高等学校教学用書

分析动力学

汪家訸編

高等教育出版社

高等学校教学用書

分析动力学

汪家訸 編

高等教育出版社

本書講解分析力学的基本原則，并以很多例題來配合說明，使讀者在領会这些原則之后，能够掌握分析力学的解題方法。主要内容有：运动学、力学基本理論、分析靜力学、質点分析动力学、質点系分析动力学、連續体分析动力学及附录等編。

本書的讀者对象主要是理工学院学生、工程师及一般科学工作者。

分 析 动 力 学

汪家訸編

高等教育出版社出版北京宣武門內承恩寺7号

（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）

京华印書局印刷　新华書店發行

統一書号15010·588　開本850×1168 1/32　印張14 11/16

字數374,000　印數0001—3,000　定價(10)￥1.60

1958年12月第1版　1958年12月北京第1次印刷

序　言

到目前为止，国内尚沒有关于“分析动力学”的專書，所有理論力学書中所附的，內容既不丰富，討論也欠深入；另一方面，国外名著則各有其优缺点，因此作者不自諏陋，試集各書之長，匯編成此書。

本書有一特点，就是有充分多的例題来配合說明原則。我認为用例題說明原則是实踐和理論結合的初步形式。通过例題，便容易領会原則的內容；能进一步掌握原則的应用。有些力学書为了叙述个别力学現象而零星地引入一些例題，但本書則不然，着重討論分析力学原則，書中例題只是为了說明原則才引入；除非是在重点，类似的例題不予多举，以免分散对原則的注意力。

为了本書同时适用于作为理工学院的参考書，內容以經典力学的范圍为限。在这范圍內又为学習相对力学、量子力学、場論等打基础。象振动、剛体力学等，力学專題資料太多，如要深入研究，应看这些力学問題的專書。本書的主要任务是說明分析力学的原則和交代分析力学的解題方法。

第一編运动学是为了分析动力学中的例題需要某些运动学公式而設的，其中最主要的內容是曲綫坐标的速度和加速度表式和剛体定点旋轉时剛体上的速度分布。本編采用苏联的編法：先講点的运动，再談剛体的运动（与威特克（Whittaker）的英文本的編法不同）。就运动学部分而言，本編已几乎包括了威特克所著“分析动力学”中运动学的全部內容，而且比它多了剛体平面平行运动的資料。对剛体定点旋轉的各种分析表法，写得相当完备，可供讀者研究剛体运动的参考。

第二編力学基本理論目的是簡要地总結一下理論力学的內容，这样本書可自成一系統；另一方面补充說明些重要的力学概念，例如，慣性系統、慣性力和伽利略变換对力学定律的协变性質，这两节是一般力学書中沒有充分說明的，这內容不但是用以啓發相对論的概念，同时可

以揭露經典力学的一些本質。

第三編分析靜力学作为引入分析动力学的一个阶梯。从那兒很自然地引入广义力的概念，这样在第四編中推导拉格朗日方程式方法的目的性便很明确了。又在这編中介紹拉格朗日不定乘子法也是很适当的。

第四編質点分析动力学和第五編質点系分析动力学是本書主要的內容。从这两編的标題上看去，似乎有許多是重复的，但內容則不然。这两編分担了不同的任务，前者着重說明物理意义及推导的目的性，后者追求推导的一般化及原則的普遍性，这样难点分散，易于学習。作者所以采用这样的編法，主要是利用一个質点的力学問題在瞬时常可用三維空間的圖形来表示。这样学到質点系的多維空間才易于想象和領会，同时收到由淺入深的效果。

第六編連續体分析动力学的理論可应用于場論。不过限于本書的范圍，对場論本身只好不談。本編內容全部來自哥德斯坦(H. Goldstein)所著："古典力学"。

第七編附录是附以閱讀本書的一些必要的数学知識。可能某些地方还照顧得不够，但是为了篇幅不致过多，暫且也只好如此。

为了节省篇幅，本書習題收罗不多。密歇尔斯基 (И. В. Мещерский)所著"理論力学習題集"① 自第 340 頁到 368 頁，有关分析靜力学和拉格朗日方程式的習題，可供讀者演題之用。应該申明，本書以已經学过理論力学的讀者为对象，因此重心、摩擦、圖解法等內容略去不談；另一方面，力学的分类、力学的方法、力学發展史、苏联力学家的介紹等在已出版的理論力学書籍中都已詳細地列入，本書为了避免重复，也將这些內容省去。

