

地下水文学的数值法

雷姆森等著 罗焕炎 李鸿吉译

地质出版社

内 容 提 要

本书专门介绍地下水问题的数值计算方法,包括有限差分法、相似解法和有限单元法。对于饱和、非饱和、稳定、非稳定、承压、非承压等水流状态都有所论及,内容较为系统。讲述数学方法相当通俗,对常用的计算方法都有框图便于程序设计。

本书可供水文地质工作者、石油地质工作者以及有关的程序设计人员参考。

Numerical Methods in Subsurface Hydrology

I. Remson

G. M. Hornberger F. J. Molz

1971

地下水文学的数值法

I. 雷姆森 G. M. 霍恩伯格 F. J. 莫尔茨 著
罗焕炎 李鸿吉 译

*

国家地质总局书刊编辑室编辑

地质出版社出版

地质印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

1977年8月北京第一版·1977年8月北京第一次印刷

印数1—6,900册·定价0.75元

统一书号:15038·新196

译 者 的 话

无论是工农业供水还是工程建筑的地下水问题以及矿床疏干等都要求了解地下水的运动规律。严格的数学推理,用解析求解仅能对少量的地下水数学模型有效。对于反映地下水流实际状况的复杂的数学模型只能用数值方法求解。因此地下水研究的数值方法已经受到很大的重视。

随着社会主义建设事业的蓬勃发展,研究复杂条件下地下水运动规律的要求日益迫切,加之电子计算机在我国已相当普及,因而很有必要推广数值方法,为此我们本着“洋为中用”的原则翻译了这本《地下水文学的数值方法》。

本书是介绍地下水运动数值方法的专著。全书共分七章。第一章介绍地下水的物理特性。第二章着重讲述反映地下水变量内在联系的各种微分方程的推导,也谈到了边界条件。第三、第四两章是地下水数学模型的有限差分化,导致线性代数方程组。第五章讨论所形成的线性代数方程组的解法。第六章介绍相似解法。第七章专讲有限单元法。

本书注意到非饱和与饱和地下水的关系,这是一个特点。在介绍数学方法时强调了它们在地下水研究中的应用情况。最常用的线性方程组的叠代解法讲的很详细。本书很重视有限单元法,从水文地质角度总结有限单元法也可以说是第一次,第七章的篇幅虽然不大,但是事实上第五章所叙述的线性代数方程组的解法几乎完全适用于有限单元法。

本书的不足之处是对大面积地下水综合利用问题忽略了,缺乏综合说明问题的实例。此外就本书的目的和对象来说有些数学推理也是多余的。

由于译者水平的限制,译文中会有许多缺点和错误,欢迎批评指正。

序 言

数值法是解地下水文学问题最有效的手段之一。我们需要解复杂的天然水文学问题，并不再用物理上失真的那些迫不得已的数学简化，因此对数值方法发生兴趣。

许多数值法的应用是简单的。例如，虽然解三对角线方程组的直接法的形成和研究需要繁冗的数学推理，但第五章所介绍的算法是简易的。而且计算中心有现成的子程序，用者只要把数据按规定格式排好，再调用相应的子程序，就可求解这些方程组。

不加思索地使用数值法是不适宜的。对问题采用不合适的方法会不收敛、不稳定，或者需要过量的计算时间。反之，适当的方法则会在很少的计算时间内给出收敛而稳定的解。因此有必要针对地下水文学的需要提出合适而完善的推导。这常常要用数学经验来阐明，往往会超出实际水文工作者的一般水平。故打算编写本书来给予适当的解说，使实际用者不感到困难。

每章前备有汇总本章主要论点的“导引”。有时也描述这一章的应用以及特定问题的算法和技巧。了解这些情况的读者可略去这些导引，而用其余部分如同用来求解微分方程那样作为地下水文学数值法的合适推导。

