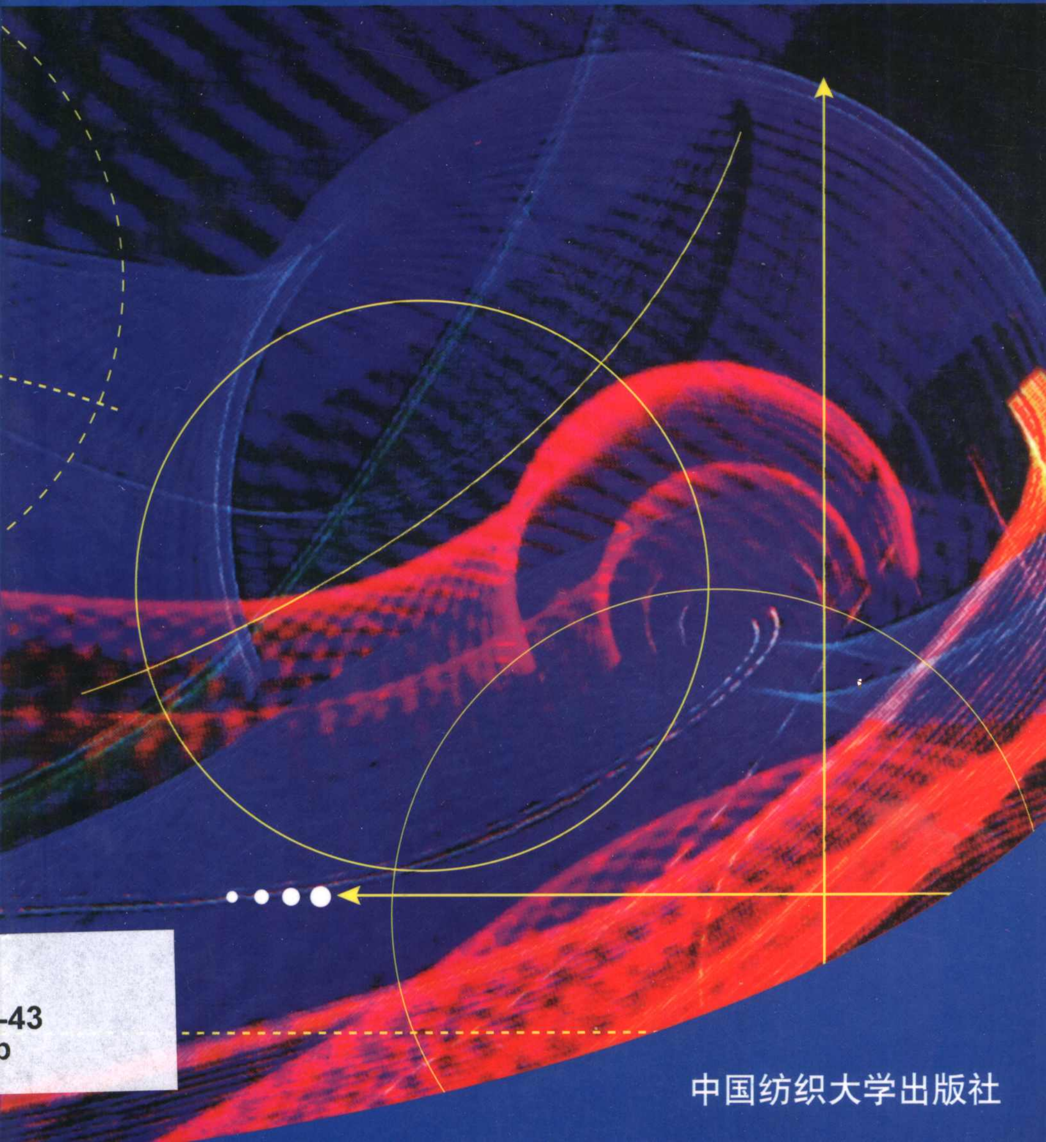
李绍宽 著

现代数学选讲



中国纺织大学出版社

252

工科研究生教材

现代数学选讲

李绍宽　著

中国纺织大学出版社

内 容 提 要

本书是对研究生讲授现代数学选讲的教材. 主要内容包括集合论、代数结构、拓扑结构和分析结构四个部分. 集合论主要讲了集合的运算、映像、势以及模糊集论基础;代数结构主要讲了群、环和代数体系;拓扑结构中主要包括距离空间、赋范空间和内积空间的基本知识;分析结构主要包括测度空间等内容. 这些内容主要是向工科研究人员介绍现代数学的基本语言和框架,向他们提供一个现代数学的工具.

