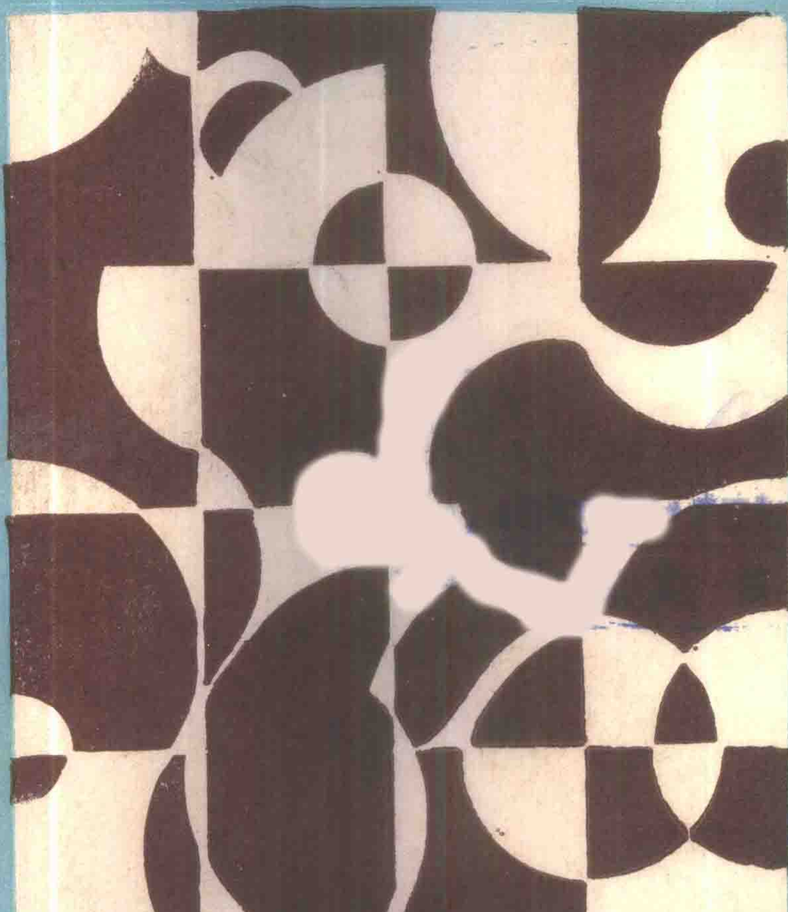
数学分析

上 册

周性伟 刘立民 编著



南开大学出版社

数学分析

上册

周性伟　刘立民　编著

南开大学出版社

1986年

内容提要

本书分为上、下两册，涉及数学分析的全部内容．材料较为丰富．为了便于学生学习，本书注意了与现行中学课本内容的衔接．配有大量的习题，其中有些习题还有相当难度．除了数学系外，本书也可作为理科其它专业及工科有关专业的教学参考书．

数 学 分 析

周性伟　刘立民　编著

南开大学出版社出版

（天津八里台南开大学校内）

新华书店天津发行所发行

天津大邱庄印刷厂印刷

1986年9月第1版　1986年9月第1次印刷

开本：850×1168 1/32　印张：12

字数：297千　印数：1—5,000

统一书号：13301·27　定价：2.40

前 言

本书是在南开大学数学系讲授多遍的数学分析讲义的基础上编写而成的，实际上就是讲授内容的实录。

下面两点是在编写时特别注意到的：

1.与中学课本的衔接

在高中的数学课本中，数学分析中的不少概念，诸如集合及其运算，函数及其特性（周期性，奇偶性，单调性，图象，反函数等），数列极限的$\varepsilon-N$定义等，都已经非常清楚而详细地介绍过。所以我们编写时是以这些知识为前提的，只不过有时为了完整起见，或者为了引申某一概念，而重复这些知识中的一部分内容。

