

794162

511

4900

ENVIRONMENTAL HYDRAULICS

环境水力学

赵 文 谦



成 都 科 技 大 学 出 版 社

Cheng Du Ke Ji Da Xue Chu Ban She

511
—
4900

环 境 水 力 学

赵 文 谦

成都科技大学出版社

内 容 提 要

环境水力学的任务是研究污染物在水体(河流、湖泊、水库等)中的扩散输移规律及其应用。本书着重于系统地阐述物质在水体中扩散输移的基本概念、基本理论,注意介绍和讨论与生产实际有关的应用问题,并附有许多计算实例。全书共分八章:绪论;分子扩散;紊动扩散;剪切流的离散;污染物在河流中的扩散与混合;射流、羽流及浮射流;水质与河流的水质模拟;水库中的混合与水质模拟。

本书在内容选取上兼顾了教材和专著两方面的特点,系统性强,物理概念论述清楚,可作大专院校有关专业师生、研究生以及科技与工程技术人员教材和参考书。

环 境 水 力 学

赵文谦 编著

责任编辑 孙康江

成都科技大学出版社出版

四川省新华书店发行

成都科技大学印刷厂印刷

开本787×1092 1/16 印张12.5

1986年12月第1版 1986年12月第1次印刷

印数5000册 字数288千字

统一书号: 15475·9 定价: 3.05元

前言

本书着重于系统地阐述环境水力学的基本概念、基本原理和基本分析方法，并注意了理论联系实际、叙述简明扼要、文字通俗易懂。为了使对概率统计尚不够熟悉的读者学习方便，在第三章研究紊动扩散时，对统计数学的有关基础知识作了适当介绍。

环境水力学是形成和建立不久的一门崭新的分支学科，它的研究范围至今尚无确定的模式。本书是把它作为环境中水动力学这一理解来安排内容的，所以基本上不涉及水质中的生物化学过程。虽然第七章初步讨论了河流的水质模型，但对有关的生物化学方面也没有展开讨论。

为了满足对某些专门问题有兴趣作深入研究的读者需要，书中除分章列出了直接引用过的文献之外，还列出了一些其他重要参考文献。

本书的初稿曾作过成都科技大学水利系本科生、研究生的环境水力学讲义，也曾为国家教委工科基础课力学课程指导委员会举办的暑期教师讲习班作过专题讲座的讲义，经过几次修改才成了现在出版的稿子。

万事开头难。在一个正在蓬勃发展、不够成熟的新领域写一本书，颇有艰难之处。加之作者才疏学浅，成稿仓促，书中谬误在所难免，殷切希望同行专家和读者多予指正。

本书可供土木工程系、水利工程系及环境工程系的大学生、研究生、教师和从事水环境工作的工程技术人员、环境科学工作者参考。

作者 一九八六年八月于成都

目 录

第一章 绪 论

§1-1 环境水力学的任务以及与其他学科的关系.....	(1)
§1-2 浓度, 稀释度, 密度与密度分层水体.....	(2)
§1-3 物质在水体内迁移的主要方式.....	(4)

第二章 分 子 扩 散

§2-1 物质的传递与扩散现象.....	(6)
§2-2 分子扩散的费克 (Fick) 定律.....	(6)
§2-3 扩散方程——费克第二定律.....	(7)
§2-4 瞬时平面源的一维扩散.....	(9)
§2-5 瞬时点源在二维及三维空间的扩散.....	(13)
§2-6 瞬时分布源的扩散.....	(14)
§2-7 时间连续源的扩散.....	(18)
§2-8 有边界反射情况下的扩散.....	(21)
§2-9 用随机游动 (Random Walk) 来分析分子扩散现象.....	(22)
§2-10 移流扩散.....	(25)

第三章 紊 动 扩 散

§3-1 紊流的时间平均与统计平均.....	(29)
§3-2 数学期望、方差、相关与相关系数.....	(29)
§3-3 紊动扩散的泰勒理论——拉格朗日法.....	(32)
§3-4 紊动扩散的欧拉法.....	(34)

