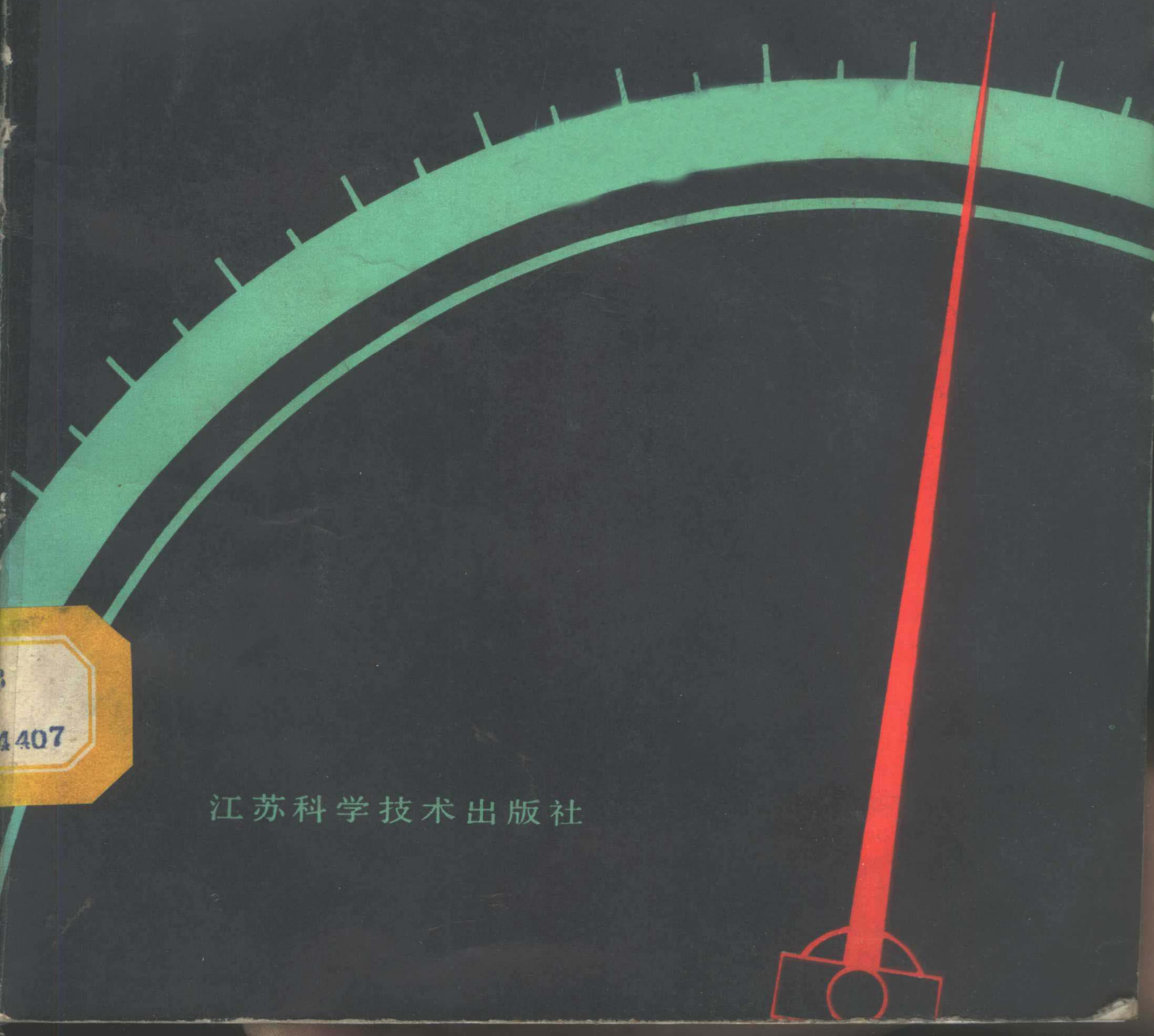
基础物理实验



江苏科学技术出版社

基 础 物 理 实 验

江苏 教育学院
浙江 教育学院 编
南京 教育学院

江苏科学技术出版社

基础物理实验

江苏教育学院
浙江教育学院　编
南京教育学院

出版：江苏科学技术出版社
发行：江苏省新华书店
印刷：江苏新华印刷厂

开本 787×1092 毫米　1/16　印张 9　插页 2　字数 217,000
1987 年 4 月第 1 版　1987 年 4 月第 1 次印刷
印数 1—9,000 册

ISBN 7-5345-0030-3　/O・1

统一书号：13196・235　定价：1.91 元

前　　言

本书是在江苏、浙江、南京教育学院近几年来使用的普通物理实验讲义的基础上，依据国家教委制订的中学教师专业合格证书考试物理教学大纲，并参照国内目前常用的几本实验教材，联合编写而成。

本书的绪论部分介绍了误差理论、有效数字和数据处理的基本知识。全书包括力学、热学、电磁学和光学等基础实验28个，其中16个有“△”标记的为必作实验。每个实验开头有提要，介绍本实验的重要意义；末尾有思考题，供预习或小结用。实验原理简明扼要，避免了数学化和理论化。为了配合实验，还编排了一些附表。本书也可作为职大、函大、夜大、电大和自学考试等有关专业的教材或教学参考书。