图书在版编目(CIP)数据

现代数学选讲/李绍宽著. —上海:中国纺织大学出版社,2000.6

ISBN 7-81038-264-0

Ⅰ. 现… Ⅱ. 李… Ⅲ. 高等数学-研究生-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 57943 号

责任编辑 邵 静
封面设计 严坚莉
责任校对 季丽华

现代数学选讲
李绍宽 著
中国纺织大学出版社出版
(上海市延安西路 1882 号 邮政编码:200051)
新华书店上海发行所发行 中国纺织大学印刷厂印刷
开本:850×1156 1/32 印张:5.75 字数:135 千字
2000 年 12 月第 1 版 2000 年 12 月第 1 次印刷
印数:001—1 000

ISBN 7-81038-264-0/O·12
定价:11.50 元

前　言

研究生教育在近十多年来得到非常快速的发展，而为了提高工科数学研究生的水平，提高他们的数学素质是一个重要方面．在过去多年中，对工科博士生开设了“现代数学选讲”，向他们介绍现代数学的基本知识，帮助他们了解现代数学的语言、方法和框架．本书就是在对讲课内容总结、修改、补充的基础上，编著而成的．

本书主要以现代数学的基本框架——集合、代数结构、拓扑结构、代数拓扑结构、分析结构为主线，介绍有关的基本概念、基本定理．通过这些内容的学习，帮助工科研究生了解现代数学的语言、方法和框架，以便于他们在做毕业论文的时候，能使用这些知识来描述和推导他们的结果，使他们的论文能上一个台阶．

由于本人知识的局限性和水平的限制，本书存在许多不足之处，例如作为现代数学的一个重点——现代微分方程理论没有能涉及到，因此本书只是抛砖引玉，希望更多的专家关心工科研究生的教材建设，有更好的工科研究生教材问世，以使我国的研究生教育上一个新的台阶．

教材的出版得到了上海市教育局研究生教材基金的资助，没有他们的资助，本书的出版也没有可能．这里向他们表示衷心的感谢．在本书出版过程中，审稿的姜健飞同志进行了认真的审阅，修正了不少问题和补充了不少内容，另外编辑同志也做了非常仔细的工作，这里也对他们的辛勤劳动一并表示感谢．

著者：李绍宽

2000 年 8 月

目　　录

第一章 集合论

集合论是现代数学的基础.这一章我们就集合论中几个主要问题进行讨论,内容包括集合的运算、映像、序关系、等价关系及近来数学的热点——模糊集和模糊关系.

一、集合论的基本概念

1. 集合

集合是现代数学的基本概念和研究对象.什么是集合呢?集合是能够区分的对象构成的总体,这些对象称为这个集合的元素,用 $a \in A$ 表示对象 a 是集合 A 的元素,而 $a \overline{\in} A$ 表示 a 不是 A 的元素.

集合的表示方法主要有两种:一种是把组成集合 A 的所有元素罗列在一个花括号内,例如 $A = \{1,2,3,4,5\}$,$B = \{a,a^2,a^3,a^4\}$ 等等.另一种是用区分这个集合中元素的特征来表示,例如 $A = \{x | x^2 - x - 2 = 0\}$,$B = \{x | a \leqslant x \leqslant b\}$ 等等.

不含任何对象的集合称为空集,记为$\varnothing$;自然数全体构成的集合称为自然数集,记为 $\mathbf{N}$;整数全体构成的集合称为整数集,记为 $\mathbf{Z}$;有理数全体构成的集合称为有理数集,记为 $\mathbf{Q}$;实数全体构成的集合称为实数集,记为 $\mathbf{R}$.

2. 集合的运算

两个集合 A,B 之间有下面的关系和运算:

(1) A 是 B 的子集,指 A 中每个元素都是 B 中的元素,即 $x \in A$ 必有 $x \in B$,这时记为 $A \subset B$.

若 $A \subset B$,又有 $B \subset A$,则称 A 与 B 相等,记为 $A = B$.而当 $A \subset B$,且$A \neq B$ 时,称 A 为 B 的真子集.