第四章 剪 切 流 的 离 散

§4-1 剪切流的离散方程.....	(43)
§4-2 圆断面管流中的离散.....	(45)
§4-3 二维明渠中的离散.....	(50)

第五章 污染物质在河流中的扩散与混合

§5-1 概述.....	(55)
--------------	--------

§5-2	河流中的紊动扩散	(56)
§5-3	污染带计算	(61)
§5-4	用累积流量坐标计算天然河流中二维扩散	(67)
§5-5	河流中的纵向离散	(70)

第六章 射流、羽流及浮射流

§6-1	概述	(84)
§6-2	平面淹没紊动射流	(85)
§6-3	圆形淹没紊动射流	(91)
§6-4	静止液体中的浮力羽流	(96)
§6-5	静止均质(无密度分层)及线性密度分层环境中的圆形浮射流	(108)
§6-6	静止均质(无密度分层)及线性密度分层环境中的二维(长方孔)浮射流	(122)
§6-7	横流中的紊动射流	(129)

第七章 水质与河流的水质模拟

§7-1	水体污染与水质	(138)
§7-2	水体中氧气的消耗与恢复	(140)
§7-3	水质模型的基本概念	(142)
§7-4	河流溶解氧(一维)模型	(143)
§7-5	河流一维温度模型	(151)

第八章 水库中的混合与水质模拟

§8-1	概述	(156)
§8-2	水库的温度分层与密度分层	(156)
§8-3	影响水库混合的主要因素	(161)
§8-4	水库一维温度模型	(163)

附 录

附录1	误差函数表	(171)
附录2	静止均质环境中圆形浮射流数值解曲线	(172)
附录3	静止线性密度分层环境中圆形浮射流数值解曲线	(177)
附录4	静止均质环境中二维浮射流数值解曲线	(180)
附录5	静止线性密度分层环境中二维浮射流数值解曲线	(185)
附录6	生活饮用水水质标准	(188)

附录 7	地面水环境质量标准.....	(189)
附录 8	农田灌溉水质标准.....	(190)
附录 9	渔业水域水质标准.....	(192)

第一章 绪 论

§ 1—1 环境水力学 的任务以及与其他学科的关系

环境水力学是形成和建立不久的一门水力学的分支学科,它的主要任务是研究污染物质在水体中的扩散输移规律及其应用。

环境的污染与环境保护是当今世界所面临的严重问题之一。所谓环境,一般是指大气环境、水环境和生态环境,而三者之间又保持着密切联系。由于工业的发展,人类居住的相对集中,大量有害于人类和其他生物的工业废物(废气、废水、废渣)和生活污水、农业废水排入河流、湖泊、水库与海湾,使天然水体受到严重的污染。污染物质通过在水体中溶解扩散以及随水流的输移而扩大影响范围。为了保护环境,防止污染的危害,必须了解这些污染物质的扩散输移规律。环境水力学正是在这样的背景下逐渐形成和发展起来的,所以有人把环境水力学又叫做污染水力学,它是环境科学与水力学相结合、相互渗透的产物。

因为环境水力学是一门比较年青而且发展相当活跃的学科,其内容的广度和深度都在不断扩充,同时由于对某些问题研究不够成熟,和许多历史悠久的学科相比,它还没有非常成熟和明确的范围。但是,环境水力学的理论基础在很多方面和水力学是一致的。

研究环境污染问题,人们最关心的是污染物浓度在空间的分布。一般说来,污染危害程度取决于污染物浓度。当然有时也要注意它的总量问题。环境水力学的主要目标,就是要探求当污染物投放于水体后,由于扩散、输移所造成的污染物浓度随空间和时间的变化关系。

污染物浓度在水体内的分布状况,是进行水质评价的基本依据。过去一个时期,人们在研究水资源的利用和开发时,多着眼于对水的数量作出预测和规划。可是在当今的历史条件下,如果仍然仅仅注意对水量作出预报和规划,那就显然不可能达到预期的目的。因为要把水作为资源,不仅有数量的要求,同时也有质量的要求。所以,水质预报、水质规划与水资源保护这类课题不仅是环境科学工作者同时也是今天水利科技工作者、水利工程师们所面临的重大问题。而环境水力学的研究成果将会在水质评价、水质预报、水质规划与管理以及水资源保护等方面得到广泛的应用。我国水资源若按人口平均计算并不丰富,平均每人所拥有的径流量约为2700立方米,居世界各国第85位。因此,保护和防止水体不受污染具有十分重要的意义。

