

高等学校教学用书

分析动力学

汪家詠編

高等教育出版社

高等学校教学用书



分析动力学

汪家誥編

高等教育出版社

本書講解分析力學的基本原則，並以很多例題來配合說明，使讀者在領會這些原則之後，能夠掌握分析力學的解題方法。主要內容有：運動學、力學基本理論、分析靜力學、質點分析動力學、質點系分析動力學、連續體分析動力學及附錄等編。

本書的讀者對象主要是理工學院學生、工程師及一般科學工作者。

分 析 動 力 學

汪家詠編

高等教育出版社出版北京宣武門內承恩寺7號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第054號)

京華印書局印刷 新華書店發行

統一書號15010·588 開本850×1168¹/₃₂ 印張14¹/₁₆

字數374,000 印數0001—3,000 定價(10) 1.60

1958年12月第1版 1958年12月北京第1次印刷

序 言

到目前为止，国内尚没有关于“分析动力学”的專書，所有理論力学書中所附的，內容既不丰富，討論也欠深入；另一方面，国外名著則各有其优缺点，因此作者不自譏陋，試集各書之長，匯編成此書。

本書有一特点，就是有充分多的例題来配合說明原則。我認为用例題說明原則是实践和理論結合的初步形式。通过例題，便容易領会原則的內容；能进一步掌握原則的应用。有些力学書为了叙述个别力学現象而零星地引入一些例題，但本書則不然，着重討論分析力学原則，書中例題只是为了說明原則才引入；除非是在重点，类似的例題不予多举，以免分散对原則的注意力。

为了本書同时适用于作为理工学院的参考書，內容以經典力学的范围为限。在这范围内又为學習相对力学、量子力学、場論等打基础。象振动、剛体力学等，力学專題資料太多，如要深入研究，应看这些力学問題的專書。本書的主要任务是說明分析力学的原則和交代分析力学的解題方法。

第一編运动学是为了分析动力学中的例題需要某些运动学公式而設的，其中最主要的内容是曲綫坐标的速度和加速度表式和剛体定点旋轉时剛体上的速度分布。本編采用苏联的編法：先講点的运动，再談剛体的运动（与威特克（Whittaker）的英文本的編法不同）。就运动学部分而言，本編已几乎包括了威特克所著“分析动力学”中运动学的全部内容，而且比它多了剛体平面平行运动的資料。对剛体定点旋轉的各种分析表法，写得相当完备，可供讀者研究剛体运动的参考。

第二編力学基本理論目的是簡要地总结一下理論力学的内容，这样本書可自成一系統；另一方面补充說明些重要的力学概念，例如，慣性系統、慣性力和伽利略变换对力学定律的协变性質，这两节是一般力学書中沒有充分說明的，这內容不但是用以啓發相对論的概念，同时可

以揭露經典力學的一些本質。

第三編分析靜力學作為引入分析動力學的一個階梯。從那兒很自然地引入廣義力的概念，這樣在第四編中推導拉格朗日方程式方法的目的性便很明確了。又在這編中介紹拉格朗日不定乘子法也是很適當的。

第四編質點分析動力學和第五編質點系分析動力學是本書主要的內容。從這兩編的標題上看去，似乎有許多是重複的，但內容則不然。這兩編承擔了不同的任務，前者着重說明物理意義及推導的目的性，後者追求推導的一般化及原則的普遍性，這樣難點分散，易於學習。作者所以採用這樣的編法，主要是利用一個質點的力學問題在瞬時常可用三維空間的圖形來表示。這樣學到質點系的多維空間才易於想象和領會，同時收到由淺入深的效果。