参加编写的人员有符宝春、于欣、谢淼、王天军。江苏教育学院物理系副主任段明谦，南京教育学院物理科副主任李蔡审阅了初稿，并提出了许多宝贵意见。南京教育学院物理科钟建平同志对初稿也提了许多有益的建议，在此表示衷心感谢。

书中的缺点和错误，欢迎同行和读者批评指正。

编　者

1987年1月

X04

目　　录

绪　论

§1　物理实验的地位和目的

物理学的研究工作有实验的方法和理论的方法. 实验的方法是以实验结果为依据，归纳出一定的规律. 理论研究工作，虽然不进行实验，但是研究课题的提出和结论的检验，也必须通过物理实验. 物理实验在物理科学的创立和发展中占有十分重要的地位. 因此，物理学从本质上来说是一门以实验为基础的实验科学.我们在学习物理学时,物理实验是一门重要的必修课.

基础物理实验课的教学目的有：

1. 学习物理实验的基本知识、基本方法，培养实验技能，其中包括

(1) 对实验结果、观察到的现象及测量的数据能够正确地记录，并能对实验结果进行分析,写出完整的实验报告，包括实验数据的处理和有效数字的运用等.

(2) 弄懂实验的基本原理，熟悉一些物理量(如长度、时间、质量、温度、电阻和波长等)的测量方法，以及物理学的常用物理常数(如重力加速度、密度、比热容等)的测量方法.

(3) 熟悉常用仪器及测量工具的基本结构原理，掌握其使用方法.

2. 通过实验，加深对物理概念和规律的认识.

3. 通过实验课，培养以事实为依据、理论与实践相结合的科学态度,认真仔细一丝不苟的工作作风，注意观察、勤于思考、探索规律的开拓精神，以及良好的实验习惯.

物理实验课虽然是在教师指导下的学习环节，但在实验过程中，学生的活动有较大的独立性，我们应以一个研究者的态度去组装仪器,进行观测与分析，探讨最佳的实验方案,从中积累经验、锻炼技巧和机智，这将为以后独立地设计实验方案、选择并使用新的仪器设备和解决新的实验课题打下一定的基础.

§2　物理实验课的一般进程和各教学环节的要点

〔实验前的预习〕

为了在规定时间内，高质量地完成实验任务，一定要作好实验前的预习.

无故迟到超过十分钟或没有预习者不得进入实验室作实验.

不了解实验的原理就动手操作，只能机械地照教材所规定的步骤进行，尽管照猫画虎地取得了一些数据，但不能深入地理解物理现象的实质，更不会注意实验方法中的技巧，当然

也谈不上主动地去分析实验中的各种现象了。

预习时应以理解原理为主，搞清实验内容是什么，要用的是什么方法，所依据的道理又是什么。为了使测量数据眉目清楚，防止遗漏，应根据实验的要求预先设计好表格。

〔实验操作〕

进入实验室，首先要了解实验规则及注意事项，其次就是熟悉仪器和安装调整仪器（例如,天平调水平和平衡,光路调同轴等高等)。

以下举出几点共同性的注意事项：

1. 安排仪器时,应尽量做到便于观察、读数和记录。
2. 灵敏度高的仪器都有制动器，不进行测量时，应使仪器处于制动状态。
3. 停表、温度计、放大镜等小件仪器,在用完之后要放到实验台中间的仪器盒里。
4. 拧动仪器上的旋钮或转动部分时,不要用力过猛。
5. 注意仪器的零点,必要时需进行调零。
6. 砝码、透镜、表面镀膜反射镜等器件,为了保持其测量精确度和光洁,不得用手去摸,也不要随便用布去擦。
7. 使用电学仪器要注意电源电压、极性，并需经教师允许后方能接通电源。
8. 不要动用别组的仪器，仪器不够用要请示教师。
9. 实验后要将仪器整理、恢复到实验前的状态。

准备就绪后开始测量。测量的原始数据(一定不要加工或修改)应整齐地记录在实验笔记本上,数据的有效位数应由仪器的精度或分度值加以确定。数据之间要留有间隙,以便补充。发现是错误的数据用铅笔划掉,不要毁掉,因为常常在核对以后发现它并没有错。不要忘记记录有关的实验环境条件、仪器的精度、规格及测量量的单位。实验原始数据的优劣，决定着实验的成败，读数时务必要认真仔细。运算的错误可以修改，原始数据则不能擅自改动。两人同作一个实验时，要既分工又协作，以便共同完成实验。

〔数据整理和实验报告〕

实验结束后要尽快整理好数据，计算出结果或绘出必要的图线。

实验报告是实验工作的总结，要用简明的形式将实验报告完整而又准确地表达出来。实验报告要求文字通顺、字迹端正、图表规矩、结果正确、讨论认真。应养成实验完后尽早写出实验报告的习惯，因为这样做可以收到事半功倍的效果。

完整的实验报告应包括下述几部分内容：

1. 实验名称。
2. 实验目的。
3. 实验原理。应简要地说明并列出实验所要用的主要公式、电路或光路图。若教材与实际所用不符，应取实际采用的原理。
4. 实验仪器。列出主要仪器的型号、规格、精度(或分度值)。
5. 实验步骤。依次列出实际实验的步骤。

6. 实验记录. 全部实验中有用的原始数据要尽量以表格的形式列出,并正确地表示出有效数字和单位.