需要指出的是,作为水质评价与预报,不但要考虑到污染物质在水体内因扩散、输移而引起的传播,也要对水体本身所具有的自净能力作出估计。这就是说,水体既有受污染的不利方面,又存在与此同时发生的因物理、化学、生物等因素而使污染物质逐渐衰减的有利(即自净作用或称同化作用)方面。只有把这两方面的作用综合起来,才能对水质作出正确的预测。按照一般的概念,环境水力学主要研究示踪物质(Tracer)在

水体中的扩散与输移, 不考虑化学和生化因素而产生的转化和降解作用。有关化学和生化降解问题常常是水质学或水质动力学研究的重点。所谓“示踪物质”, 是指某一种在水体内扩散和输移时不发生化学和生化反应的物质, 并且它的存在不引起流场特性的改变。所以, 研究示踪物质的扩散输移规律, 是研究污染物质扩散输移问题的一种简化模型。

环境水力学的另一广泛应用领域是环境工程。例如设计排污建筑物时, 怎样正确选择排污口的位置和排污建筑物的型式与尺寸, 都要运用环境水力学的有关理论。凡是涉及有关防止、减弱水体污染的一切工程措施的规划、设计, 都必须熟悉和利用环境水力学的知识。

§ 1—2 浓度, 稀释度, 密度与密度分层水体

一、浓度

评价水环境质量时, 污染物在水中的浓度是一个最重要的指标。令 C 代表单位体积水中含有物的质量浓度, 在给定时刻某一点的浓度定义为:

$$C = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} \quad (1-1)$$

式中 ΔV 表示以被研究点为中心所取无限小水体的体积, ΔM 为 ΔV 体积内所含物质的质量。浓度 C 的量纲为 (ML^{-3}) , 实用单位为克/升或毫克/升。

在环境科学中常用 ppm (Parts per million) 和 ppb (Parts per billion) 来表示浓度。1公斤水中含有1毫克物质的浓度为 $1ppm$ 。 ppm 代表百万分之一的意思, 因为1公斤=1百万(即 10^6)毫克。1公斤水中含有1微克物质的浓度为 $1ppb$ 。 ppb 代表十亿分之一的意思, 因为1公斤=10亿(即 10^9)微克。

众所周知, 向水体中排放超标准的热量(如火电站或核电站排放的废热水)也属于对水环境的污染。一座100万瓩火电站大约需要冷却水 $35 \sim 40 m^3/sec$, 同样大小的核电站需要冷却水 $60 \sim 70 m^3/sec$ 。水体接纳过多的热量后, 水温过量增高, 使鱼类和其他水生物的生态环境受到严重破坏。热污染浓度 C_h 是代表单位体积水中所含的热量。由物理学可知

$$C_h = \rho C_p T \quad (1-2)$$

式中 ρ 为水的密度, C_p 为压力不变情况下水的比热, T 为水温。当压力和温度变化范围不大时, 水的密度和比热相对变化很小, 所以热量浓度 C_h 取决于水温 T 。可见, 水温值的大小, 即是热污染浓度的标志。

一般而言, 水体中含有物的浓度是时间和空间坐标的函数, 即

$$C = C(x, y, z, t) \quad (1-3)$$

在紊动水体内, 不仅水流参数随时间而脉动, 浓度值也具有脉动特性, 因而也需要研究它的时间平均值。为了从不同意义反映水体中污染物质浓度的平均情况, 常使用各种“平均浓度”的概念, 习用的平均浓度有如下几种:

(1) 时间平均浓度

和描述水流运动要素的时间平均值类似, 时间平均浓度 $\bar{C}$ 定义为:

$$\bar{C}_t(x, y, z, t_0) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} C(x, y, z, t) dt \quad (1-4)$$