最后希望同志們提出宝貴的意見，以便在再版时改进。

汪家訸

1958 年，于杭州浙江大学。

① 中譯本已由高等教育出版社出版。

目 录

第四編　質点分析动力学

第五編　質点系分析动力学

第一編　运动学

緒　論

运动学是單从几何的观点去研究各种运动的一般性質，而根本不談运动状态改变的原因。它所研究的要素只有空間和时間两个，所以运动学亦称为运动几何学。

所謂某物体在运动，是說它因时間不同而改变它在空間的位置，或物体本身各部位置相互改变。

物体的运动和靜止是相对的，因为一物体在空間的位置改变不改变，如果沒有其他物体作为标記，我們不能認識它是否在运动。不但如此，我們用任何实驗都不能决定物体的絕对速度，这是爱因斯坦特殊相对論的基本前提，利用这个前提推出的結論是符合实驗結果的。

第一章　点的运动

1. 点的运动方程式及軌迹　所謂**点**在理論上是指无量度的物体，在处理实际問題时应該用辯証的观点，物体的大小在运动的过程中可以忽视的情况下，就可以将它当作点来看待。例如，研究行星繞日的运动时就可以将行星当作点。

要掌握点的运动，必須能确定点在任何瞬时的位置。要确定点的位置可选一固定于某物体上的一坐标系，然后度量出这点在这坐标系的坐标值，就决定了这点的位置。

我們最熟用的是笛卡兒直角坐标系 $O-xyz$。P 点的坐标 (x, y, z)

决定了点 P 的位置(圖 1)。設沿 x, y, z 三坐标軸的單位矢量表为 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$。那么,自原点 O 至动点 P 的矢量 $\boldsymbol{r}$ 可写为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

$\boldsymbol{r}$ 称为动点 P 的位置矢,它的大小是 $r=+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。它的方向由 $\boldsymbol{r}$ 与坐标軸的夾角的余弦决定,即

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\qquad \cos\beta=\frac{y}{r},\qquad \cos\gamma=\frac{z}{r}.$$

当点 P 在空間运动时,它的坐标 x, y, z 都是时間 t 的函数:

$$x=f_1(t),\quad y=f_2(t),\quad z=f_3(t), \tag{1}$$

若上三函数的表式完全已知时,我們就完全掌握了点 P 的运动規律,所以 (1) 称为点的**运动方程式**。在同一时間內,一动点不可能有二个位置,所以 f_1, f_2, f_3 必須是 t 的單値函数。又动点不能自空間某一位置突然变到另一位置,所以这些函数又是 t 的連續函数。

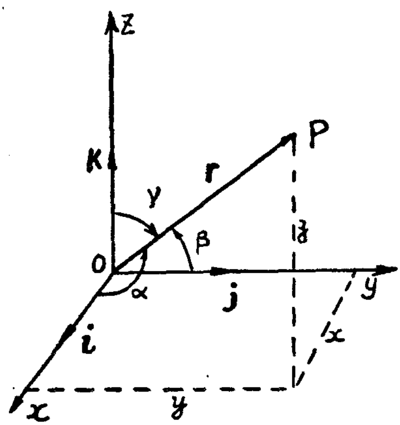

圖 1

将(1)之 t 消去,則可得到动点运动的**軌迹方程式**。事实上 (1) 可看作以 t 为参数的軌迹方程式。

如已知动点的軌迹,又掌握动点到軌迹上某定点的路程 s 与时間的关系式

$$s=f(t), \tag{2}$$

那么,我們也完全掌握了点的运动情况。上式称为点的**路徑方程式**。

〔例 1〕 已知点的运动方程式为

$$x=a\sin\left(2\omega t-\frac{\pi}{2}\right);\qquad y=a\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right).$$

求这动点的軌迹和路徑方程式。

［解］

$$x=a\sin\left(2\omega t-\frac{\pi}{2}\right)=-a\cos 2\omega t=a(1-2\cos^2\omega t),$$

$$y=a\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)=$$
$$=-a\cos\omega t,$$

上二式消去 $\cos\omega t$, 得

$$x=a\left(1-2\frac{y^2}{a^2}\right),$$

这是拋物綫方程式，它的頂点在$(a, 0)$,以 x 軸为对称軸（圖 2)。

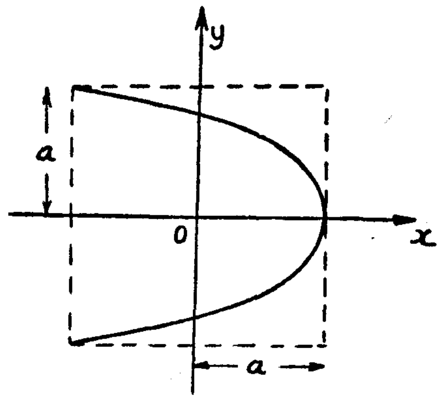

圖 2

又

$$dx=2a\omega\sin 2\omega t\,dt;$$
$$dy=a\omega\sin\omega t\,dt,$$

故 $$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=a\omega\sin\omega t\sqrt{16\cos^2\omega t+1}\,dt,$$