7. 数据处理. 根据要求计算出最后的测量结果, 可采用列表法和作图法.对所得的数据应进行误差分析.

8. 实验结果. 最后的结果应包括测量值、误差和单位. 如果实验是为了观察某一物理现象或者观察某一物理规律, 可只扼要地写出实验结论.

9. 讨论与分析. 回答实验思考题,描述实验中观察到的异常现象及可能的解释, 分析实验误差的主要来源, 对实验仪器和方法的建议等. 还可以谈谈实验的心得体会.

以上是对报告的一般性要求. 不同的实验, 可以根据具体情况有所侧重和取舍, 不必千篇一律.

§3 误差理论的基本知识

物理实验要定量地测量出有关物理量的大小. 所谓测量就是借助仪器, 用某一计量单位把待测量的大小表示出来, 即待测量是该计量单位的多少倍.

待测量的测量可分为两类. 一类是用计量仪器和待测量进行比较, 就可获得结果,例如,用米尺和某单摆相比较,读出摆线长为 0.9867 米. 这一类测量称为直接测量. 另一类是不能直接用计量仪器把待测量的大小测出来, 而需依据待测量和某几个直接测量值的函数关系求出待测量, 例如重力加速度, 可以由测量单摆的摆长和周期, 根据单摆周期的公式算出, 这一类的测量称为间接测量.

物理量多数是间接测量值, 一般是设计一个(或一套)装置, 通过几个直接测量值求出结果. 例如, 单摆就是一个测量重力加速度的装置, 惠斯登电桥就是一个测量电阻的装置.

每一个物理量都是客观存在的,在一定的条件下具有不依人的意志为转移的固定大小,这个客观大小称为该物理量的真值. 但是, 测量是依据一定的理论或方法,使用一定的仪器,在一定的环境中, 由一定的人进行的. 而由于实验理论的近似性, 实验仪器灵敏度和分辨能力的局限性, 环境的不稳定性等因素的影响, 待测量的真值是不可能测得的, 测量结果和被测量真值之间总会存在或多或少的偏差, 这种偏差就称为测得值的误差.

设被测量的真值为 a ,测得值为 x ,误差为 ε,则

$$\varepsilon = x - a \tag{03-1}$$

测量所得的一切数据,毫无例外的都包含有一定量的误差,因而没有误差的测量结果是不存在的.在误差必然存在的情况下,测量的任务是①设法将测得值中的误差减至最小,② 求出在测量的条件下, 被测量的最近真值(最佳值), ③ 估计最近真值的可靠程度(接近真值的程度).为此必须研究误差的性质、来源, 以便采取适当的措施, 以期达到最好结果.

1. 系统误差、偶然误差和粗差

按照对测得值影响的性质, 误差可分为系统误差、偶然误差和粗差三类.实验数据中,三类误差是混杂在一起出现的,但必须分别讨论其规律,以便采取相应的措施去减少误差.

(1) 系统误差　在同一条件下(方法、仪器、环境和观测人不变)多次测量同一量时, 符号和绝对值保持不变的误差, 或按某一确定的规律变化的误差, 称为系统误差.

例如, 用天平称衡物体的质量时, 由于砝码的标称质量(或名义质量,即标刻在砝码上的

质量数值)不准引入的误差，由于天平臂不等长引入的误差，由于空气浮力的影响引入的误差，所有这些误差在多次反复称衡同一物体的质量时是恒定不变的，这就是系统误差。

系统误差又可以按其产生的原因分为

① 仪器误差　这是所用量具或装置不完善而产生的误差。

② 方法误差(理论误差)　这是由于实验方法本身或理论不完善导致的误差。

③ 装置误差　这是由于对测量装置和电路布置、安装、调整不当而产生的误差。

④ 环境误差　这是外界环境(如光照、温度、湿度、电磁场等)的影响而产生的误差。

⑤ 人身误差　这是由于观测人的感觉器官或运动器官不完善引入的误差。此种误差因人而异，并和个人当时的精神状况密切相关。

系统误差的出现一般都有较明确的原因，因此可采取适当措施使之降低到可忽略的程度，但是怎样找到产生系统误差的原因，从而采取恰当的对策，又没有一定的规律可遵循，因此在实验过程中逐渐积累经验、锻炼机智、提高实验素养是很重要的。分析系统误差应当是实验的讨论问题之一。

(2) 偶然误差(随机误差)　在同一条件下多次测量同一物理量时，测得值总是有稍许差异而且变化不定，并在消除系统误差之后依然如此，这部分绝对值和符号经常变化的误差，称为偶然误差。