(2) 空间平均浓度

空间平均浓度 $\bar{C}_V$ 定义为:

$$\bar{C}_V(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{1}{V} \iiint_{\Delta V} C(x, y, z, t) dV \quad (1-5)$$

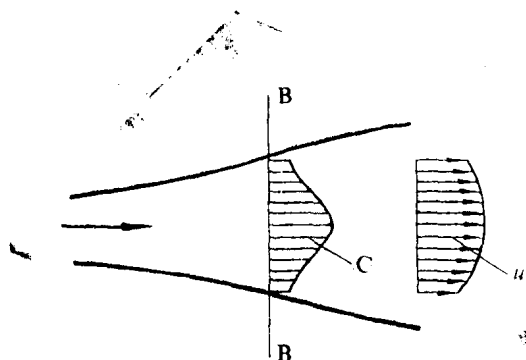


图1-1

(3) 流量平均浓度

如图1-1所示为含有某种物质之水流, 在某一过水断面B—B上, 其流速和浓度分布都是不均匀的, 设断面上任意点处的流速为 u , 相应的含有物浓度为 C , 通过该断面水流的流量为 Q , 则流量平均浓度 $\bar{C}_f$ 定义为:

$$\bar{C}_f = \frac{\int_A C u dA}{Q} \quad (1-6)$$

式中分子部分 $\int_A C u dA$ 为通过断面B—B的含有物流量(即单位时间通过的含有物质量)。

(4) 样品组合平均浓度

若在某污染水体内共取得 n 瓶水质样品, 各样品体积分别为 $V_1, V_2, \dots, V_n$; 其浓度分别为 $C_1, C_2, \dots, C_n$; 则样品组合平均浓度 C 定义为:

$$C = \frac{\sum_{i=1}^n V_i C_i}{\sum_{i=1}^n V_i} \quad (1-7)$$

二、稀释度与相对浓度

(1) 稀释度

稀释度也可作为反映纳污水体被污染程度的一种指标。稀释度 S 定义为:

$$S = \frac{\text{样品总体积}}{\text{样品中所含污水体积}} \quad (1-8)$$

若 $S=1$, 则表明污水未得到任何稀释; 若 $S=\infty$, 则样品中所含污水体积为零, 样品为纯净水体。

(2) 相对浓度

相对浓度是用样品中所含污水体积的相对比例来反映水体被污染程度的指标。相对浓度 P 定义为:

$$P = \frac{\text{样品中所含污水体积}}{\text{样品总体积}} \quad (1-9)$$

若 $P=1$, 说明污水未得到任何稀释; 若 $P=0$, 说明样品为纯净水体。从以上定义可知, 稀释度 S 和相对浓度 P 恰好互为倒数: $P = \frac{1}{S}$ (1-10)

三、背景浓度

在某些情况下, 接受水体中原已含有某种物质, 把接受水体原已含有某种物质的浓度称为背景浓度, 若以 C_s 代表背景浓度, 排入的污水所含物质的质量浓度以 C_d 来代表, 不难证明, 该物质最终在受纳水体中存在的实际浓度(质量浓度) C 为:

$$C = C_s + P(C_d - C_s) \quad (1-11)$$

实际存在的稀释度为:
$$S = \frac{C_d - C_s}{C - C_s} \quad (1-12)$$

四、密度与密度分层水体

环境水力学中有质量密度和重量密度两种提法。质量密度是指单位体积内所含质量, 以 ρ 表示, 这和一般水力学中的密度概念完全一致。所谓重量密度是指单位体积内所含物质的重量, 即 ρg , 这就是一般水力学中所称的容重或重率。

被污染水体的密度变化常小于3%, 它对流体运动影响一般可以忽略, 仍可令 $\rho + \Delta\rho \approx \rho$ 。但是若所排的污水在接受水体中受到浮力的作用(如排放热水), 或者考虑密度分层的湖泊、河口和海洋而引起的密度稳定性问题时, 由密度差 $\Delta\rho$ 而引起的重力差或浮力差 $\Delta\rho g$ 就成为控制因素而不能忽略。单位质量水体上所受的重力差或浮力差,