2.内容上的编排

一个变量的数学分析对刚进数学系的学生来说是比较困难的，它集中了相当一部分高等数学中的概念和思想方法。特别是各种极限的定义及有关习题的训练，实数理论，闭区间上连续函数的性质等。由于这些内容涉及整个高等数学的极其重要的基础，并且在后继课中不可能再讲授，所以我们把它们尽量集中在前面介绍。然后通过对后继内容的众多应用和大量练习，以及适当的重复（包括多元函数部分），逐步使其真正被大部分学生所掌握，为进一步学习打下较为扎实的基础。

在多元函数部分，我们较为仔细地论述了n维欧氏空间中的拓扑。这一方面是为了使学生看到分析中的一些基本概念是如何进行统一处理的，另一方面也可作为进一步学习实变函数、拓

扑、泛函分析等课程的先导。

本书上册由周性伟同志主编，下册由刘立民同志主编。在编写过程中，我们得到了南开大学数学系领导的大力支持。许多担任过这门课的教师也为这本书倾注了不少心血。特别是王公恕同志为上册的习题做了大量工作。对他们，我们表示衷心的感谢。

最后我们还要感谢南开大学出版社的同志。没有他们的大力协助，本书的出版是不可能的。

编者　　1986.3.21

目　录

第一章　实数与函数

§1.1　实数

在初等数学中，我们已经熟悉了正整数（即自然数），数0，负整数，分数等这样一些数的概念，这些数统称为有理数。除了有理数外，还存在着象$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，圆周率π等等那样的无理数，当然无理数远远不止这些。有理数和无理数统称为实数。所有实数构成的集称为实数系。

如果我们以有理数为基础，那么在这个基础上可以建立起一套严密的实数理论，其中包括实数系的形成，实数之间的相互运算，实数之间的大小关系等。本书不准备介绍这套理论，只是承认其结果，作为学习数学分析的出发点。

首先我们注意下列几条基本事实：

（i）若$\varepsilon>0$和$M>0$是任意两个正实数，则必存在正整数N，使$N\varepsilon>M$（这个事实有时也称为**阿基米德公理**）。

（ii）实数之间可以象有理数那样进行加、减、乘、除（分母不为0）四则运算，此外在和有理数类似的条件下，也可对实数进行对数、开方、三角函数、反三角函数等运算，所有这些运算的结果都还是实数。

（iii）任何两个相异实数之间既存在着有理数，也存在着无理数。如果用数轴上的点来表示实数，则也就是说数轴上任何两个相异点之间既有有理点，也有无理点。有理数和无理数的这

种性质通常称为“有理数和无理数在实数系中的稠密性”。

§1.2 有界集

设X是一个实数集，如果有实数M，使得对任何 $x\in X$ 都有

$$x\leqslant M \qquad (x\in X)$$

则称X是**有上界**的，并称M是X的一个**上界**。

例如区间$[0, 1]$是有上界的，1就是它的一个上界。再如区间$(-\infty, 0)$是有上界的，0就是它的一个上界。负整数全体也是有上界的，-1就是它的一个上界。

很明显，如果实数集X有上界，则它的上界不止一个。事实上如果M是X的一个上界，则区间$[M, +\infty)$中任何一个元素也是X的上界。

若X不是有上界的，则称X是**无上界**的。为了说明一个实数集X无上界，我们必须说明对任何实数M，必定有某个$x_0\in X$使

$$x_0>M$$

例如正整数全体是无上界的，这是因为对任何M，如果在区间$(M, +\infty)$中随便取一个正整数n_0，则$n_0>M$。此外不难说明偶数全体、有理数全体都是无上界的集。