产生偶然误差的原因很多，比如观测时目的物对得不准，平衡点确定得不准，读数不准确，实验仪器由于环境温度、湿度、电源电压的起伏而引起的微小变化，振动的影响，等等。这些因素的影响一般是微小的，并且是混杂出现的，因此难以确定某个因素产生的具体影响的大小，所以对待偶然误差不能象对待系统误差那样，找出原因加以排除。

偶然误差并非毫无规律，它的规律性是在大量观测数据中才显现出来的统计规律。在多数物理实验中，偶然误差表现出如下的规律性：

① 绝对值相等的正和负的误差的出现机会相同，

② 绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的机会多，

③ 误差不会超出一定的范围。

设 n 次测量值 x_1、x_2、…、x_n 的误差为 ε_1、ε_2、…、ε_n，真值为 a，则

$$(x_1-a)+(x_2-a)+\cdots+(x_n-a)=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n.$$

将上式展开整理后，分别除以 n，得出

$$\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)-a=\frac{1}{n}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n).$$

它表示平均值的误差等于各测量值误差的平均，由于测量值的误差有正有负，相加后可抵消一部分，而且 n 越大相消的机会越多，因此得到

① 在确定的测量条件下，减小测量结果偶然误差的办法是增加测量次数。

② 在消除数据中的系统误差之后，算术平均值的误差由于测量次数的增加而减小，平均值即趋近于真值。因此可取算术平均值为直接测量的最近真值(最佳值)。

实际测量中，当系统误差为恒定数值时，一般不是从一个一个数据中消除它，而是在求出算术平均值后再将系统误差取反号作为修正值加入其中。

测量次数的增加对于提高平均值的可靠性是有利的，但不是测量次数越多越好。因为增加次数必定要延长测量时间，这将给保持稳定的测量条件增加困难，同时延长时间也会给观

测者带来疲劳，这又可能引起较大的观测误差．另外增加测量次数只能对降低偶然误差有利而与系统误差的减小无关，所以实际测量次数不必过多．一般在科学研究中，取 10 到 20 次，而在物理实验课中则只取 4 到 10 次．

（3）粗差（过失误差） 凡是用测量时的客观条件不能解释为合理的那些突出的误差，可称为粗差．这是观测者在观测、记录和整理数据过程中，由于缺乏经验、粗心大意、疲劳等原因引起的．刚开始进入实验室学习物理实验的人，在实验过程中常常会产生粗差，应在教师的指导下，不断总结经验，提高实验的素养，努力防止出现粗差．

粗差的出现，将会明显地歪曲测量结果，我们应当努力将其剔除．但是什么样的数据可以认为是有粗差的坏数据而必须剔除，则必须慎重处理．在测量当时若肯定是测错或测量条件有明显变化的数据，可以在注明原因后废弃．若在测量当时不能肯定的，则必须经过物理规律的分析认为不合理，或经过偶然误差的分析认为不可能是由偶然误差产生的异常数据才可以舍弃．

2．绝对误差和相对误差

设某测量值 x 的真值为 a，误差为 ε，则 $x-a=\varepsilon$．由此式所表达的误差 ε 和测量值 x 具有相同的单位，它反映测量值偏离真值的大小，所以又称为绝对误差．在后面介绍的平均绝对误差、标准误差也都属绝对误差．

绝对误差可以表示一个测量结果的可靠程度，但在比较不同测量结果时则不适用．例如测量两个物体的质量，得出一个是 1.00g，另一个是 100.00g，如果测量的绝对误差都是 0.01g，那么从绝对误差来看，对二者的评价是相同的，但前者的误差占测量值的 1%，而后者仅占 0.01%，当然可靠性比前者大的多．所以比较不同测量结果的可靠性时，应当用该量的绝对误差与测量值之比去评价，称此比值为相对误差．相对误差是一个比值，没有单位，通常用百分数来表示．

3．测量的精密度、准确度和精确度

精密度、准确度和精确度都是评价测量结果的好坏，但这三个词的涵义不同，使用时应加以区别．

测量的精密度高，是指测量数据比较集中，偶然误差较小，但系统误差的大小不明确．

测量的准确度高，是指测量数据的平均值偏离真值较少，测量结果的系统误差较小，但数据分散的情况，即偶然误差的大小不明确．

测量的精确度高，是指测量数据比较集中在真值附近，即测量的系统误差和偶然误差都比较小．精确度是对测量的偶然误差与系统误差的综合评定．

图 03-1 是用打靶时弹着点的情况为例，说明这三个词的意义．(a)图表示射击的精密度高但准确度较差，(b)图表示射击的准确度高，但精密度较差，(c) 图表示精密度和准确度均较好，即精确度高．