可以看作相当于存在一个重力加速度的修正值 g' :
$$g' = \frac{\Delta\rho g}{\rho} \quad (1-13)$$

在深湖、深海中, 由于静水压力沿深度方向增加, 使得水体密度上部小, 下部大; 或者因含盐度不同, 使各层水体密度不同; 湖泊、水库中由于水温有层次变化, 也可以形成水体的密度分层现象。背景水体密度(ρ_s)的分层状况, 可用密度沿铅垂方向变化的梯度 $\frac{d\rho_s}{dz}$ 来反映。令 z 轴向上为正, 若 $\frac{d\rho_s}{dz} < 0$, 则密度分层是稳定的。在很多实际

问题处理中, 常把分层密度梯度当作常数看待, 即
$$\frac{d\rho_s}{dz} = \text{Const} \quad (1-14)$$

对于污水排入分层环境水体的分析比排入均匀密度水体的分析复杂得多。

§ 1—3 物质在水体内迁移的主要方式

水中的含有物质可通过各种方式而发生位置的迁移, 这些方式主要包括以下几种:

1. 分子扩散 (Molecular Diffusion)

分子扩散是指物质分子的随机运动(即布朗运动)而引起的物质迁移。当水体内含有物浓度不均匀时, 含有物将会从浓度高的地方向浓度低的地方移动。例如将一定浓度的糖水或食盐水投放于静止的清水中, 糖分子或盐分子会自动向周围扩散开来。这种扩散, 是由于分子随机运动所形成的物质交换而引起的。

含有物在水中分子扩散的快慢与物质的性质以及含有物浓度分布不均匀程度(确切

说与浓度梯度)有关,此外与温度和压力也有一定关系。对研究大尺度的水环境问题,分子扩散所引起的物质迁移和其他因素引起的物质迁移相比,一般是微不足道的。

2. 随流输移 (*Advection*)

当水体处在流动状态时,含有物可随水质点的流动一起而移动至新的位置,此种迁移作用称为随流输移。

3. 紊动扩散 (*Turbulent Diffusion*)

当水体作紊流运动,或者虽然水体不存在时间平均流动而仅有脉动(如仅仅受到紊动干扰)的情况下,随机的紊动作用也可以引起水中含有物质的扩散,这种扩散称为紊动扩散。紊动能够传递物质与它能够传递动量和能量的原理类似,紊动扩散作用的强弱与水流旋涡运动密切相关。

4. 剪切流离散 (*Dispersion of Shear Flow*)

当垂直于流动方向的横断面上流速分布不均匀或者说有流速梯度存在的流动称为剪切流。在考虑流动水体的物质迁移和输送作用时,如果把随流输移按平均流速的均匀流计算,那么由于实际上剪切流中各点流速与平均流速不同,将引起附加的物质分散。这种附加的物质分散称为离散。离散的产生是由于将流场作空间平均的简化处理而引起的,如果不采用空间平均的简化过程,自然也不需计入离散作用。

5. 对流扩散 (*Convection*)

这里所说的对流扩散,专指由于温度差或密度分层不稳定性而引起的铅垂方向对流运动所伴随的含有物迁移。

自然界中水体多处于流动状态,各种形式扩散常常交织在一起发生,以上几种物质迁移方式仅仅是按照扩散的物理过程来分别进行描述的。

除以上几种主要迁移形式之外,在河流、湖泊、水库、海湾内,由于河床的冲刷,含有物的淤积和悬浮都可导致水体中物质迁移。很明显,除分子扩散外,所有各种迁移方式都和流体流动特性有密切的联系,因此,要研究物质的扩散输移规律,必须和研究水体的流动特性紧紧连系在一起。

本书以后各章,将分别对不同方式的迁移规律作详细的分析讨论。

第二章 分子扩散

物质的扩散有费克(Fick)型扩散和非费克型扩散两大类。分子扩散是费克型扩散的代表。分子扩散本身,除了微观的化学与生物反应之外,在环境问题中并没有直接的重要意义。但今后我们就会见到,在许多情况下,环境中的物质分散问题可以按分子扩散过程来描述,因为它们与分子扩散有强烈的相似之处。