如果对实数集X，存在实数m，使得对任何$x\in X$都有

$$x\geqslant m \qquad (x\in X)$$

则称X是**有下界**的，并称m是X的一个**下界**。

例如区间$[0, 1]$是有下界的，0就是它的一个下界。区间$(0, +\infty)$是有下界的，0是它的一个下界。正整数全体是有下界的，1就是它的一个下界。

与有上界的集类似，如果集X有下界，则它的下界不止一个，事实上若m是X的一个下界，则$(-\infty, m)$中的任何一个

元素也是X的下界。

一个不是有下界的集称为**无下界集**，为了说明一个实数集X无下界，必须说明对任何实数m，必定有某个$x_0 \in X$使

$$x_0 < m$$

例如负整数全体是无下界的，这是因为对任何实数m，如果在$(-\infty, m)$中随便取一个负整数n_0，则$n_0 < m$。

如果实数集X既有上界，又有下界，则X称为是**有界集**。

例如区间$[0,1]$是有界的。集合$\{x: 0<x<1, x$是有理数$\}$也是有界的。

不是有界的集称为**无界集**。若集X无界，则或者X无上界，或者X无下界，两者必居其一。

为了今后需要，我们在此介绍两个符号。

如果数集X中有最小的元，则这个最小的元记为

$$\min X$$

min是minimum的简写，例如

$\min\{1,2,3\}=1$，$\min[0,1]=0$，$\min[1,+\infty)=1$等等。这样，符号$\min X$有两层意思：首先说明X中有最小元，其次$\min X$表示这个最小元。我们不能写$\min(0,1)$，因为开区间$(0,1)$中没有最小的数。

完全类似，如果数集X中有最大的元，则这个最大的元记为

$$\max X$$

max是maximum的简写，例如

$\max\{1,2,3\}=3$，$\max[0,1]=1$，$\max(-\infty,0]=0$等等，我们不能写$\max(0,1)$，因为开区间$(0,1)$中没有最大的数。

按照定义，对任何$x \in X$有

$$\min X \leqslant x \leqslant \max X$$

现在设X是有界集，于是有m_1和m_2，使对一切$x \in X$有

$$m_1 \leqslant x \leqslant m_2$$

若令$M=\max(|m_1|,|m_2|)$，则对一切$x\in X$有

$$|x| \leqslant M$$

反之若对一切$x\in X$有$|x|\leqslant M$，则很明显X是有界的。因此有

定理1 为使实数集X是有界的，充分必要条件是存在$M>0$，使得对一切$x\in X$有

$$|x| \leqslant M$$

§1.3 上确界，下确界

设X是一个有上界的集，我们已经知道此时X的上界不止一个，我们把X的所有上界所构成的集称为X的**上界集**。我们有兴趣的是研究X的上界集中是否有最小的元素，也即X的所有上界中是否有最小的（上界）。为此先看几个例子。

设$X=[0,1)$。则很明显，X的上界集是区间$[1,+\infty)$。这个区间有最小的元素1，1就是$[0,1)$的最小上界。

再如Y表示负有理数全体，则0是Y的一个上界。其次对任何$\varepsilon>0$，由有理数的稠密性，在Y中必有元素y_0使$y_0>-\varepsilon$。这就是说比0小的任何实数不再是Y的上界。这样0就是Y的最小上界。

类似地可以说明区间$(0,1)$的最小上界是1。

如果集X的上界集中有最小的，则这个最小的上界称为X的上确界，记为

$$\sup X$$

其中sup是supremum的简写。从上面几个例子看来，似乎任何一个有上界的集都有上确界。而实数理论告诉我们，这个结论是正确的。我们把这个重要的事实写成公理，作为今后研究的基础。

公理 任何有上界的实数集必有上确界。

今设$m=\sup X$，即m是集X的上确界。于是首先m是X的一个 上界，因此

$$对任何x\in X有x\leqslant m \qquad (1)$$

其次由于m是X的所有上界中最小的，所以对任何$\varepsilon>0$，$m-\varepsilon$就不再 是X的上界了，也即

$$对任何\varepsilon>0，必有某x_\varepsilon\in X使x_\varepsilon>m-\varepsilon \qquad (2)$$