(2) A 与 B 的并集是由 A 和 B 中的元素构成的集合,记为 $A \cup$

B，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad 或\ x \in B\}$$

A 与 B 的交集是由 A 和 B 中公共的元素构成的集合，记为 $A \cap B$，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \quad 且\ x \in B\}$$

对一族集合 $A_\alpha(\alpha \in \Lambda)$ 也可以取并与交，即

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x \mid 存在\ \alpha \in \Lambda,\ x \in A_\alpha\}$$

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x \mid 对一切\ \alpha \in \Lambda,\ x \in A_\alpha\}$$

(3) 集合 A 与集合 B 的差是由属于 A 而不属于 B 的元素构成，记为 $A \backslash B$，即

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \quad 且\ x \overline{\in} B\}$$

集合 A 与集合 B 的对称差定义为

$$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

若我们考虑的集合都是一个特定集合 E 的子集的时候，集合 E 减去集合 A 的差称为集合 A 的余集，记为 A^C.

(4) 对一列集合 $A_n(n=1,2,3,\cdots)$，由属于无限个 A_n 的元素组成的集合称为 $\{A_n\}$ 的上极限，记为 $\overline{\lim} A_n$，而由除有限个 A_n 外的公共的元素组成的集合称为 $\{A_n\}$ 的下极限，记为 $\underline{\lim} A_n$，即

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \right)$$

$$\underline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \right)$$

当 $\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n$ 时，称 $\{A_n\}$ 有极限，记这个相同的集合为 $\lim A_n$. 易知 $\underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n$.

例如对 $A_n = \begin{cases} [0,1], n = 2k-1 \\ \left[\frac{1}{2}, 2\right], n = 2k \end{cases}$，$\overline{\lim} A_n = [0,2]$，$\underline{\lim} A_n =$

$\left[\frac{1}{2},1\right]$.

又如对 $A_n = \left[0,1+\frac{1}{n}\right]$, $\overline{\lim}A_n = \underline{\lim}A_n = [0,1]$, 从而 $\lim A_n = [0,1]$.

(5) 集合相等的证明. 证明两个集合相等是集合论中常见的问题,要证 $A = B$, 就是证 $A \subset B$ 且 $B \subset A$. 作为例子,我们证明关于交、并的对偶公式——De Morgan 公式.

命题 1.1 设 $\{A_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 是集合 E 的一族子集,则

$$(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^C = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha{}^C$$

$$(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha{}^C) = (\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^C$$

特别对一列子集 A_n 成立

$$\overline{\lim}A_n{}^C = (\underline{\lim}A_n)^C$$

$$\underline{\lim}A_n{}^C = (\overline{\lim}A_n)^C$$

证 我们只证第一个等式,其余留作练习.

若 $x \in (\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^C$, 即 $x \overline{\in} \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$, 从而对一切 α, $x \overline{\in} A_\alpha$,即对一切 α,$x \in A_\alpha{}^C$, 从而 $x \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha{}^C$.

反之,若 $x \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha{}^C$, 则对一切 α, $x \in A_\alpha{}^C$, 从而对一切 α, $x \overline{\in} A_\alpha$, 即 $x \overline{\in} \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$, 从而 $x \in (\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^C$.

(6) 集合的笛卡尔乘积. 对两个集合 A,B,记集合

$$A \times B = \{(x,y) | x \in A,\ y \in B\}$$

称为 A 与 B 的直积,也称为 A 与 B 的笛卡尔乘积. 对 n 个集合 A_1, A_2,$\cdots$,A_n,也可定义它们的直积

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n) | x_1 \in A_1,$$
$$x_2 \in A_2,\cdots,x_n \in A_n\}$$

例如 n 个实数集 $\mathbf{R}$ 的直积记为 $\mathbf{R}^n$. 对一族集合 $A_\alpha(\alpha\in\Lambda)$也可定义它们的直积

$$\prod_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=\{(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\mid \text{对一切 } \alpha\in\Lambda, x_\alpha\in A_\alpha\}$$

3. 映像

集合与集合之间的关系是通过它们之间的映像来实现的. 而映像是通常函数概念的推广.

设 X,Y 是两个集合,若对每一个 x,通过规则 f,有唯一的 $y\in Y$ 与 x 相对应,则记 $y=f(x)$, f 称为从 X 到 Y 的映像,X 称为 f 的定义域, $\{f(x)\mid x\in X\}$ 称为 f 的像,记为 $f(X)$,或 $\mathrm{Im}(f)$. 而 $\{(x,f(x))\mid x\in X\}\subset X\times Y$ 称为 f 的图像,记为 $G(f)$.