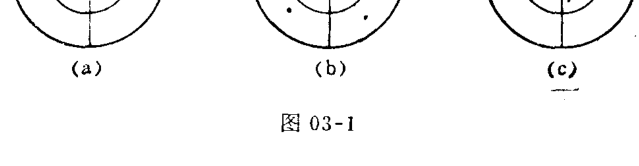


图 03-1

4．直接测量值的误差估计

在物理实验中，我们常用平均绝对误差和标准误差来评价测量的优劣．以下讨论的问题是假定数据中已不存在系统误差和粗差．

（1）测量列的平均绝对误差　测量列是指一组测量值．因为偶然误差服从统计规律，在测量条件相同的情况下，随着测量次数的增多，测量值的算术平均值趋近于真值，所以在多次测量中算术平均值最好地代表了真值．如对某长度进行了6次测量，得到

$x_1 = 4.37\ \text{cm}$　　$x_4 = 4.35\ \text{cm}$

$x_2 = 4.35\ \text{cm}$　　$x_5 = 4.33\ \text{cm}$

$x_3 = 4.34\ \text{cm}$　　$x_6 = 4.36\ \text{cm}$

算术平均值为

$$\bar{x} = \frac{1}{6}(x_1 + x_2 + \cdots + x_6) = 4.35\ \text{cm}$$

算术平均值的普遍表达式为

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \tag{03-2}$$

因为实际测量的次数总是有限的，所以我们不能得到测量量的真值，只能求出测量量的算术平均值．测量值与算术平均值之间的差异可以用算术平均偏差来评估．它反映了测量结果的可靠程度．算术平均偏差的绝对值称平均绝对误差．

设各测量值 x_i 与算术平均值 $\bar{x}$ 的绝对误差为 η_i，即

$$\eta_i = |x_i - \bar{x}| \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$$

则平均绝对误差定义为

$$\overline{\eta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\eta_i| \tag{03-3}$$

这样，测量结果应表示为

$$x = \bar{x} \pm \overline{\eta}$$

其意义为被测量量 x 的最佳值是 $\bar{x}$，误差区间 $\bar{x} + \overline{\eta} \to \bar{x} - \overline{\eta}$ 最大可能地包含了真值．

按照高斯误差理论，测量列的平均绝对误差为 $\overline{\eta}$ 时，则测量列中任一测量值的误差 ε_i 有57.5%的可能性是在 $(-\overline{\eta},\ +\overline{\eta})$ 区间之内．

（2）测量列的标准误差（均方误差）　在同一条件下进行测量（称为等精度测量）后所得各数据，由于存在偶然误差而相互稍有不同，标准误差是对这一组数据可靠性的又一种评价．

测量列的标准误差定义为各测量值误差的平方和的平均值的平方根，故又称为均方误差．

设测量列中 n 个测量值的误差为 ε_1、ε_2、$\cdots$、ε_n，则其标准误差 σ 为

$$\sigma = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_i^2}{n}} \tag{03-4}$$

但是被测量的真值是未知数，各测量值的误差也都无从知晓，因此不可能按此定义式求得其标准误差．测量时可能得出的是最近真值即算术平均值（$\bar{x}$），以及测量值和算术平均值之差也称偏差（η）．理论分析表明可以用偏差表示标准误差，即是

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sum\eta_i^2}{n-1}} \tag{03-5}$$

如上所述，标准误差不是测量值的实际误差，也不是误差范围，它只是对一组测量数据可靠性的估计．标准误差小，测量的可靠性就大一些；相反，则测量不大可靠．但是标准误差和各测量值的实际误差之间是什么关系呢？按照偶然误差的高斯理论，测量列的标准误差为σ时，则此测量列中任一测量值的误差ε_i有68.3%的可能性是在$(-\sigma, +\sigma)$区间之内．

世界上多数国家的物理科学论文都是用标准误差去评价数据的．现在已有一些电子计算器具有计算标准误差的功能，能较快求出σ值．所以我们希望读者在物理实验中使用标准误差，当然也可以使用平均绝对误差．

(3) 单次测量的误差估计

有些实验，由于是在动态中测量，不容许对被测量做重复测量；也有些实验的精密度要求不高；或在间接测量中，其中某一物理量的误差对最后的结果影响较小．在这些情况下可以对被测量只测一次．对于单次测量的误差，一般是估计它的最大值，因为误差的来源很多，而各实验又有各自的特点，所以难于确定统一的规则．但是，至少也不能少于仪器的最小分度值的一半．

例1 用一米尺测一摆线长，如果米尺使用得正确，则读数误差是测量误差的主要成分，摆的上下两端读数误差各取0.5mm，则长度测量误差可取为1mm．

例2 用停表测量一物体运动的时间间隔，如果停表的系统误差不必考虑，则测量的误差主要是由启动和制动停表时，手的动作和目测协调的情况决定的．一般可估计启动、制动时各有0.1s误差，总的误差为0.2s．

例3 用天平称衡物体质量时，空载时天平指针的停点和加砝码后天平指针的停点一般是不一致的，其差异将引起测量误差，当此二停点之差不超过1个分度时，可取测量误差为天平指针停点移动1分度时两侧的质量差额．

天平指针停点移动1个分度，天平两侧的质量差称为天平的感量(或称感度)．

(4) 重复测量所得测量值相同时的误差估计

重复测量几次，测量值不变，并不是误差为零，而是偶然误差较小，仪器的精度不足以反映其微小差异．这时如果不考虑仪器的系统误差，可估计其标准误差为$\delta/2$(δ为仪器的最小分度值)．