第六編連續體分析動力學的理论可應用於場論。不過限於本書的範圍，對場論本身只好不談。本編內容全部來自哥德斯坦(H. Goldstein)所著：“古典力學”。

第七編附錄是附以閱讀本書的一些必要的數學知識。可能某些地方還照顧得不够，但是為了篇幅不致過多，暫且也只好如此。

為了節省篇幅，本書習題收羅不多。密歇爾斯基(И. В. Мещерский)所著“理論力學習題集”^①自第340頁到368頁，有關分析靜力學和拉格朗日方程式的習題，可供讀者演題之用。應該申明，本書以已經學過理論力學的讀者為對象，因此重心、摩擦、圖解法等內容略去不談；另一方面，力學的分類、力學的方法、力學發展史、蘇聯力學家的介紹等在已出版的理論力學書籍中都已詳細地列入，本書為了避免重複，也將這些內容省去。

最後希望同志們提出寶貴的意見，以便在再版時改進。

汪家詠

1958年，於杭州浙江大學。

^① 中譯本已由高等教育出版社出版。

目 录

序言	vii
----------	-----

第一編 运动学

緒論	1
----------	---

第一章 点的运动	1
----------------	---

1. 点的运动方程式及軌迹(1)
2. 动点的速度和加速度(3)
3. 曲綫坐标(6)
4. 曲綫坐标的速度和加速度表式(12)
5. 自然坐标, 切向加速度及法向加速度(14)
6. 点作平面运动时加速度的薩斯雪公式(17)

第二章 剛体的运动	19
-----------------	----

7. 剛体运动的自由度(19)
8. 决定剛体位置的自变数·欧勒角(20)
9. 剛体运动的二种簡單情况: 移动和定軸轉动 (A)移动 (B)定軸轉动(25)
10. 剛体的平面平行运动 (A)剛体平面运动方程式 (B)平面圖形 S 上任一点的运动軌迹 (C)平面运动分解为移动和轉动, 欧勒定理 (D)在运动平面圖形中速度分布, 瞬时速度中心 (E)平面运动中的瞬时中心軌迹 (F)运动平面圖形中的加速度分布, 瞬时加速度中心(27)
11. 欧勒定理及蔡斯立定理(46)
12. 剛体一般位移的分析表式(48)
13. 无限小轉动的矢量性質(51)
14. 剛体定点旋轉的各种分析式, 有限轉动的合成法 (A)正交矩陣式 (B)欧勒角表式 (C)欧勒参数式 (D)四元数式 (E)凱萊-克萊因参数(52)
15. 角速度和角加速度(67)
16. 剛体定点旋轉时剛体上的速度分布, 瞬时軸軌迹面(70)
17. 有繞定点轉动的剛体的加速度分布(74)
18. 剛体一般运动的速度及加速度分布, 螺旋軸及螺旋軸軌迹面(76)

第三章 点的复合运动	82
------------------	----

19. 相对运动, 牵连运动, 絕對运动(82)
20. 矢量的絕對改变与相对改变的关系(83)
21. 速度合成定理及加速度合成定理(83)

第四章 剛体运动的合成	86
-------------------	----

22. 剛体一分运动是移动的情形(86)
23. 剛体繞相交軸轉动的合成(86)
24. 繞平行軸轉动的合成(87)
25. 繞不共面二軸轉动的合成(90)