若 f 为 X 到 Y 的映像,对 $A\subset X$, $B\subset Y$, 我们记

$$f(A)=\{f(x)\mid \quad x\in A\}$$
$$f^{-1}(B)=\{x\mid x\in X, f(x)\in B\}$$

分别称 $f(A)$为 A 的像,$f^{-1}(B)$为 B 的原像.

当 $\mathrm{Im}(f)=f(X)=Y$ 时, 称 f 为 X 到 Y 上的映像,而当 $x\neq y$ 时必有 $f(x)\neq f(y)$ 时, 称 f 为一一映像.

关于集合在映像 f 下有如下关系.

命题 1.2 设 f 为 X 到 Y 的映像, $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为 X 中一族子集, $\{B_\beta\}_{\beta\in\Sigma}$为 Y 中一族子集,则

$$f(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)\subset\bigcap_{\alpha\in\Lambda}f(A_\alpha)$$
$$f(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}f(A_\alpha)$$
$$f^{-1}(\bigcap_{\beta\in\Sigma}B_\beta)=\bigcap_{\beta\in\Sigma}f^{-1}(B_\beta)$$
$$f^{-1}(\bigcup_{\beta\in\Sigma}B_\beta)=\bigcup_{\beta\in\Sigma}f^{-1}(B_\beta)$$

证 我们证第二、第三个等式,其余留作练习.

若 $y\in f(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)$, 则存在 $x\in\bigcup_{\alpha}A_\alpha, y=f(x)$,即存在 $\alpha, x\in A_\alpha, y=f(x)$,从而 $y=f(x)\in f(A_\alpha)$,即有 $y\in\bigcup_{\alpha\in\Lambda}f(A_\alpha)$. 反之

亦然.

若 $x \in f^{-1}(\bigcap_{\beta\in\Sigma} B_\beta)$，则 $f(x) \in \bigcap_{\beta\in\Sigma} B_\beta$，从而对一切 $\beta \in \Sigma$，$f(x) \in B_\beta$，故 $x \in f^{-1}(B_\beta)$，即 $x \in \bigcap_{\beta\in\Sigma} f^{-1}(B_\beta)$. 反之亦然.

注意第一个关系式中，一般等式不成立，例如 f 为把整个 X 变为 $y_0 \in Y$，$A, B \subset X$，而 $A \cap B = \varnothing$，则

$$f(A \cap B) = \varnothing$$

$$f(A) \cap f(B) = \{y_0\}$$

显然当 f 为一对一映像时，等号成立.

集合 A 到数集 $\mathbf{R}$ 的映像称为函数，设 A 为一个特定集合 E 的子集，相对 A，定义 E 上一个函数

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in A^C \end{cases}$$

称函数 $\chi_A(\cdot)$ 为 A 的特征函数.

E 的两个子集 A, B，$A = B$ 的充要条件是 $\chi_A = \chi_B$. 而 $A \subset B$ 的充要条件为 $\chi_A \leqslant \chi_B$，即对一切 $x \in E$，$\chi_A(x) \leqslant \chi_B(x)$.

集合的运算与特征函数之间有如下关系

$$\chi_{A\cup B}(x) = \max(\chi_A(x),\ \chi_B(x))$$

$$\chi_{A\cap B}(x) = \min(\chi_A(x),\ \chi_B(x))$$

$$\chi_{A^C}(x) = 1 - \chi_A(x)$$

$$\chi_{A\times B}(x, y) = \chi_A(x)\chi_B(y)$$

$$\chi_{\overline{\lim} A_n}(x) = \overline{\lim}\chi_{A_n}(x)$$

$$\chi_{\underline{\lim} A_n}(x) = \underline{\lim}\chi_{A_n}(x)$$

这些关系的证明留作练习. 集合与特征函数之间建立的对应关系是我们后面发展模糊集合理论的出发点，具体见后面模糊集合的内容.

二、关系与等价关系

1. 等价关系

等价关系是“相等”、“相同”概念的推广. 它表示集合中元素之间的某种联系.

一个集合 X,我们称 R 是定义在 X 上一个等价关系,是指对于 X 中某些元素对 x,y 之间有联系 R,记为 $x\mathrm{R}y$,而且满足:

(1) 对一切 $x \in X, x\mathrm{R}x$ (自反性);

(2) 若 $x\mathrm{R}y$,则 $y\mathrm{R}x$ (对称性);

(3) 若 $x\mathrm{R}y$, $y\mathrm{R}z$,则 $x\mathrm{R}z$ (传递性).