5. 间接测量值的误差估计

大多数物理实验是经过间接测量获得最终结果的，而间接测量结果是由若干个直接测量得到的参数，按照一定的函数关系(测量公式)求出的．即当对m个相互独立的物理量进行直接测量后，求出各物理量的最佳值X_1、X_2、…、X_m，则间接测量值Y可由各物理量的函数关系式$Y=F(X_1, X_2, \cdots, X_m)$求出．

例如，测量圆柱体的体积V时，要对其直径d和柱长l进行直接测量，分别求出二者的算术平均值，而后按$V=\frac{1}{4}\pi d^2 l$的函数关系求出间接测量结果——体积V．

计算间接测量结果时，是将各直接测量值的最佳值(而不是真值)代入公式求出的．由于直接测量值的最佳值，都有一定的误差，因此，求得的间接测量结果也必然具有一定的误差，其误差的大小取决于各直接测量值误差的大小，以及函数的具体形式．

表达各直接测量值误差与间接测量值误差之间的关系式，称为误差传递公式。为了简便起见，下面只讨论有两个直接测量值的情况。

设 X_1 和 X_2 为两个直接测量值的算术平均值，ΔX_1 和 ΔX_2 为其偶然误差，将 X_1、X_2 代入测量公式求出间接测量值为 Y，由 ΔX_1 和 ΔX_2 引起 Y 的误差为 ΔY。

（1）当 $Y=aX_1\pm bX_2$ 时（a、b 为常系数）

在考虑误差之后，可写成为

$$Y\pm\Delta Y=a(X_1\pm\Delta X_1)\pm b(X_2\pm\Delta X_2)$$

考虑到最不利的情况，则

$$\pm\Delta Y=(\pm a\Delta X_1)+(\pm b\Delta X_2) \tag{03-6}$$

即间接测量等于直接测量之和或差时的误差，等于各直接测量误差乘以相应系数之和。

（2）当 $Y=aX_1X_2$ 时（a 为常系数），则

$$Y\pm\Delta Y=a(X_1\pm\Delta X_1)(X_2\pm\Delta X_2)$$

所以

$$\pm\Delta Y=(\pm a\Delta X_1X_2)+(\pm a\Delta X_2X_1)+(\pm a\Delta X_1\Delta X_2)$$

上式中右侧第三项中有两个微小量的乘积，而第一、二项中只有一个微小量，因此第三项和前两项相比，可忽略，则得

$$\pm\Delta Y=(\pm a\Delta X_1X_2)+(\pm a\Delta X_2X_1)$$

两侧分别除以 Y 和 aX_1X_2 后，仍将相等，即

$$\pm\frac{\Delta Y}{Y}=\left(\pm\frac{\Delta X_1}{X_1}\right)+\left(\pm\frac{\Delta X_2}{X_2}\right) \tag{03-7}$$

即间接测量等于直接测量之积时的相对误差，等于各直接测量的相对误差之和。要注意在此相对误差式中常系数 a 已消去。

（3）当 $Y=a\dfrac{X_1}{X_2}$ 时（a 为常系数），则

$$Y\pm\Delta Y=a\frac{X_1\pm\Delta X_1}{X_2\pm\Delta X_2}$$

上式右侧横线上下均乘以 $X_2\mp\Delta X_2$，则

$$Y\pm\Delta Y=a\frac{X_1X_2+(\pm\Delta X_1X_2)+(\pm\Delta X_2X_1)+(\pm\Delta X_1\Delta X_2)}{X_2^2-\Delta X_2^2}$$

略去式中微小量自乘项和互乘之项，得

$$Y\pm\Delta Y=a\frac{X_1}{X_2}+\left(\pm a\frac{\Delta X_1}{X_2}\right)+\left(\pm a\frac{\Delta X_2X_1}{X_2^2}\right)$$

则

$$\pm\Delta Y=\left(\pm a\frac{\Delta X_1}{X_2}\right)+\left(\pm a\frac{\Delta X_2X_1}{X_2^2}\right)$$

用 Y 和 $a\dfrac{X_1}{X_2}$ 除上式两侧后，仍将相等，即

$$\pm\frac{\Delta X}{Y}=\left(\pm\frac{\Delta X_1}{X_1}\right)+\left(\pm\frac{\Delta X_2}{X_2}\right)$$

亦即和相乘时的结论相同。

(4) 当$Y=aX^b$时(a、b为常数),参照相乘时的结论,可得

$$\pm\frac{\Delta Y}{Y}=\pm\frac{\Delta X}{X}\pm\frac{\Delta X}{X}\pm\cdots\pm\frac{\Delta X}{X}=\pm b\frac{\Delta X}{X} \tag{03-8}$$