第二編 力学基本理論

第一章 靜力学	92
---------------	----

26. 定义和公理. 力和力矩(92)	27. 力偶(95)	28. 力系的简化. 平衡方程式(99)	
第二章 質点动力学			103
29. 牛頓运动定律. 質点运动微分方程式(103)	30. 慣性系統. 慣性力(107)	31. 質点动力学普遍定理 (A) 动量定理——力的時間积分 (B) 动量矩定理 (C) 动能定理——力的路徑积分(112)	32. 势能. 机械能守恒定理(115)
第三章 質点系动力学			119
33. 質心运动定理. 質点系动量定理(119)	34. 質点系动量矩定理(122)	35. 質点系动能定理. 机械能守恒定理(124)	36. 动能計算公式. 寇尼格定理(125)
37. 伽利略变换对力学定律的协变性質(126)	38. 質点系达朗伯原質(129)		
第四章 轉动慣量			130
39. 轉动慣量的物理意义及其表式(130)	40. 史泰乃尔定理(131)	41. 对方向任意的軸的轉动慣量公式. 慣性积(132)	42. 慣性張量(133)
43. 慣量橢球. 慣量主軸(134)	44. 慣量主軸的性質(137)	45. 慣量橢球型式的范围(138)	46. 等慣量錐面(140)
47. 倒易慣量橢球(140)			
第五章 剛体动力学			143
48. 剛体一般运动的力学原則 (A) 动量定理(質心运动定理) (B) 动量矩定理. 剛体的动量矩公式 (C) 动能定理. 定点旋轉的动能公式(143)	49. 剛体定軸旋轉(146)	50. 剛体的平面平行运动(148)	51. 剛体定点旋轉 (A) 欧勒方程式. 剛体定点旋轉問題的普遍提法 (B) 初积分. 定点旋轉問題的結論 (C) 欧勒—潘索情况——第一种可积情况 (D) 潘索对慣性运动的剛体定点旋轉的几何解釋 (E) 拉格朗日—泊松情况——第二种可积情况 (F) C. B. 柯凡律夫斯卡雅情况——第三种可积情况(150)
第三編 分析靜力学			
第一章 質点靜力学			174
52. 質点約束的类型(174)	53. 虛位移和实位移. 約束加在坐标变分上的条件(175)	54. 虛位移原理(178)	55. 質点在曲面上的平衡(179)
56. 質点在曲綫上的平衡(187)			
第二章 質点系靜力学			191
57. 虛位移原理(191)	58. 直交坐标的平衡方程式(193)	59. 广义坐标的平衡方程式(199)	60. 力具有勢函数的平衡条件(201)
第三章 剛体及剛体組的平衡問題			205
61. 剛体的平衡方程式(205)	62. 机构的平衡問題(206)		

第四編 質点分析动力学

第一章 拉格朗日方程式	208
63. 自由質点的拉格朗日方程式(208) 64. 有势力的拉格朗日方程式(212) 65. 能量积分及广义能量积分(213) 66. 循环坐标及循环积分(217) 67. 非自由質点的拉格朗日方程式 (A)約束在曲綫上的質点的运动 (B)約束在曲面上的質点的运动(218) 68. 哈密頓的最小作用原理(226) 69. 稳定系統拉格朗日方程式的显性式(230)	
第二章 正則方程式	239
70. 广义动量(239) 71. 有势力作用下自由質点的正則方程式(241) 72. 被約束質点的正則方程式 (A)約束在曲綫上的質点的正則方程式 (B)約束在曲面上的質点的正則方程式(245) 73. 坐标变换式是时间函数的正則方程式(249)	
第三章 正則变换	252
74. 正則变换(252) 75. 接觸变换(255) 76. 四种不同母函数的正則变换(258)	
第四章 哈密頓-雅科畢方程式	260
77. 有势力場的哈密頓微分方程式(260) 78. 哈密頓主函数的力学性質(262) 79. 雅科畢定理(264) 80. 不稳定系統的哈密頓方程式及雅科畢定理(268)	
第五章 相积分及相空間	274
81. 一个自由度的周期运动(274) 82. 多周期函数的相积分(278) 83. 相空間, 相迹, 相速度(283)	
第六章 力学的变分原理	287
(一)微分原理	
84. 高斯最少約束运动原理(288) 85. 赫兹最直路徑原理(最小曲率原理)(291)	
(二)积分原理	
86. 拉格朗日最小作用量原理(292) 87. 莫培督的最小作用原理(295)	

第五編 質点系分析动力学

第一章 第一类拉格朗日方程式	297
88. 力学系統的約束条件及自由度(297) 89. 动力学普遍定理(300) 90. 第一类拉格朗日方程式(301) 91. 有势稳定力学系統的能量积分(306)	
第二章 第二类拉格朗日方程式	309
92. 完整力学組的第二类拉格朗日方程式(309) 93. 动能的表式, 广义能量积分(316) 94. 稳定力学組的拉格朗日显性式(318) 95. 受到匀速轉运約束的完整力学組(320) 96. 含速度势函数的拉格朗日方程式(323) 97. 碰撞問題的拉格朗日方程式(324) 98. 反向力的运动問題(326) 99. 应用循环积分拉格朗日方	