我们经常用~、≈来表示等价关系. 一个集合 X 上一个等价关系与 X 的一个分类密切联系着.

设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为 X 的一个子集族,若它满足:

(1) $X = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$;

(2) 若 $\alpha \neq \beta$,则 $X_\alpha \cap X_\beta = \varnothing$;

(3) 对一切 α, $X_\alpha \neq \varnothing$.

则称 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为 X 的一个分划,这相当于 X 中元素分成若干类.

命题 1.3 集合 X 上一个等价关系,对应 X 的分划 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$,而 $x\mathrm{R}y$ 当且仅当存在 α, $x,y \in X_\alpha$. 反之 X 的每一个分划 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$,也对应存在 X 上的一个等价关系 R,使 $x\mathrm{R}y$ 当且仅当 x,y 属于同一个 X_α.

证明 对 $x \in X$,记$[x] = \{y \mid y \in X, y\mathrm{R}x\}$,称$[x]$为由 x 决定的等价类. 由等价关系的三个条件易知这些等价类集合或者不交,或者相等,因此它们正好构成了 X 的一个分划. 反之对 X 的一个分划 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$,我们定义 $x\mathrm{R}y$ 是指存在 α, $x,y \in X_\alpha$. 显然 R 正好就是 X 上一个等价关系.

我们将等价关系 R 对应的等价类分划$\{X_\alpha\}$称为 X 相对于等价关系 R 的商集,记为 X/R. 即

$$X/\mathrm{R} = \{[x] | x \in X\}$$

例如在整数集 $\mathbf{Z}$ 中,对 $a,b \in \mathbf{Z}$,若 $a-b$ 能被 3 整除,称为 $a \sim b$, 这就是一个等价关系,我们记 $a \sim b$ 为

$$a \equiv b \pmod 3$$

而 $\mathbf{Z}/\sim$是由三个等价类$[0],[1],[2]$组成,记为 $\mathbf{Z}_3$,它称为模为 3 的剩余类环.

设 f 为集合 X 到 Y 上一个映像, $x,y \in X$,当 $f(x)=f(y)$ 时,我们称 $x \sim y$, 易知这也是一个等价关系,这时对 $x \in X$,x 的等价类 $[x] = \{y | y \in X, f(y) = f(x)\} = f^{-1}(f(x))$, 而 $X/\sim = \{f^{-1}(y) | y \in Y\}$. 这里 $f^{-1}(y) = \{x \in X | f(x) = y\}$.

对集合 X 上一个等价关系$\sim$,可以定义 X 到 $X/\sim$上一个映像 π: $\pi(x) = [x]$. 称 π 为 X 到 $X/\sim$的自然映像.

2. 偏序关系

与等价关系相类似,对数的大小关系的推广得集合上偏序关系,也称为半序关系. 集合 X 上,我们称 R 是一个偏序关系,指对 X 中某些元素 x,y 有关系 R,记 $x\mathrm{R}y$,它满足:

(1) 对一切 $x \in X$, $x\mathrm{R}x$ (自反性);

(2) 若 $x\mathrm{R}y, y\mathrm{R}x$,则 $x = y$ (反对称性);

(3) 若 $x\mathrm{R}y, y\mathrm{R}z$,则 $x\mathrm{R}z$ (传递性).

偏序关系经常用$<$,$\leqslant$来表示.

赋有一个偏序关系$\leqslant$的集合称为偏序集. 设 X 是一个偏序集, $A \subset X$ 称为一个全序子集,若对一切 $x,y \in A$,总有 $x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$ 成立. 若 X 本身是全序的,则称 X 为全序集. 若 $A \subset X$,$a \in X$,而对一切 $x \in A$,总有 $x \leqslant a$,则称 a 为 A 的上界. 若 a 为 A 的上界,且对 A 的一切上界 b,总有 $a \leqslant b$,则称 a 为 A 的上确界,记 A 的上确界为 $\sup A$, 对下界及下确界 $\inf A$ 有类似的定义.

例如实数集 $\mathbf{R}$ 中,$\leqslant$是通常的小于等于,则 $\mathbf{R}$ 成为一个全序子集. 在 $\mathbf{R}$ 中,每个有上(下)界的 A 一定有上(下)确界 $\sup A(\inf A)$,这是实数的连续性的特征.