本章主要介绍有关分子扩散过程的基本概念和基本方程,讨论扩散方程在某些典型初、边值条件下的求解。先讨论物质在静止液体中的分子扩散,然后再讨论液体作层流运动时的扩散。因为液体作层流运动时,只有分子扩散和随流输移而不存在紊动扩散,所以把它放在分子扩散这一章来研究。

§ 2—1 物质的传递与扩散现象

由气体分子运动理论计算说明,单位时间内分子碰撞的次数是巨大的,在通常条件下每秒钟每升体积内的碰撞次数高达 10^{32} 次以上,说明分子是每时每刻都在不停地作无规则的运动。分子的这种运动称为布朗运动。两种不同物质通过它们的分子运动而互相渗透的现象称为物质传递现象或称分子扩散。物质的分子扩散可借助四种推动力发生:在分子场中有浓度梯度、温度梯度、压力梯度或其它作用力梯度存在。把由于这些不同原因而引起的扩散称为浓度扩散、温度扩散、压力扩散或强制扩散。

如在一玻璃筒中,下部先盛棕色的碘溶液,然后徐徐地注入清水,在注入过程中尽可能作到不扰动下面的碘溶液,上、下部分的液体均处于静止状态。起初两层液体之间存在着明显的分界面,过些时候上层清水逐渐变黄,可以清楚地看到沿不同层次的水平面上颜色深度是不同的。显然,上面浓度小而下面的浓度大。经过较长的时间以后,整个玻璃筒内各点浓度几乎相同,这就是由于浓度梯度的存在而发生的碘溶液的扩散。在这个过程中,若用显微镜观察碘分子的运动,发现每个碘分子的运动方向和运动速度都是随机的,分子之间丝毫没有联系,同时还观察到碘分子和水分子之间经常互相碰撞,这种碰撞必然伴随有物质的传递,也就是扩散。分子运动不仅可以传递物质,也同样可以传递动量、能量、热量和涡量等等。

§ 2—2 分子扩散的费克(Fick)定律

关于分子扩散的基本规律是费克(Fick)于1855年首先提出的。他认为盐分子在溶液中的扩散现象可以和物理学中的热传导类比,并提出了分子扩散定律:在单位时间内通过单位面积的溶解物质(即扩散物质)与溶质浓度在该面法线上的梯度成正比,用数学式可表示为:

$$F_A = -D_{AB} \frac{dC_A}{dn} \quad (2-1)$$

式中 F_A 表示 A 溶质在 A 和 B (溶质) 组成的二元系中沿作用面法线方向 n 的流量, C_A 为溶质 A 的质量浓度 (克/升), D_{AB} 为溶质 A 在溶液 B 中的分子扩散系数。扩散系数 D_{AB} 的量纲和运动粘滞系数 ν 的量纲相同。分子扩散系数随溶质与溶液种类和温度、压力而变化。

表 2-1 20℃时物质在水中的分子扩散系数

物 质	扩散系数 D (cm^2/s)	物 质	扩散系数 D (cm^2/s)
O_2	1.80×10^{-5}	醋酸	0.88×10^{-5}
CO_2	1.50×10^{-5}	甲醇	1.28×10^{-5}
N_2O	1.51×10^{-5}	乙醇	1.00×10^{-5}
NH_3	1.76×10^{-5}	酚	0.84×10^{-5}
Cl_2	1.22×10^{-5}	甘油	0.72×10^{-5}
H_2	5.13×10^{-5}	尿素	1.06×10^{-5}
N_2	1.64×10^{-5}	葡萄糖	0.60×10^{-5}
HCl	2.64×10^{-5}	蔗糖	0.45×10^{-5}
H_2S	1.41×10^{-5}	食盐	1.35×10^{-5}
H_2SO_4	1.73×10^{-5}	氢氧化钠	1.51×10^{-5}