于是 $$s=a\omega\int_0^t\sqrt{16\cos^2\omega t+1}\sin\omega t\,dt,$$

积分得

$$s=\frac{a}{2}\left[17-\cos\omega t\sqrt{16\cos^2\omega t+1}+\frac{1}{4}\ln\frac{4+\sqrt{17}}{4\cos\omega t+\sqrt{16\cos^2\omega t+1}}\right].$$

2. 动点的速度和加速度　动点在 t 时位置在 P 点，經 Δt 秒后到 P' 点,此时間內动点进行的路程是 Δs, 显然 $\Delta t\to 0$ 时 $\Delta s\to 0$。比率

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}$$

可以表示动点在 t 时运动快慢的情况，我們称它为动点在 t 时的**速率**(圖 3)。

若动点在 P 和 P' 的位置矢是 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$, 那么 $\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}=\Delta\boldsymbol{r}$ 是方向沿

弦 PP' 的矢量。当 $\Delta t\to 0$ 时，$|\Delta \boldsymbol{r}|\to\Delta s\to 0$。可見 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ 大小和 v 相等，方向和运动方向相同。我們称它为动点在 P 处的**速度**，用 $\boldsymbol{v}$ 表示，则

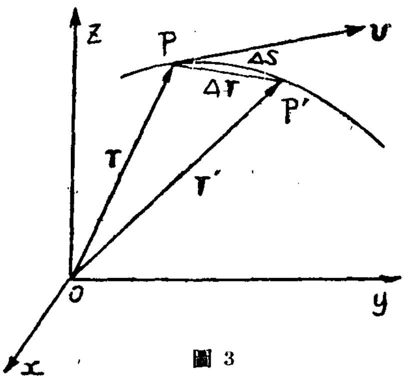

圖 3

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=$$

$$=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}=$$

$$=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}.$$

$\boldsymbol{v}$ 的大小为

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2};$$

$\boldsymbol{v}$ 的方向余弦为

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{v}x})=\frac{v_x}{v},\qquad \cos(\widehat{\boldsymbol{v}y})=\frac{v_y}{v},\qquad \cos(\widehat{\boldsymbol{v}z})=\frac{v_z}{v}.$$

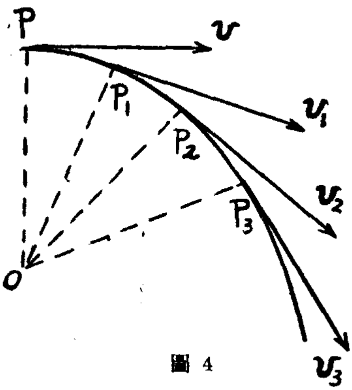

圖 4

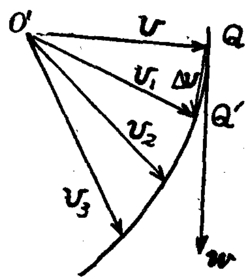

圖 5

一般 $\boldsymbol{v}$ 随 t 或动点的位置而不同。設动点在 $P, P_1, P_2, P_3, \cdots$ 处的速度分别是 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \cdots$ 等(圖 4)。任取一点 O' 为始端，作 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots$ 等各矢量，因动点的速度随位置而發生連續的变化，所以各速度矢量的末端順次連接得出一連續曲綫，此曲綫称为**速端曲綫**(圖 5)。

設动点自 P 运动到 P_1 的时間是 Δt，那么 $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}=\Delta\boldsymbol{v}$ 是 Δt 时間內 $\boldsymbol{v}$ 的变化。$\Delta\boldsymbol{v}$ 在速端曲綫上是弦矢量 $\overrightarrow{QQ'}$。当 $\Delta t\to 0$ 时，$\Delta\boldsymbol{v}\to 0$。$\Delta\boldsymbol{v}$ 的方向趋近于在 Q 点切于速端曲綫的切綫。所以 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$ 表出了动点在 P 点 $\boldsymbol{v}$ 的变化率，称为**加速度**，以 $\boldsymbol{w}$ 表示，那么

$$\boldsymbol{w}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}\boldsymbol{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\boldsymbol{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\boldsymbol{k}=$$

$$=w_x\boldsymbol{i}+w_y\boldsymbol{j}+w_z\boldsymbol{k}.$$

所以 $\boldsymbol{w}$ 的大小是

$$w=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2},$$

它的方向余弦是

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{w}x})=\frac{w_x}{w},\qquad \cos(\widehat{\boldsymbol{w}y})=\frac{w_y}{w},\qquad \cos(\widehat{\boldsymbol{w}z})=\frac{w_z}{w}.$$