又如 X 为一个非空集合，X 的一切子集全体构成一个集合 $\mathscr{P}(x)$，$A,B\in\mathscr{P}(x)$，$A\leqslant B$ 表示关系 $A\subset B$，则 $\mathscr{P}(x)$ 成为一个偏序集. 而 $\mathscr{P}(x)$ 中每个集合都有上确界、下确界，其中 $\sup A=\bigcup\limits_{x\in A}x$，$\inf A=\bigcap\limits_{x\in A}x$.

与偏序集有关的，在分析中非常有用的是 Zorn 引理，它是集合论中的一个公理，是数学归纳法的推广.

Zorn 引理，设 X 是一个偏序集，若它的每个全序子集都有上界，则对每个 $a\in X$，必存在一个极大元 $m_a\geqslant a$.

这里 $m\in X$ 称为极大元，指对一切 $x\in X$，若 $x\geqslant m$，则必有 $x=m$. 下面我们举几个用 Zorn 引理来证明问题的例子.

当一个全序集 X 的每个非空子集都有最小元时，称之为一个良序集.

这里 a 是 A 的最小元，指对一切 $x\in A$，成立 $a\leqslant x$. 例如自然数全体 $\mathbf{N}$ 是一个良序集，而实数全体 $\mathbf{R}$ 不是良序的（这里的序是通常的小于等于关系）. 下面我们利用 Zorn 引理来证明良序定理.

命题 1.4 对任何一个非空集合 X，一定存在 X 上一个偏序关系 $\leqslant$，使它成为一个良序集.

证 设 $\mathscr{P}$ 表示 X 的所有良序子集 $(A,\leqslant)$，即 $A\subset X$，而且 A 上定义了一个偏序 $\leqslant$，使 A 成为一个良序集.

显然 $\mathscr{P}$ 是非空的. 因为 X 的每个有限子集，可以用排列的方法赋予一个偏序，使之成为一个良序集.

在 $\mathscr{P}$ 中定义偏序 $(A_1,\leqslant_1)\leqslant(A_2,\leqslant_2)$ 是指它们满足 $A_1\subset A_2$，而且 $\leqslant_2$ 在 A_1 上与 $\leqslant_1$ 相同，而对一切 $x\in A_2\backslash A_1$，$y\in A_1$，成立 $y\leqslant_2 x$. 这时，$\mathscr{P}$ 成为一个偏序集.

若 $\{(A_\alpha,\leqslant_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为 $\mathscr{P}$ 中一个全序集，记 $A_0=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$，$a,b\in A_0$，则存在 α，$a,b\in A_\alpha$，必有 $a\leqslant_\alpha b$ 或 $b\leqslant_\alpha a$，这时定义 $a\leqslant_0 b$ 或 $b\leqslant_0 a$，这样 A_0 成为一个全序集，而且它是一个良序集. 事实上，若 B 为 A_0 的非空子集，则存在 α_0，$B\cap A_{\alpha_0}\neq\varnothing$，从而 $B\cap A_0$ 在 A_0 中有最小元 x_0. 当 $x\in B\cap A_{\alpha_0}$ 时，当然有 $x\geqslant x_0$，当 $x\in B\backslash A_{\alpha_0}$，则 $x\in A_\alpha$，

而且 $A_\alpha \geqslant A_{\alpha_0}$，从而 $x \geqslant x_0$，即 x_0 为 B 的最小元. 这样 $(A_0, \leqslant_0)$ 是 $\{(A_\alpha, \leqslant_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的上界，由 Zorn 引理，$\mathscr{P}$ 中必有极大元 $(A,\leqslant)$.

若 $A \neq X$，则存在 $x_0 \in X\backslash A$，定义 $A_1 = A \cup \{x_0\} \supset A$. 而在 A_1 中定义偏序关系如下：A 中元素保持原来偏序关系，而对一切 $x \in A$，规定 $x \leqslant x_0$，则 A_1 也成为一个良序集. 这时 $A_1 \geqslant A$，而 $A_1 \neq A$，这和 A 为极大元矛盾，从而 $A = X$，即 $(X, \leqslant)$ 成为一个良序集.

命题 1.5 设 A,B 为两个集合，则下面两个至少有一个成立：存在 A 到 B 中的一对一映像或存在 B 到 A 中的一对一映像.

证明 设 $\mathscr{P}$ 表示由 A 的子集 A_α 到 B 的子集 B_α 上的一对一映像 φ_α 全体组成的集合 $\{(A_\alpha,B_\alpha,\varphi_\alpha) \mid A_\alpha \subset A, B_\alpha \subset B, \varphi_\alpha\text{：} A_\alpha$ 到 B_α 上的一对一映像$\}$.