程式的降阶法(罗兹法)(329)	100. 应用能量积分拉格朗日方程式的降阶法(威特克法)(333)	101. 可变数分离的拉格朗日方程式及刘維方程式(338)	102. 耗散函数的拉格朗日方程式(342)
第三章 不完整力学系統	346		
103. 不完整力学系統的罗兹方程式(246)	104. 阿沛耳方程式及加速度能量式(353)		
第四章 正则方程式和雅科畢方程式	363		
105. 正则变数和正则方程式(363)	106. 哈密頓正则方程式(364)	107. 正则方程式的第一次积分(367)	108. 雅科畢方程式(369)
109. 雅科畢定理(371)	110. H 不含 t 或有循环坐标的情形(373)		
第五章 力学的变分原理	377		
(一)微分原理			
111. 虚位移原理(377)	112. 高斯最少約束原理(378)	113. 从高斯原理推导力学組的运动方程式(380)	114. 赫兹最直路徑原理(382)
(二)积分原理			
115. 哈密頓原理(384)	116. 非保守系的哈密頓原理(386)	117. 从哈密頓原理推导运动方程式(387)	118. 哈密頓作用量和雅科畢方程式主函数的关系(388)
119. 拉格朗日最小作用原理(389)	120. 从最小作用量原理推导运动方程式(391)	121. 最小作用量原理的各种表式(392)	122. 作用量是最小值的判別. 动焦点(393)
123. 从短程綫的观点来看最小作用原理(397)			
第六章 正则变换及其不变式	399		
124. 四种不同母函数的正则变换(399)	125. 彭卡瑞的积分不变式(402)	126. 拉格朗日括号是正则不变式(405)	127. 泊松括号是正则不变式(406)
128. 雅科畢恒等式(411)	129. 用泊松括号表示的运动方程式(413)	130. 正则变换的群性及正则变换群的子群(416)	131. 无限小正则变换(419)
132. 刘維定理(421)			
第六編 連續体分析动力学			
133. 从分离系过渡到連續系之例(426)	134. 連續系的拉格朗日方程式(428)	135. 变分导数式(434)	136. 連續系的哈密頓正则方程式(434)
137. 連續系的泊松式(438)			
第七編 附 录			
附录 I, 矢量代数及矢量分析概要	440		
附录 II, 欧勒齐次函数定理	445		
附录 III, 变分学大意	447		
附录 IV, 短程綫方程式的推导	454		
附录 V, 合同样三个变数的三个函数有关系式存在的条件	456		
附录 VI, 接触变换的几何意义	459		

第一編 运动学

緒 論

运动学是單从几何的观点去研究各种运动的一般性質，而根本不談运动状态改变的原因。它所研究的要素只有空間和時間两个，所以运动学亦称为运动几何学。

所謂某物体在运动，是說它因時間不同而改变它在空間的位置，或物体本身各部位置相互改变。

物体的运动和靜止是相对的，因为一物体在空間的位置改变不改变，如果沒有其他物体作为标記，我們不能認識它是否在运动。不但如此，我們用任何实验都不能决定物体的绝对速度，这是爱因斯坦特殊相对論的基本前提，利用这个前提推出的結論是符合实验結果的。

第一章 点的运动

1. 点的运动方程式及軌迹 所謂点在理論上是指无量度的物体，在处理实际問題时應該用辯証的观点，物体的大小在运动的过程中可以忽視的情况下，就可以将它当作点来看待。例如，研究行星繞日的运动时就可以将行星当作点。

要掌握点的运动，必須能确定点在任何瞬时的位置。要确定点的位置可选一固定于某物体上的一坐标系，然后度量出这点在这坐标系的坐标值，就决定了这点的位置。

我們最熟用的是笛卡兒直角坐标系 $O-xyz$ 。 P 点的坐标 (x, y, z)