作者

目 录

前言——地下水文学问题的解	1
第一章导引	3
第一章 地下水的物理产状	4
1-1 地下水文体系	4
1-2 地下水的势	7
在地下水中的势	7
重力势	8
静水压势	8
渗透压势	9
吸附势	9
热势	9
化学势	10
地下水的总势	10
1-3 饱和水流的哈伯特力势	11
第二章导引	14
第二章 地下水流的理论	15
2-1 历史背景	15
2-2 用于不可变形介质的水流连续性方程	16
2-3 达西定律	20
2-4 描述不可变形介质中地下水流的方程	22
2-5 非饱和地下水流	22
2-6 饱和地下水流	24
2-7 饱和非承压地下水流	32
自由面水流	32
稳定的自由面水流	32
非稳定的自由面水流	34

关于饱和非承压地下水流的裘布依假定	36
2-8 地下水文学问题的解	37
第三章导引	39
第三章 应用于非稳定水流问题的有限差分法	42
3-1 前言	42
3-2 有限差分近似式的构成	43
3-3 对一维线性边界值问题的应用	45
显式近似	47
收敛性和稳定性	48
隐式近似	53
克兰克-尼科尔森近似	55
3-4 一维非线性地下水文学问题的解法	60
3-5 导数边界条件	64
3-6 二维空间问题	65
3-7 二维空间问题的ADI法	66
3-8 代数问题的线性化	69
道格拉斯-琼斯的预测-校正法	70
叠代法	70
外推法	70
显式预测法	71
交替的预测-校正法	71
线性化方法的评论	72
3-9 不规则边界问题	72
3-10 加大时间增量	74
3-11 理查森外推法	75
3-12 非稳定问题的其他方法	75
3-13 应用选例	76
应用于排水管水流的预测-校正法	76
应用于二维地下水流问题的ADI法	80
第四章导引	84
第四章 应用于稳定水流问题的有限差分法	86

4-1 前言	86
4-2 基础理论和术语	86
4-3 有限差分逼近	88
泊松方程	88
具有重力作用的非饱和稳定流的控制方程	91
4-4 边界条件的近似	93
一般情况	93
对称情况	96
4-5 非线性椭圆方程的问题	98
稳定的非饱和水流	98
稳定的饱和自由面水流	99
非稳定的饱和自由面水流	101
土壤水和地下水的非稳定流	102
4-6 收敛性	103
第五章导引	105
第五章 差分方程的求解	110
5-1 前言	110
5-2 直接法	111
消去法	111
三对角线方程组	112
块三对角线方程组	115
5-3 解线性方程组的叠代法引论	119
叠代和收敛的一般描述	119
向量和矩阵的范数	122
收敛准则	123
谱半径的估算	125
5-4 线性方程组的叠代法	126
连续超松弛 (SOR) 法	127
ω_{opt} 的理论确定	130
用于计算的 ω_{opt} 的估算	133
用于计算的估算 ω_{opt} 的卡雷法	134
块和线叠代	137

抛物线方程解的比拟	139
解线性代数方程组的 ADI 叠代法	140
选择加速参数	144
关于 ADI 的结论	147
强隐舍 (SIP) 法	148
5-5 非线性方程的叠代法	157
皮卡德叠代	157
牛顿叠代	158
5-6 叠代法的评价	159
第六章导引	160
第六章 地下水文学中的相似解	161
6-1 前言	161
6-2 无重力作用的一维水流	162
6-3 在压力影响下无重力作用的一维水流	170
6-4 无重力作用的径向水流	175
6-5 二阶常微分方程的数值解程序	184
第七章导引	189
第七章 有限单元法	192
7-1 前言	192
7-2 变分学的理论	193
背景	193
欧拉方程	194
非狄利克雷边界条件的处理	200
7-3 变分学的直接法	205
背景	205
瑞利-里兹法	205
有限单元法	209
7-4 有限单元法在地下水文学中的应用	212
稳定水流问题	212
非稳定水流问题	218
非线性问题	221
7-5 结论	222
附录 符号定义	223