在 $\mathscr{P}$ 中定义 $(A_1,B_1,\varphi_1) \leqslant (A_2,B_2,\varphi_2)$ 是指 $A_1 \subset A_2$，且 $x \in A_1$ 时，$\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$，则 $\mathscr{P}$ 成为一个偏序集.

设 $\{(A_\alpha,B_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为 $\mathscr{P}$ 的一个全序子集，取 $A_0 = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$，$B_0 = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha$，对 $x \in A_0$，存在 α，使 $x \in A_\alpha$，定义 $\varphi(x) = \varphi_\alpha(x)$，则 φ 为 A_0 到 B_0 上的一对一映像，且 (A_0,B_0,φ) 为 $\{(A_\alpha,B_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的上界，从而 $\mathscr{P}$ 一定有极大元 (A_0,B_0,φ_0).

若 $A_0 \neq A$，$B_0 \neq B$，则存在 $x_1 \in A\backslash A_0$，$y_1 \in B\backslash B_0$. 取 $A_1 = A_0 \cup \{x_1\}$，$B_1 = B_0 \cup \{y_1\}$，定义 $\varphi_1(x) = \varphi(x)$；若 $x \in A_0$，而 $\varphi_1(x_1) = y_1$，则 φ_1 为 A_1 到 B_1 上的一对一映像. 这样导出 $(A_1,B_1,\varphi_1) \geqslant (A_0,B_0,\varphi_0)$，而 $(A_1,B_1,\varphi_1) \neq (A_0,B_0,\varphi_0)$，这与 (A_0,B_0,φ_0) 是极大元矛盾，从而必有 $A_0 = A$ 或 $B_0 = B$. 若 $A_0 = A$，则存在 A 到 B 的一对一映像 φ_0，若 $B_0 = B$，则存在 B 到 A 的一对一映像 φ_0^{-1}.

3. 关系

前面对集合讨论了等价关系和偏序关系，可以看出，它们主要对元素之间赋予一种特殊的联系. 这样我们可以讨论集合 X 与集合 Y 上的关系 R：我们说定义了集合 X 与集合 Y 之间一个关系 R，就是指给定了 $X \times Y$ 的一个特定子集 R，当 $(x,y) \in \mathrm{R}$ 时，我们称 x 与 y 有关系 R，记为 $x\mathrm{R}y$.

对于一般关系 R,有如下两种常用的运算:

(1) 逆关系 $\mathrm{R}^{-1}=\{(y,x)\mid(x,y)\in\mathrm{R}\}$.

(2) 若 R_1 为 X 与 Y 之间的关系,而 R_2 为 Y 与 Z 之间的关系,则 $\mathrm{R}_1\circ\mathrm{R}_2=\{(x,z)\mid$ 存在 $y\in Y,(x,y)\in\mathrm{R}_1,(y,z)\in\mathrm{R}_2\}$ 称为 R_1 与 R_2 的复合关系.

对于 X 上关系,即 X 与 X 之间的关系,有一个相等关系 $\Delta=\{(x,x)\mid x\in X\}$, 当 X 上关系 R,满足

$$\mathrm{R}\supset\Delta$$

时称 R 具有自反性,满足

$$\mathrm{R}=\mathrm{R}^{-1}$$

时称 R 具有对称性,满足

$$\mathrm{R}\cap\mathrm{R}^{-1}=\Delta$$

时称 R 具有反对称性,满足

$$\mathrm{R}\circ\mathrm{R}\subset\mathrm{R}$$

时称 R 具有传递性.

这样 X 与 Y 的关系就等同于 $X\times Y$ 的一个子集.

三、一一对应与集合的势

1. 势

势是集合论的一个基本概念,它是集合中含有元素的个数的概念.

两个集合 A,B 称为等势的,是指存在 A 到 B 上的一一映像,这时记 $A\sim B$.

显然,等势是一个等价关系,等势的两个集称它们有相同的势,A 的势记为 $\overline{A}$.

与 $\mathbf{N}_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 等势的集的势定义为 n. 若 $\overline{A}=n$, 即 A 中

含有 n 个元素，这种集称为有限集.

与自然数集 $\mathbf{N}$ 等势的势记为 c_0，而势等于 c_0 的集称为可列集，可列集是元素能排列起来的无限集. 任何一个无限集一定含有一个可列子集. 从这个意义上讲，可列势是最小的无限势.