反之如果一个实数m满足（1）和（2)两个条件，则从（1)得知m是X的一个上界，从（2）得知m是X的最小上界，于是我们有

定理1 为使实数m是集X的上确界，充分必要条件是下两条件同时满足：

（i） 对任何$x\in X$，$x\leqslant m$；

（ii）对任何$\varepsilon>0$，存在$x_\varepsilon\in X$使$x_\varepsilon>m-\varepsilon$。

例1 设 $X=\left\{\dfrac{x-1}{x}\cos x : x\in(0,+\infty)\right\}$，证明 $\sup X=1$。

证 首先当$0<x\leqslant 1$时，$\dfrac{x-1}{x}\cos x\leqslant 0$。而当$x>1$时

$$\frac{x-1}{x}\cos x\leqslant\frac{x-1}{x}<\frac{x}{x}=1$$

所以 1 是X的一个上界。其次任给$\varepsilon>0$，我们取一个正整数n_0使

$$n_0>\frac{1}{2\pi\varepsilon}$$

则此时$\varepsilon>\dfrac{1}{2n_0\pi}$，$1-\dfrac{1}{2n_0\pi}>1-\varepsilon$。由于$\cos 2n_0\pi=1$，所以

$$\frac{2n_0\pi-1}{2n_0\pi}\cos 2n_0\pi=1-\frac{1}{2n_0\pi}>1-\varepsilon$$

若令 $x_0=2n_0\pi$，则$\frac{x_0-1}{x_0}\cos x_0>1-\varepsilon$。因此由定理 1 得知 1 是$X$的最小上界，即$\sup X=1$。

完全类似我们可以定义一个数集的下确界。

设集X有下界，X的所有下界构成的集称为X的**下界集**。如果这个下界集中有最大的元素，也即X有最大的下界，则这个最大的下界称为X的**下确界**，记为

$$\inf X$$

其中 inf 是 infimum 的简写。例如$\inf[0,1]=0$，$\inf(0,+\infty)=0$。

根据上述公理，我们有

定理2 任何有下界的实数集必有下确界。

证 设集X有下界，于是集$Y=\{y: y=-x,\ x\in X\}$有上界。在数轴上集X和集Y关于原点是对称的。根据公理，Y有上确界，设$m=\sup Y$，我们证明$-m=\inf X$。

事实上对任何$x\in X$，由于$-x\in Y$，所以$-x\leqslant m$或$x\geqslant -m$。因此$-m$是X的一个下界。

其次对任何$\varepsilon>0$，由于$m-\varepsilon$不是Y的上界，所以有某个$y_\varepsilon=-x_\varepsilon\in Y$使$y_\varepsilon>m-\varepsilon$，即$-x_\varepsilon>m-\varepsilon$，$x_\varepsilon<-m+\varepsilon$，其中$x_\varepsilon\in X$。这说明$-m+\varepsilon$不是$X$的下界。这样$-m$就是$X$的最大下界，即$X$的下确界。

此外和定理 1 类似，我们有下面的结果（证明留作习题）。

定理3 为使实数m是集X的下确界，充分必要条件是下两条件同时满足：

（i） 对任何$x\in X$，$x\geqslant m$；

（ii）对任何$\varepsilon>0$，存在$x_\varepsilon\in X$使$x_\varepsilon<m+\varepsilon$。

最后，我们经常也用$\sup X=+\infty$表示X无上界，用$\inf X=-\infty$表示X无下界，这里$+\infty$和$-\infty$是两个符号，不是实数，

它们分别读作“正无穷大”和“负无穷大”。

例2 设 $X=\{n^{(-1)^n}: n$是正整数$\}$，证明$\sup X=+\infty$，$\inf X=0$。

证 任给实数M，我们可以取一个正偶数$n_0=2k_0>M$。此时

$$n_0^{(-1)^{n_0}}=n_0>M$$

这说明X无上界，因此$\sup X=+\infty$。

其次对任何正整数n，$n^{(-1)^n}>0$，所以0是X的一个下界。现在任给$\varepsilon>0$，我们可以取一个正奇数n_0使$n_0>\frac{1}{\varepsilon}$。于是

$$n_0^{(-1)^{n_0}}=n_0^{-1}=\frac{1}{n_0}<\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon=0+\varepsilon$$