(5) 当$Y=\sqrt[b]{aX}$时(a、b为常数),即$Y^b=aX$,所以$b\frac{\Delta Y}{Y}=\frac{\Delta X}{X}$,则

$$\pm\frac{\Delta Y}{Y}=\pm\frac{1}{b}\frac{\Delta X}{X} \tag{03-9}$$

(6) 综合以上(2)~(5)的讨论,可知当$Y=aX_1^bX_2^c\cdots X_m^p$时,其相对误差公式为(略去±号)

$$\frac{\Delta Y}{Y}=|b|\frac{\Delta X_1}{X_1}+|c|\frac{\Delta X_2}{X_2}+\cdots+|p|\frac{\Delta X_m}{X_m} \tag{03-10}$$

此式为间接测量的误差公式。计算间接测量的误差时,除相加或相减的情况外,一般是先求其相对误差,而后用相对误差和间接测量值相乘去求出绝对误差。

下面举两个测量公式的误差公式:

① $E=\frac{wl^3}{4a^3b\lambda}$ 的误差公式为

$$\frac{\Delta E}{E}=\frac{\Delta w}{w}+3\frac{\Delta l}{l}+3\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}+\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

② $V=\frac{1}{4}\pi(d_2^2-d_1^2)\,l$ 的误差公式为

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V}{V}&=\frac{\Delta(d_2^2-d_1^2)}{d_2^2-d_1^2}+\frac{\Delta l}{l}\\&=\frac{\Delta(d_2^2)+\Delta(d_1^2)}{d_2^2-d_1^2}+\frac{\Delta l}{l}\\&=\frac{2d_2\Delta d_2+2d_1\Delta d_1}{d_2^2-d_1^2}+\frac{\Delta l}{l}\end{aligned}$$

在此误差公式中没有包括π,并不是认为π是常数,而是考虑由于计算时π的取值而出现的误差是系统误差,应当适当取π值使之减少到可忽略的程度。实际计算时要使$\frac{\Delta\pi}{\pi}$小于最后结果相对误差$\frac{\Delta Y}{Y}$的$\frac{1}{20}$。假如$\frac{\Delta Y}{Y}$为0.01,就可取$\pi=3.14$,这时π的误差$\Delta\pi=0.0016$,$\frac{\Delta\pi}{\pi}=0.0005$达到可忽略的程度。

(7) 对于任意函数$Y=F(X_1,X_2,\cdots,X_m)$,在考虑误差之后,则为

$$Y+\Delta Y=F(X_1+\Delta X_1,X_2+\Delta X_2,\cdots,X_m+\Delta X_m)$$

按泰勒公式展开上式并略去ΔX的二次方及以后各项,可得

$$Y+\Delta Y=F(X_1,X_2,\cdots,X_m)+\frac{\partial F}{\partial X_1}\Delta X_1+\frac{\partial F}{\partial X_2}\Delta X_2+\cdots+\frac{\partial F}{\partial X_m}\Delta X_m$$

因此,绝对误差为

$$\Delta Y=\frac{\partial F}{\partial X_1}\Delta X_1+\frac{\partial F}{\partial X_2}\Delta X_2+\cdots+\frac{\partial F}{\partial X_m}\Delta X_m \tag{03-11}$$

在计算偶然误差时，由于误差本身的正或负是不可知的，因此，上式中各 ΔX 的系数必须取其绝对值，即

$$\Delta Y=\left|\frac{\partial F}{\partial X_1}\right|\Delta X_1+\left|\frac{\partial F}{\partial X_2}\right|\Delta X_2+\cdots+\left|\frac{\partial F}{\partial X_m}\right|\Delta X_m \tag{03-12}$$

相对误差为

$$\frac{\Delta Y}{Y}=\left|\frac{\partial F}{\partial X_1}\right|\frac{\Delta X_1}{F}+\left|\frac{\partial F}{\partial X_2}\right|\frac{\Delta X_2}{F}+\cdots+\left|\frac{\partial F}{\partial X_m}\right|\frac{\Delta X_m}{F} \tag{03-13}$$

式(03-12)、(03-13)为任意函数的误差公式。

以上讨论了间接测量误差和直接测量误差之间的关系，在讨论时我们没有考虑 ΔX_1、ΔX_2、…、ΔX_m 各误差的符号在实际上不会完全相同，它们传递给间接测量值时有相互抵消一些的可能，比如 $Y=X_1+X_2$，当 ΔX_1 是正号时，ΔX_2 不一定是正号，所以 ΔY 不一定是 ΔX_1 和 ΔX_2 之和。然而我们无法判断各误差的实际符号，而从最不利的情形考虑，将各误差或相对误差直接相加(取绝对值)，这样估计的误差将有些偏大。假如 ΔX_1、ΔX_2、…、ΔX_m 为各直接测量值的标准误差时，则按上述各式求出的 ΔY，将比间接测量值的标准误差大一些。假如在讨论时，将各误差取平方的形式，就可不受其符号的影响。