前 言

地下水文学问题的解

水文工作者很关心地下水流问题的求解。为了预测和设计的目的需要解答。本书的目的是描述地下水流理论的要点，以及数值法在解有关问题时的用途。

地下水系问题可以借助于模型来求解。凡重现或描述这些体系的水力作用都可作为一个执行-预测模型。

在用于模拟地下水流的各种模型中，数学模型特别容易设计。数学模型是一个或一组数学表达式，描述体系中的水力关系。它一般是一个或一组微分方程，并连同辅助条件。对于大多数情形，最方便的模型形式是一个易于使用的数字计算机程序，它能使数字计算机在已知的辅助条件下解方程组。

有两类信息可用来安排任何地下水流体系的数学模型。第一类包括控制体系的变量，例如流量或势的定律。第二类包括描述约束体系的辅助条件。

三种辅助条件是有意义的。它们描述：

1. 体系的几何形状；
2. 系数矩阵或体系参数的水力特性；
3. 初始和边界条件。

连同控制方程和辅助条件的规定，一个数学模型才是完全的，并为求解作好准备。若地下水流体系的方程、几何条件、矩阵特性以及初始和边界条件是简单的，则可能求出所形成模型的严格解析解。不幸的是，大多数地下水流体系复杂到要求大量简化，才能考虑模型的解析解。许多其他这类体系复杂到解析模型是行不通的。

近年来，多种数值方法用来求微分方程的近似解。借助于数字计算机，这些方法使地下水流模型得到有用解的能力加强了。在讨论先决的背景理论后，本书以系统的形式提出了一些解这类地下水流体系的现行数值方法。

在第一、二两章中，介绍了地下水文学理论的概况。第一章主要进行物理体系的描述，第二章是有关的数学理论和重要方程的推导，本书的其他部分则阐明这些方程的数值解。

第三、四两章分别是有限差分法对非稳定和稳定流问题的应用。这些方法的应用导致代数方程组。第五章所讨论的这些代数方程的解是原问题的近似解。

在首先应用相似变换后，某些重要问题就便于求解了。在第六章内讨论了这些问题及用来处理它们的数值法。

相当新的有限单元法和相关的变分法正在发展为重要的数值手段。第七章是这种方法的入门。

书后的附录是符号定义。

第一章导引

节1-1 描述地下水的产状和运动以及岩土物质的水文性质。在非饱和带中的水是处在小于大气压的压力作用下,称为“张力”或“吸力”。在饱和带中的水是处在大于大气压的压力作用下。这两个带由水面分开,沿着这个面的水压等于大气压。

利用节1-2中所讨论的纯量——势,最容易描述地下水的产状和运动。在某点的势是把一个试验的水体由静止状态的土-水体系中另一特定的参考点运移至该点所需要作功的度量。当以水的单位重量的能量来表示时,则势的量纲为长度,称为“水头”。总势的梯度与水运动的作用力成比例。

在饱和的地下体系中,总势有两个主要分量,一个重力势和一个正的静水压势,如式(1-6)所示。在非饱和的地下体系中,总势也有两个主要分量,一个重力势和一个负的毛细水势,如式(1-4)所示。在非收缩的土中,毛细水势主要用毛细水吸力来推导;在可收缩的土中,则主要用渗透压吸力来推导。

节1-3表明,对于饱和的地下体系,总水头以式(1-18)来描述。

第一章

地下水的物理产状

1-1 地下水文体系

实质上,所有地表水和接近地表的水是作为一个单一的大水文体系的一部分而存在和运动的。水在这个体系中的循环是用水循环来描述的。这个循环现象是由海洋至大气至大陆表面,然后直接由陆地或至少在一段时期内以地下水形式再回到海洋。当然,别的途径也是常有的。循环水在地表下面停留的期间称为地下水。这里的研究主要针对地下水。

地下水存在于所谓“空隙、间隙、孔隙或孔隙空间”的岩土空穴中。原生的间隙是由控制地层成因的地质过程来形成的,出现在沉积岩和火成岩中。在岩石形成以后再发展次生间隙。例如节理、裂隙、溶洞和动植物所形成的空穴。这里所提出的分类法主要适用于岩土格架中的空穴是连通的特殊孔隙的情况。这种方法对节理、裂隙和溶洞的适用性取决于这些空穴与那种特殊格架的孔隙的几何相似性。