决定了点 P 的位置(圖 1)。設沿 x, y, z 三坐标軸的單位矢量为 i, j, k 。那么, 自原点 O 至动点 P 的矢量 r 可写为

$$r = xi + yj + zk,$$

r 称为动点 P 的位置矢, 它的大小是 $r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。它的方向由 r 与坐标軸的夾角的余弦决定, 即

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos \beta = \frac{y}{r}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{r}.$$

当点 P 在空間运动时, 它的坐标 x, y, z 都是時間 t 的函数:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t), \quad (1)$$

若上三函数的表式完全已知时, 我們就完全掌握了点 P 的运动規律, 所

以(1)称为点的**运动方程式**。

在同一時間内, 一动点不可能有二个位置, 所以 f_1, f_2, f_3 必須是 t 的單值函数。又动点不能自空間某一位置突然变到另一位置, 所以这些函数又是 t 的連續函数。

将(1)之 t 消去, 則可得到动点运动的**軌迹方程式**。事实上(1)可看作以 t 为参数的軌迹方程式。

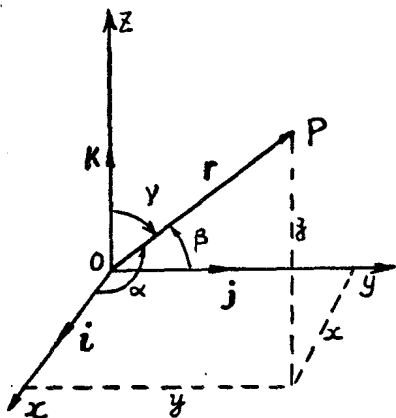


圖 1

如已知动点的軌迹, 又掌握动点到軌迹上某定点的路程 s 与時間的关系式

$$s = f(t), \quad (2)$$

那么, 我們也完全掌握了点的运动情况。上式称为点的**路徑方程式**。

[例 1] 已知点的运动方程式为

$$x = a \sin \left(2\omega t - \frac{\pi}{2} \right); \quad y = a \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

求这动点的轨迹和路径方程式。

[解]

$$x = a \sin \left(2\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = -a \cos 2\omega t = a(1 - 2\cos^2 \omega t),$$

$$y = a \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = -a \cos \omega t,$$

上二式消去 $\cos \omega t$, 得

$$x = a \left(1 - 2 \frac{y^2}{a^2} \right),$$

这是抛物线方程式, 它的顶点在 $(a, 0)$, 以 x 轴为对称轴 (图 2)。

又

$$dx = 2a\omega \sin 2\omega t dt;$$

$$dy = a\omega \sin \omega t dt,$$

故 $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = a\omega \sin \omega t \sqrt{16 \cos^2 \omega t + 1} dt,$

于是 $s = a\omega \int_0^t \sqrt{16 \cos^2 \omega t + 1} \sin \omega t dt,$

积分得

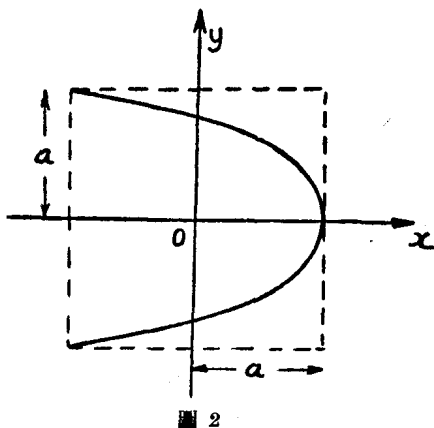
$$s = \frac{a}{2} \left[17 - \cos \omega t \sqrt{16 \cos^2 \omega t + 1} + \frac{1}{4} \ln \frac{4 + \sqrt{17}}{4 \cos \omega t + \sqrt{16 \cos^2 \omega t + 1}} \right].$$

2. 动点的速度和加速度 动点在 t 时位置在 P 点, 经 Δt 秒后到 P' 点, 此时间内动点进行的路程是 Δs , 显然 $\Delta t \rightarrow 0$ 时 $\Delta s \rightarrow 0$ 。比率