注: 本表引自 J. M. 柯尔森等著 (丁绪淮等译) 《化学工程》
第 I 卷, 化学工业出版社, 1983 年 9 月。

为了方便, 常把 (2-1) 式简写成
$$F = -D \frac{dC}{dn} \quad (2-2)$$

上式即称为费克第一定律。因为物质扩散方向与浓度梯度增加的方向相反, 即物质由浓度高的地方向浓度低的地方扩散, $\frac{dC}{dn}$ 为负值, 所以费克定律表达式中需要加上“—”号。

§ 2-3 扩散方程——费克第二定律

设在含有某种物质的静止溶液中, 由于浓度分布不均匀而引起分子扩散, 现根据质量守恒原理来建立浓度随时间和空间变化的关系式, 即分子扩散的扩散方程。

在静止溶液中取出一微分六面体如图 2-1 所示, 六面体的各边长为 dx , dy , dz , 其中心点的坐标为 (x, y, z) , 浓度为 $C(x, y, z)$, 其扩散通量在三个坐标方向上的分量为 F_x , F_y , F_z 。现研究在 dt 时段内 x 方向上物质的扩散量的变化。

流进六面体的扩散量为

$$\left(F_x - \frac{1}{2} \frac{\partial F_x}{\partial x} dx \right) dy dz dt$$

流出六面体的扩散量为

$$\left(F_x + \frac{1}{2} \frac{\partial F_x}{\partial x} dx \right) dy dz dt$$

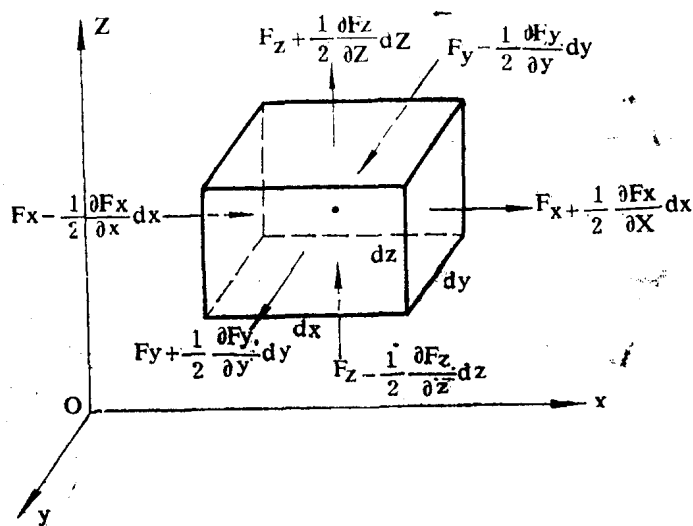


图 2-1

在 x 方向上, 流进与流出的扩散量之差为 $-\frac{\partial F_x}{\partial x} dx dy dz dt$

同理, 在 y 、 z 方向 dt 时段内进、出的扩散量之差为

$$-\frac{\partial F_y}{\partial y} dy dx dz dt$$

$$-\frac{\partial F_z}{\partial z} dz dx dy dt$$

按照质量守恒原理, 进出微分六面体的物质扩散量之差的总和, 应与该时段内微分六面体中因浓度变化而引起的含有物质质量的增量相等, 即

$$\frac{\partial C}{\partial t} dt dx dy dz = - \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dx dy dz dt$$

或

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0 \quad (2-3)$$

由费克第一定律: $F_x = -D_x \frac{\partial C}{\partial x}$ $F_y = -D_y \frac{\partial C}{\partial y}$ $F_z = -D_z \frac{\partial C}{\partial z}$

于是 (2-3) 式可改写为

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad (2-4)$$

当物质在溶液中的扩散为各向同性时, 则 $D_x = D_y = D_z = D$, (2-4) 式可写成

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) \quad (2-5)$$

或

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \nabla^2 C \quad (2-6)$$

式中 ∇^2 为拉普拉斯算子。(2-4) 或 (2-5) 式乃是描述分子扩散浓度时空关系的基本方程式, 称为扩散方程。由于该方程是基于费克第一定律的物质扩散方程, 故称为费克型扩散方程, 或叫做费克第二定律。