［例 2］　动点依下面的方程式作螺綫运动(圖 6)：

$$x=a\cos\omega t,\quad y=a\sin\omega t,\quad z=ct,$$

求动点的速度和加速度的大小和方向。

［解］　将运动方程式对 t 取一次及二次导数得

$$v_x=-a\omega\sin\omega t,$$

$$v_y=a\omega\cos\omega t,\quad v_z=c,$$

及

$$w_x=-a\omega^2\cos\omega t,$$

$$w_y=-a\omega^2\sin\omega t,\quad w_z=0,$$

所以 $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{a^2\omega^2+c^2}$ 为一常量。又

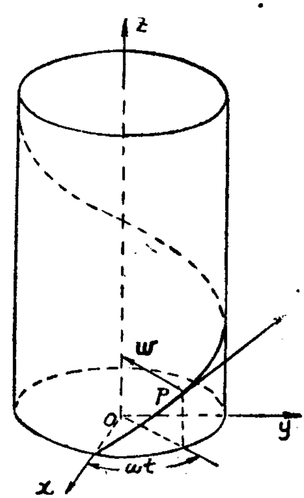

圖 6

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{v}x})=\frac{-a\omega\sin\omega t}{\sqrt{a^2\omega^2+c^2}};$$

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{v}y})=\frac{a\omega\cos\omega t}{\sqrt{a^2\omega^2+c^2}};$$

$$\cos(\widehat{vz})=\frac{c}{\sqrt{a^2\omega^2+c^2}},$$

由上面第三式可見 v 与 z 軸的夾角保持不变。所以各 v 成为正圓錐的母綫如圖 7。而速端曲綫是一圓，它的半徑是 $\sqrt{v_x^2+v_y^2}=a\omega$。

又
$$w=\sqrt{w_x^2+w_y^2+w_z^2}=a\omega^2;$$

$$\cos(\widehat{wx})=\frac{w_x}{w}=\frac{-a\omega^2\cos\omega t}{a\omega^2}=-\cos\omega t;$$

$$\cos(\widehat{wy})=\frac{w_y}{w}=-\sin\omega t;\quad \cos(\widehat{wz})=\frac{w_z}{w}=0.$$

由上式可見，w 平行于 xOy 平面。此事也可从速端曲綫圖上看出来，因为 w 和速度圓相切。

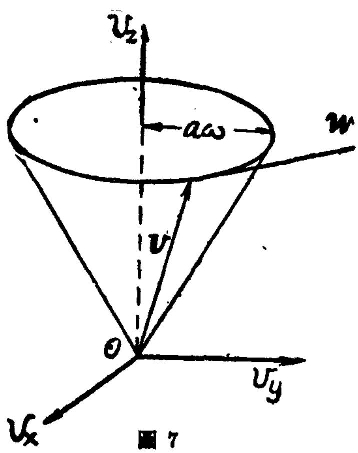

圖 7

3. **曲綫坐标** 有些力学問題用曲綫坐标比用笛卡兒坐标更利于解題。例如，有心力作用下質点的运动問題用球面坐标比較方便。在曲綫坐标中有些坐标变数它的量綱不是長度而是角度。現在先討論几种簡單的、常用的曲綫坐标，然后討論更一般的曲綫坐标。

(a) **平面極坐标** 用自原点 O 至点 P 的射綫的長 ρ 和此射綫 OP 与 x 軸的夾角 θ 的一对值 (ρ, θ) 来确定 P 点的位置。它与平面笛卡兒坐标的关系式由圖 8 (a) 知是

$$x=\rho\cos\theta;\quad y=\rho\sin\theta. \tag{3}$$

坐标綫 $\theta=$ 常数， $\rho=$ 常数，

分别成为以原点 O 为圓心的同心圓和过原点的射綫如圖 8 (b)。

弧長 ds 的表式可用关系式 $ds^2=dx^2+dy^2$ 及(3)的微分式：

$$dx=\cos\theta\, d\rho-\rho\sin\theta\, d\theta;$$

$$dy=\sin\theta\,d\rho+\rho\cos\theta\,d\theta$$

求得为
$$ds^2=d\rho^2+\rho^2\,d\theta^2. \tag{4}$$

上式也可以从圖 8 (c) 将 $ds, d\rho, \rho\,d\theta$看作直角三角形的三边求出。

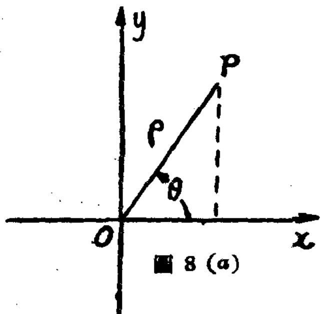

圖 8 (a)