因此由定理3得知0是X的最大下界，即$\inf X=0$。

下面的定理的证明很简单，我们把它留给读者，但这定理有很重要的用处。

定理4 设X是一个实数集，m和M是两个实数，那么

(i) 若对任何$x\in X$，皆有$x\leqslant M$，则$\sup X\leqslant M$；

(ii) 若对任何$x\in X$，皆有$x\geqslant m$，则$\inf X\geqslant m$。

§1.4 函数

在初等数学中，我们已经学过下列一些函数：

$y=x^\alpha$（幂函数）；

$y=a^x$（指数函数）；

$y=\log_a x$ （对数函数）；

$y=\sin x$，$\cos x$，$\mathrm{tg}\, x$，$\mathrm{ctg}\, x$ （三角函数）；

$y = \arcsin x$，$\arccos x$，$\mathrm{arctg}\, x$，$\mathrm{arcctg}\, x$ （反三角函数）。

这五类函数统称为**基本初等函数**。这些函数有它们各自的定义域，各自的图象，但它们有一个共同点，即对它们定义域中的每一个 x，它们都是通过一定的法则对应于唯一的一个 y值。例如

$$x \longmapsto{\text{对应法则 } x^{\alpha}} y\ (= x^{\alpha}),\quad x \xmapsto{\text{对应法则} a^{x}} y\ (= a^{x})$$

把这个共同点一般化，就是我们所要得到的一般函数的概念。

设X是一个实数集。如果有一个对应法则f，使得对X中每一个 x，有唯一的一个实数 y与之对应，则称这个**对应法则f**是X上的一个**函数**，称X为函数f的**定义域**。X中的元素 x 通过f所对应得到的实数 y 通常记作$f(x)$，即 $y = f(x)$，此时 y 称为x的**象**，x 称为 y 的**原象**。"f是X上的函数"这件事也经常写成

$$x \longrightarrow f(x)\quad (x \in X)$$

或

$$y = f(x)\quad (x \in X)$$

注意，这里 x只是X中的元素的统称，y只是所对应得到的实数的统称，它们只是符号，与函数 f 没有关系。即如果X上的函数f已经建立，则 $y = f(x)$，$y = f(t)$，$x = f(t)$，$x = f(y)$ 等都表示同一个函数f。

如果函数f用 $y = f(x)$ 表示，则称x是函数f的**自变量**，y是函数f的**因变量**，而实数集

$$\{f(x) : x \in X\}$$

称为函数f的**值域**。所以f的值域就是f的定义域通过对应所得到的实数全体。例如 $y = x^2$的值域是 $[0, +\infty)$，$y = 10^x$ 的值域是 $(0, +\infty)$，$y = \sin x$的值域是 $[-1, 1]$ 等。

下面列举几个在初等数学中没有见到过的函数。

例1 设A是一个实数集，我们定义

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$$

函数χ_A称为集A的**特征函数**。所谓“特征”，意思是为使集A和B相等，充分必要条件是它们的特征函数χ_A和χ_B相等。

特别地，如果$A=\{0\}$，即A仅由数0构成，则A的特征函数通常称为单位脉冲函数，记为$\delta(x)$。于是

$$\delta(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases}$$

图1.1是$\delta(x)$的图象。

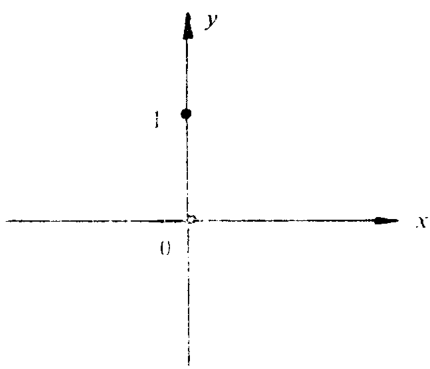


图1.1

如果集A是由全体有理数构成的集，则A的特征函数通常称为**狄里赫莱**（*Dirichlet*）**函数**，记为$D(x)$。于是

$$D(x)=\begin{cases}1 & x\text{为有理数}\\ 0 & x\text{为无理数}\end{cases}$$

例2 函数