若物质扩散发生在二维空间, 扩散方程简化为

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (2-7)$$

或

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \quad (2-8)$$

对一维扩散, 扩散方程的形式为:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (2-9)$$

§ 2-4 瞬时平面源的一维扩散

前节所建立的扩散方程属于二阶抛物型偏微分方程, 当把扩散系数当作常数看待时, 可使该偏微分方程线性化, 在比较简单的初、边值条件下求得解析解。对复杂条件下求解只能借助于数值解法。

扩散方程的求解和污染源的存在形式密切相关。

从污染源在水体空间的存在形式看, 有点源、线源、面源和体积源 (即空间分布源)。在实际问题中, 真正绝对的点源、线源和面源是不可能的, 只是一种近似的处理方法。

从污染源在时间分布上看, 有瞬时源和时间连续源。瞬时源是指污染物质在瞬时内投放于水域, 实际上这也是一种近似, 如突然事故产生的核污染或者油轮事故突然泄放的油污染可近似看作瞬时污染源。时间连续源又可分为恒定的时间连续源和非恒定的时间连续源。

污染物质的扩散空间可能是一维空间, 即只沿一个方向扩散; 也可能是二维空间, 即扩散沿两个方向 (沿一个平面) 发展; 也可能是三维空间, 即沿空间域发展。

在这一节我们首先讨论瞬时平面源在一维空间扩散的求解, 然后再讨论解的某些特性。

一、扩散方程求解

现研究一水平放置直径较小的无限长水管, 管中充满静止水体, 在管子中间断面瞬时投放有色溶液, 在投放平面上有色液的浓度均匀分布, 有色溶液的比重与水一样。令投放平面与坐标原点重合, 横坐标轴 x 与管轴线平行如图 2-2 所示。由于管壁的限制, 有色溶液只能沿管轴方向作一维扩散, 虽然有色溶液分布在横切面的平面上, 但它所代表的问题的性质和点源的一维扩散相同。如前节所述, 对于一维扩散的扩散方程为

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

今采用量纲分析法来探讨浓度分布函数的组成。因为任意时刻在 x 方向某一点的浓度 C 必定与投放质量 M 、扩散系数 D 、以及坐标位置 x 、时间 t 有关。在

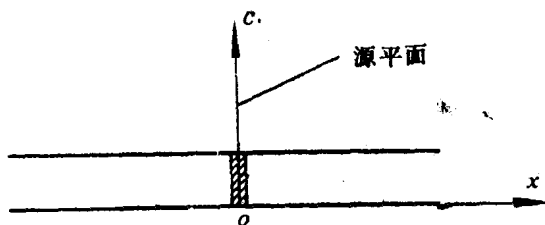


图 2-2

一维问题中 C 的量纲是 $\left[\frac{M}{L} \right]$ ，该量纲恰好等于由 M 、 D 、 t 组合而成的 $\left[\frac{M}{\sqrt{Dt}} \right]$ 的量纲，于是可令其解为

$$C = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} f\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) \quad (2-10)$$

令无量纲变量
$$\eta = \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \quad (2-11)$$

则
$$C = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} f(\eta) \quad (2-12)$$

式中 $f(\eta)$ 为待定函数。把上式分别对 t 和 x 取偏导数有：

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{M}{2} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \frac{1}{t} \left[f(\eta) + \eta \frac{\partial f}{\partial \eta} \right]$$

$$D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \frac{1}{4t} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}$$

将上二式代入 (2-9) 式有

$$\frac{\partial C}{\partial t} - D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 2f + 2\eta \frac{df}{d\eta} + \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0$$

即
$$\frac{d}{d\eta} \left(\frac{df}{d\eta} + 2\eta f \right) = 0 \quad (2-13)$$

上式的通解为
$$\frac{df}{d\eta} + 2\eta f = \text{Const} \quad (2-14)$$

其特解为
$$\frac{df}{d\eta} + 2\eta f = 0 \quad (2-15)$$

解上面常微分方程可求出函数

$$f(\eta) = Ae^{-\eta^2} \quad (2-16)$$

式中 A 为积分常数。将上式代入 (2-12) 式得：