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

可以表示动点在 t 时运动快慢的情况, 我们称它为动点在 t 时的速率 (图 3)。

若动点在 P 和 P' 的位置矢是 \mathbf{r} 和 \mathbf{r}' , 那么 $\mathbf{r}' - \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r}$ 是方向沿



弦 PP' 的矢量。当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $|\Delta \mathbf{r}| \rightarrow \Delta s \rightarrow 0$, 可见 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ 大小和 v

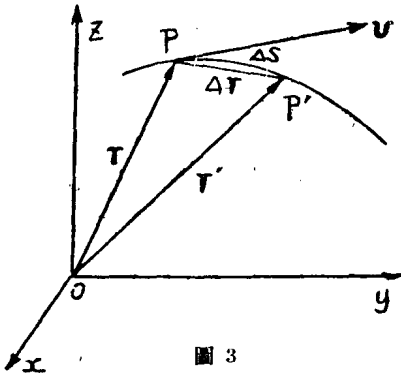


圖 3

相等, 方向和运动方向相同。我們称它为动点在 P 处的速度, 用 v 表示, 則

$$\begin{aligned} v &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \\ &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} = \\ &= v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}. \end{aligned}$$

v 的大小为

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2};$$

v 的方向余弦为

$$\cos(\widehat{v_x}) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\widehat{v_y}) = \frac{v_y}{v}, \quad \cos(\widehat{v_z}) = \frac{v_z}{v}.$$

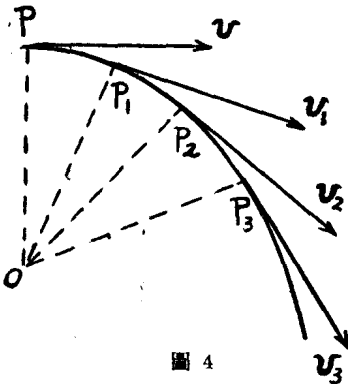


圖 4

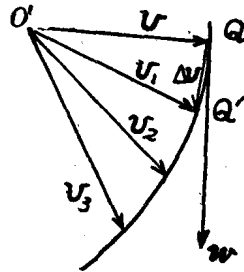


圖 5

一般 v 随 t 或动点的位置而不同。設动点在 P, P_1, P_2, P_3, \dots 处的速度分别是 v, v_1, v_2, v_3, \dots 等(圖 4)。任取一点 O' 为始端, 作 v, v_1, v_2, \dots 等各矢量, 因动点的速度随位置而發生連續的变化, 所以各速度矢量的末端順次連接得出一連續曲綫, 此曲綫称为速端曲綫(圖 5)。

设动点自 P 运动到 P_1 的时间是 Δt , 那么 $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v} = \Delta \mathbf{v}$ 是 Δt 时间内 \mathbf{v} 的变化. $\Delta \mathbf{x}$ 在速端曲线上是弦矢量 $\vec{QQ'}$. 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\Delta \mathbf{v} \rightarrow 0$. $\Delta \mathbf{v}$ 的方向趋近于在 Q 点切于速端曲线的切线. 所以 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$ 表示了动点在 P 点 \mathbf{v} 的变化率, 称为加速度, 以 \mathbf{w} 表示, 那么

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} = \\ &= w_x\mathbf{i} + w_y\mathbf{j} + w_z\mathbf{k}. \end{aligned}$$

所以 \mathbf{w} 的大小是

$$w = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2},$$

它的方向余弦是

$$\cos(\widehat{\mathbf{w}x}) = \frac{w_x}{w}, \quad \cos(\widehat{\mathbf{w}y}) = \frac{w_y}{w}, \quad \cos(\widehat{\mathbf{w}z}) = \frac{w_z}{w}.$$

[例 2] 动点依下面的方程式作螺旋运动(图 6):

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t, \quad z = ct,$$

求动点的速度和加速度的大小和方向.

