_{ji}$.

容易证明: 若 A 是对称阵, 则 $A^T, \lambda A$ (λ 是数) 也是对称阵; 若 A, B 是同阶的对称阵, 则 $A + B$ 也是对称阵, 但 AB 不一定是对称阵.

例 9 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 试证: AA^T 和 $A^T A$ 都是对称阵.

证 AA^T 和 $A^T A$ 都有定义, 且它们分别为 m 阶方阵和 n 阶方阵.

因为 $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$,

故 AA^T 是对称阵.

同理可证 $A^T A$ 是对称阵.

思 考 题

1. 叙述矩阵 A 与 B 可以相加的条件和可以相乘的条件.
2. 矩阵的乘法与数的乘法规律有哪些不同之处?
3. 数的乘法公式对于矩阵成立吗? 试给出乘法公式成立的条件.
4. 若 A, B 是同阶对称阵, $A + B$ 与 AB 都是对称阵吗?

1.3 矩阵的应用

定义了矩阵的运算(特别是矩阵的乘法)后,许多复杂的问题可以用简单的矩阵记号表示,并通过对矩阵的研究得以解决,我们通过几个例子来说明.

1.3.1 线性方程组

许多实际问题和数值计算归结为求解一个线性方程组(即一次方程组),线性方程组的一般形式是