与实数集$[0,1]$等势的势记为 c，而势等于 c 的集称为连续集.

2. 势的比较

在集合的势之间定义了一个序关系，当 A 与 B 的一个子集等势时，我们称 A 的势小于等于 B 的势，记为 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$. 下面我们要说明在这个序关系下，集合的势是一个全序集.

命题 1.6 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$, $\overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A}}$，则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

证明 设 $A \sim B_1 \subset B, B \sim A_1 \subset A$, B_1, A_1 分别为 B, A 的子集，经 B 到 A_1 的一一映像，B_1 也映为 A_1 的子集 A_2 上去，因此有

$$A \supset A_1 \supset A_2, \quad A \sim B_1 \sim A_2$$

当 A 一一映像到 A_2 上，A_1 将被映为 A_3，A_2 将被映为 $A_4 \cdots$，即有

$$A \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4 \supset \cdots$$

而 φ: $A \to A_2$ 时，$A_1 \to A_3, A_3 \to A_5, \cdots; A_2 \to A_4, \cdots$. 设 $D = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots$，则有

$$A = D \cup (A \backslash A_1) \cup (A_1 \backslash A_2) \cup \cdots$$
$$A_1 = D \cup (A_1 \backslash A_2) \cup (A_2 \backslash A_3) \cup \cdots$$

而 φ: $A \backslash A_1 \to A_1 \backslash A_2, A_1 \backslash A_2 \to A_2 \backslash A_3, \cdots, D \to D$ 存在不变的恒等映像，从而导出 $A \sim A_1$. 因此 $A \sim B$.

注：这是用来证明两个集合等势的基本方法. 例如 $\mathbf{R} \sim [0,1]$，事实上 $y = \tan\left(x - \frac{1}{2}\right)\pi$ 把$(-\infty, +\infty)$一对一地映为$(0,1) \subset [0,1]$，而 $y = x$ 把$[0,1]$变为$[0,1] \subset \mathbf{R}$，从而 $\overline{\overline{\mathbf{R}}} = \overline{\overline{[0,1]}}$.

命题 1.7 对两个集合 A, B, $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ 与 $\overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A}}$ 至少有一个成立.

证明 由上节我们对 A, B，或存在一个 A 到 B 的一一映像，或

存在 B 到 A 的一一映像，因此或者 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$，或者 $\overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A}}$.

因此对两个集合 A,B，下面三者有且仅有一个成立

$$\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}, \quad \overline{\overline{B}} < \overline{\overline{A}}, \quad \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$$

这里 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ 是指 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ 而 $\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{B}}$. 从而势全体构成一个全序集.

3. 势的运算

对应集合的运算，我们可以定义势的运算. 有关势的运算，有许多特殊的性质.

设 A 的势为 α，B 的势为 β. 而 $A \cap B = \varnothing$，我们定义 $A \cup B$ 的势为 $\alpha + \beta$，及 $A \times B$ 的势为 $\alpha\beta$.

这些可推广到一般的和与积上去，且

$$\sum_{i \in \Lambda} \beta_i = \beta \cdot \alpha$$

这里 $\beta_i \equiv \beta$, $\overline{\overline{\Lambda}} = \alpha$.

集合 A 到 B 的映像全体构成的集合称为 B 的 A 幂，记为 B^A. 当 $B = \{0,1\}$ 时，B^A 表示 A 的子集的特征函数全体，它正好为 $\mathscr{P}(A)$.

若 $\overline{\overline{A}} = \alpha$、$\overline{\overline{B}} = \beta$，定义 $\overline{\overline{B^A}} = \beta^\alpha$，特别 $\overline{\overline{\mathscr{P}(A)}} = 2^\alpha$.

同样有

$$\prod_{i \in \Lambda} \alpha_i = \alpha^\beta$$

这里 $\alpha_i \equiv \alpha$, $\overline{\overline{\Lambda}} = \beta$.

关于势的运算，有许多重要公式，例如：

(1) $\mathbf{c}_0{}^n = \mathbf{c}_0$

(2) $\mathbf{c}^n = \mathbf{c}$

(3) $\mathbf{c}^{\mathbf{c}_0} = \mathbf{c}$

(4) $2^{\mathbf{c}_0} = \mathbf{c}$

这里我们仅讨论其中的一个.

命题 1.8 $2^{\mathbf{c}_0} = \mathbf{c}$.

证明 [0,1]中每个实数可以唯一地表示为无限 2 进制小数形式