[解] 将运动方程式对 t 取一次及二次导数得

$$v_x = -a\omega \sin \omega t,$$

$$v_y = a\omega \cos \omega t, \quad v_z = c,$$

及 $w_x = -a\omega^2 \cos \omega t,$

$$w_y = -a\omega^2 \sin \omega t, \quad w_z = 0,$$

所以 $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{a^2\omega^2 + c^2}$ 为一常量. 又

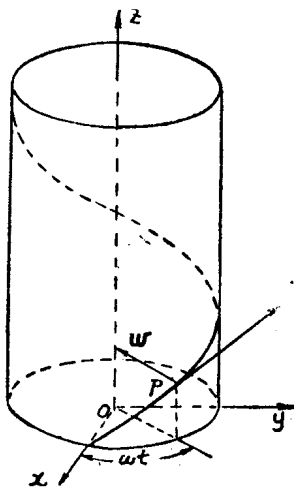


图 6

$$\cos(\widehat{\mathbf{v}x}) = \frac{-a\omega \sin \omega t}{\sqrt{a^2\omega^2 + c^2}},$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{v}y}) = \frac{a\omega \cos \omega t}{\sqrt{a^2\omega^2 + c^2}},$$

$$\cos(\widehat{vz}) = \frac{c}{\sqrt{a^2\omega^2 + c^2}},$$

由上面第三式可見 v 与 z 軸的夾角保持不变。所以各 v 成为正圓錐的母綫如圖 7。而速端曲綫是一圓，它的半徑是 $\sqrt{v_z^2 + v_y^2} = a\omega$ 。

又

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = a\omega^2;$$

$$\cos(\widehat{wx}) = \frac{w_x}{w} = \frac{-a\omega^2 \cos \omega t}{a\omega^2} = -\cos \omega t;$$

$$\cos(\widehat{wy}) = \frac{w_y}{w} = -\sin \omega t; \quad \cos(\widehat{wz}) = \frac{w_z}{w} = 0.$$

由上式可見， w 平行于 xOy 平面。此事也可从速端曲綫圖上看出来，因为 w 和速度圓相切。

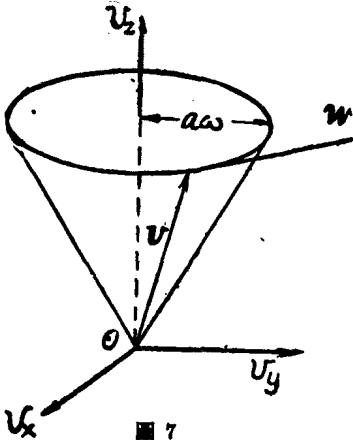


圖 7

3. 曲綫坐标 有些力学問題用曲綫坐标比用笛卡兒坐标更利于解題。例如，有心力作用下質点的运动問題用球面坐标比較方便。在曲綫坐标中有些坐标变数它的量綱不是長度而是角度。現在先討論几种簡單的、常用的曲綫坐标，然后討論更一般的曲綫坐标。

(a) 平面極坐标 用自原点 O 至点 P 的射綫的長 ρ 和此射綫 OP 与 x 軸的夾角 θ 的一对值 (ρ, θ) 来确定 P 点的位置。它与平面笛卡兒坐标的关系式由圖 8 (a) 知是

$$x = \rho \cos \theta; \quad y = \rho \sin \theta. \quad (3)$$

坐标綫

$$\theta = \text{常数}, \quad \rho = \text{常数},$$

分別成为以原点 O 为圓心的同心圓和过原点的射綫如圖 8 (b)。

弧長 ds 的表式可用关系式 $ds^2 = dx^2 + dy^2$ 及 (3) 的微分式：

$$dx = \cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta;$$

$$dy = \sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta$$

求得为

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2. \quad (4)$$

上式也可以从圖 8 (c) 将 $ds, d\rho, \rho d\theta$ 看作直角三角形的三边求出。

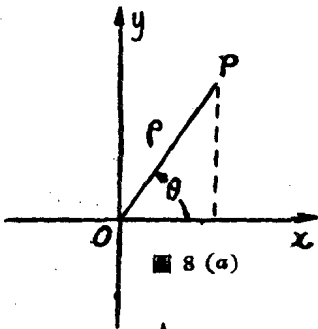


圖 8 (a)