下面列出一些基本的误差运算公式。

关系式	绝对误差 (ΔN)	相对误差$\left(E=\frac{\Delta N}{N}\right)$
$N=A+B+C+\cdots$	$\pm(\Delta A+\Delta B+\Delta C+\cdots)$	$\pm\left(\frac{\Delta A+\Delta B+\Delta C+\cdots}{A+B+C+\cdots}\right)$
$N=A-B-C-\cdots$	$\pm(\Delta A+\Delta B+\Delta C+\cdots)$	$\pm\left(\frac{\Delta A+\Delta B+\Delta C+\cdots}{A-B-C-\cdots}\right)$
$N=A\cdot B\cdot C$	$\pm(BC\Delta A+CA\Delta B+AB\Delta C)$	$\pm\left(\frac{\Delta A}{A}+\frac{\Delta B}{B}+\frac{\Delta C}{C}\right)$
$N=\frac{A}{B}$	$\pm\left(\frac{B\Delta A+A\Delta B}{B^2}\right)$	$\pm\left(\frac{\Delta A}{A}+\frac{\Delta B}{B}\right)$
$N=aA$	$\pm a\cdot\Delta A$	$\pm\frac{\Delta A}{A}$
$N=A^n$	$\pm n\cdot A^{n-1}\cdot\Delta A$	$\pm n\cdot\frac{\Delta A}{A}$
$N=\sqrt[n]{A}$	$\pm\frac{1}{n}A^{\frac{1}{n}-1}\cdot\Delta A$	$\pm\frac{1}{n}\cdot\frac{\Delta A}{A}$
$N=\sin A$	$\pm\cos A\cdot\Delta A$	$\pm\mathrm{ctg}A\cdot\Delta A$
$N=\cos A$	$\pm\sin A\cdot\Delta A$	$\pm\mathrm{tg}A\cdot\Delta A$
$N=\mathrm{tg}A$	$\pm\frac{1}{\cos^2 A}\cdot\Delta A$	$\pm\frac{2\Delta A}{\sin 2A}$
$N=\mathrm{ctg}A$	$\pm\frac{1}{\sin^2 A}\cdot\Delta A$	$\pm\frac{2\Delta A}{\sin 2A}$

上表中 a 及 n 为常数，相对误差 E 最后要化成用百分数来表示。

例 1 测一圆柱体的直径d、长度l和质量m，求其密度ρ及误差.

记录：d(mm) 5.642 5.648 5.653 5.640 5.639 5.646

l 6.715±0.005cm

m 14.06±0.01g

其中l和m为单次测量.

解 $d=5.645\pm0.003\text{mm}$

$$\rho=\frac{4\times14.06}{3.1416\times0.5645^2\times6.715}=8.366\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$$

误差计算：

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}=\frac{\Delta m}{m}+2\frac{\Delta d}{d}+\frac{\Delta l}{l}=\frac{0.01}{14.06}+2\times\frac{0.003}{5.645}+\frac{0.005}{6.715}$$
$$=0.0025$$

则 $$\Delta\rho=0.02\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$$

所以

$$\rho=8.36\pm0.02\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$$

因为误差是一种不很准确的估计值,计算出的误差，一般只保留一位数(首位是1的可保留两位).对于保留位数以下的数可按取舍规则处理,但对于测量值和误差,则有不同的规定.对于误差主要考虑的是不要估计不足,因此对于误差的下一位,一律进入不舍. 比如求得误差为0.22cm或0.61s时，则分别进入为0.3cm或0.7s.

对于测量值的数值，则考虑数值的准确性，采取4舍5入*，这样,由于取舍给数值带来的误差，不会超过保留数值末位的半个单位.

例 2 设有函数关系 $y=6AB^2/\sqrt{C}$，求y,其中

$$A=325.12\pm0.02(\text{m})$$
$$B=0.282\pm0.003(\text{kg})$$
$$C=4.025\pm0.005(\text{m}^2)$$

解 此题可用三种方法求解Δy.

方法一

$$\Delta y=\left|\frac{\partial y}{\partial A}\cdot\Delta A\right|+\left|\frac{\partial y}{\partial B}\cdot\Delta B\right|+\left|\frac{\partial y}{\partial C}\cdot\Delta C\right|$$

其中 $$\frac{\partial y}{\partial A}=\frac{6B^2}{\sqrt{C}},\quad\frac{\partial y}{\partial B}=\frac{12AB}{\sqrt{C}},\quad\frac{\partial y}{\partial C}=-\frac{3AB^2}{C\sqrt{C}}$$

得 $$\Delta y=\left|\frac{6B^2}{\sqrt{C}}\cdot\Delta A\right|+\left|\frac{12AB}{\sqrt{C}}\cdot\Delta B\right|+\left|-\frac{3AB^2}{C\sqrt{C}}\cdot\Delta C\right|$$

所有的数据均取正号，再稍加整理得到

$$\Delta y=\frac{6AB^2}{\sqrt{C}}\left(\frac{\Delta A}{A}+2\frac{\Delta B}{B}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta C}{C}\right)$$

* 在实际工作中,为了使“取”和“舍”的机会均等,有时用如下的规则：所拟舍去数字中，其最左面第一个数字是6或6以上则进1，是4或4以下则舍，是5而前一位数字是奇数则进1，是5而前一位是偶数时，并且5的后面是“0”则舍，5的后面不是“0”则进1(“0”算作偶数).