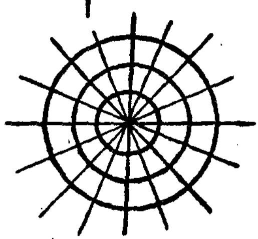

圖 8 (b)

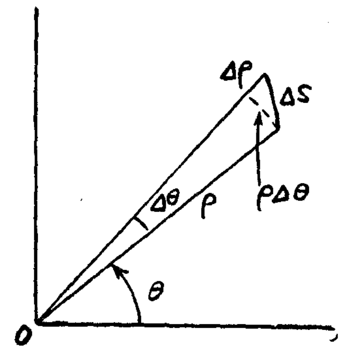

圖 8 (c)

(b) 圓柱坐标 用自 P 到 Oxy 平面的垂綫長 z 和此垂綫的垂足 P' 在 Oxy 平面上的極坐标 (ρ,θ) 作为确定 P 点的坐标。所以圓柱坐标是 (ρ,θ,z)。与空間笛卡兒坐标的关系式是(由圖 9):

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,$$
$$z=z. \tag{5}$$

坐标面 $\rho=$常数,

$\theta=$常数, $z=$常数,

分别是以 z 为軸的圓柱面、通过 z 軸的平面及与 Oxy 平面平行的平面,如圖 10 (a)、(b)、(c)。

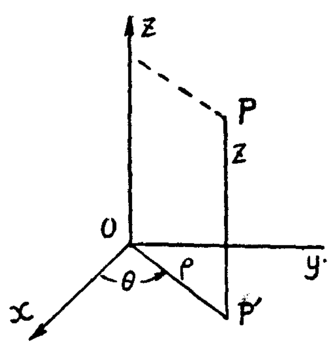

圖 9

弧長 ds 的表式也可用微分法求得，但应用圖 11，将 dz, $d\rho$, $\rho\,d\theta$ 作为長方体的三边就可求得为

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\,d\theta^2 + dz^2. \tag{6}$$

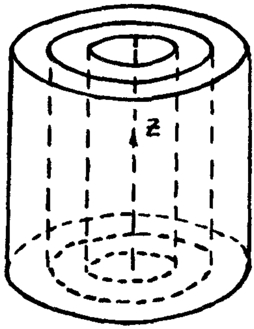

圖 10 (a)

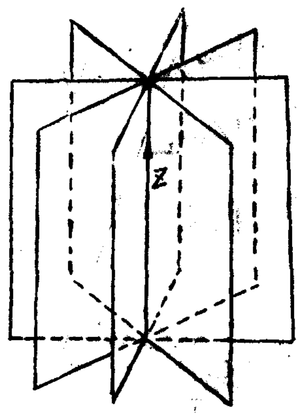

圖 10 (b)

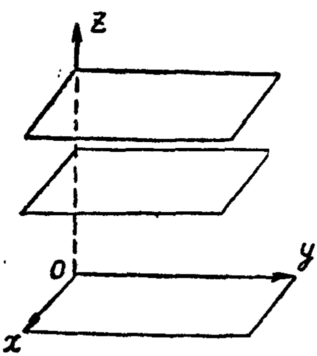

圖 10 (c)

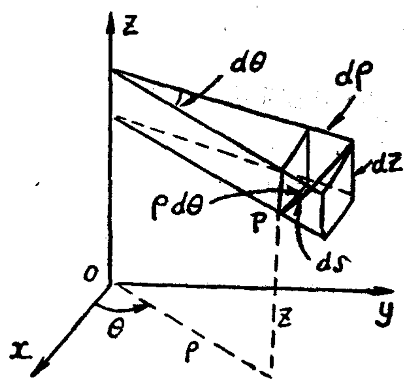

圖 11

(c) 球面坐标　用 O 至 P 的射綫長 r, OP 与 z 軸的夾角 φ, 及 OP 在 Oxy 平面上的投影 OP' 与 x 軸的夾角 θ; 即 (r, φ, θ) 作为 P 点的坐标(圖 12)。