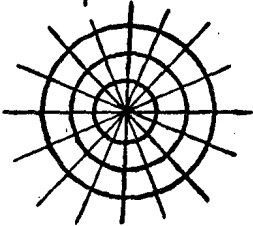


圖 8 (b)

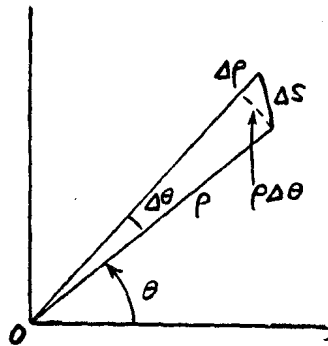


圖 8 (c)

(b) 圆柱坐标 用自 P 到 Oxy 平面的垂綫長 z 和此垂綫的垂足 P' 在 Oxy 平面上的極坐标 (ρ, θ) 作为确定 P 点的坐标。所以圆柱坐标是 (ρ, θ, z) 。与空間笛卡兒坐标的关系式是由圖 9):

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta, & y &= \rho \sin \theta, \\ z &= z. \end{aligned} \quad (5)$$

坐标面 $\rho = \text{常数}$,

$\theta = \text{常数}$, $z = \text{常数}$,

分别是以 z 为軸的圆柱面、通过 z 軸的平面及与 Oxy 平面平行的平面, 如圖 10 (a)、(b)、(c)。

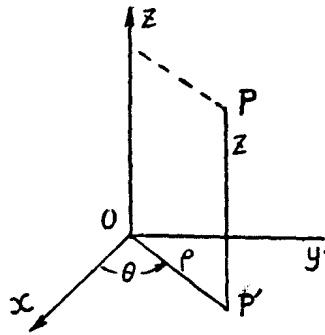


圖 9

弧長 ds 的表式也可用微分法求得, 但应用圖 11, 將 dz , $d\rho$, $\rho d\theta$ 作為長方體的三邊就可求得為

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2. \quad (6)$$

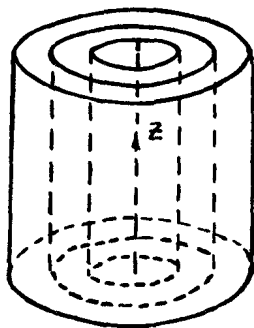


圖 10 (a)

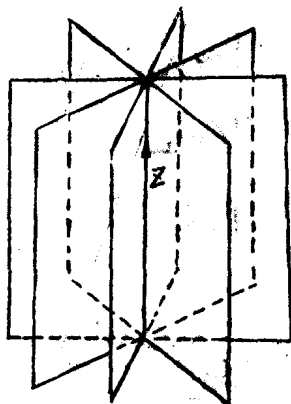


圖 10 (b)

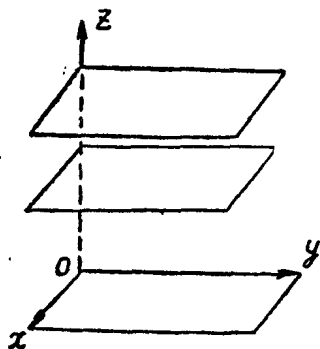


圖 10 (c)

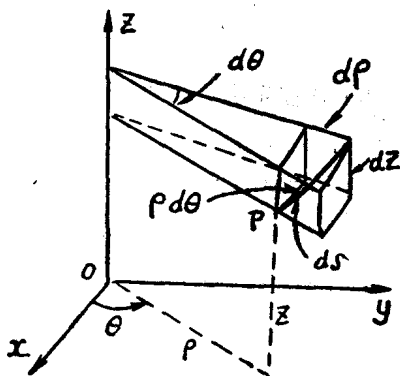


圖 11

(c) 球面坐标 用 O 至 P 的射綫長 r , OP 与 z 軸的夾角 φ , 及 OP 在 Oxy 平面上的投影 OP' 与 x 軸的夾角 θ ; 即 (r, φ, θ) 作為 P 点的坐标(圖 12)。