不被土粒所占的那部分可称为孔隙空间,或称为空隙。

孔隙率定义为

$$n = \frac{B_v}{B_o} = \frac{B_o - B_p}{B_o} \quad (1-1)$$

式中 n ——孔隙率;

B_o ——孔隙介质的容积;

B_p ——各个固粒的总体积;

B_v——空隙的总体积。

有效孔隙率最为重要。这种孔隙率是水可流出和流入的连通空隙。此后当用到孔隙率时假设均为有效孔隙率。

岩土格架的孔隙率的最清晰的物理特性是它的连续性，意思是，在格架中的一点到另一点的路线完全位于孔隙空间之中。由于它的连续性，孔隙格架能传递流体，就我们的观点而言，最显著的是水。根据情况和观点，所谓的“渗透性”、“有效渗透性”、“渗透系数”、“渗流系数”、“导水性”以及“毛细导水性”等是用来描述传递流体的能力的。间隙渗透率*这个名词现在一般只作为介质本身的特性，不同于以上的名称，它们适用于介质和流体。

由地表至某一不同深度，仅部分格架孔隙由水填满。这样的水称为土壤水，这种区域为非饱和带或包气带。这个带是起作用的透水岩石的间隙没有被水填满（暂时没填满不算）。这种水处于小于大气压的压力作用下。于是，在包气带的非饱和土中，存在三种物相：固态格架，液态水和包括湿气的土壤气体。由于三相及其接触面的存在，非饱和水的产状和运动的数学描述比饱和水复杂。

按迈因策尔的材料，包气带分成三个部分：毛细水带、中间带和土壤水带。最下面的那个毛细水带中的压力小于大气压，它位于饱和带之上且包含毛细间隙，它的一部分或全部被水充填并与饱和带中的水连通，但被这个带以上的与重力作用相反的毛细力所吸住。中间带是位于土壤水带和毛细水带之间的那一部分，它包含着中间状态的饱气水。最上面的那个土壤水带是紧接在岩石圈表面以下的那一部分，由于植物作用或土壤蒸发作用，有显著的水量通过这个带流向大气。虽然为了说明的目的，包气带的传统划分是有用的，但必须把它作为一种技巧来认识。包气带可

* 编者注：“间隙渗透率”(intrinsic permeability)，在《地下水非稳定流理论的发展和应用》一书中译为“内在渗透率”。

以更有效地作为一个单一的水分连续介质来看待。事实上，整个地下水文学领域，包括包气带和饱和带，现在可作为一个单一的连续介质来看待。

潜水面定义为水压等于大气压的那个面。可由井中水位的高程来确定。对于大多数实用目的来说，潜水面是分开包气带和下面饱和带的面，而包气带事实上仅在毛细水带以上才是非饱和的。

饱和带的格架孔隙除了含有少量的气体外是被水充满的。这种水称为地下水或自由水。因为地下水处在大于大气压的压力作用下，它可自由地流向井中或水面以下的其他空间。相反，要从包气带中取水，必须对土壤水使用强力或吸力。

含水层是具有显著导水性的岩体格架并且至少部分地被水饱和。非承压含水层是两种主要含水层之一。另一种是承压含水层。非承压含水层在它的上面有一个潜水面且水与土壤大气直接相连。

凡地下水被上面相对不透水的地层覆盖，在大于大气压的压力作用下，则会出现承压水。在打入这种含水层的井中，水位会高出覆盖层的底板，升到一定的高程，这个高程定义为测压面。承压含水层中的压力部分地依赖于补给区的相对高程。所谓补给区就是覆盖层升高至地表或在地下终止的地方，于是含水层成为局部不承压而可得到补给。

在数量上明显地既不导水也不存水的岩体格架称为隔水层。这样的介质能把水控制在承压含水层中。一个不透水层只存水但不能大量导水。弱透水层存水且区域性地传导大量水，但不能充分供给每个井。这些均与含水层不同，后者既存水且足以给井供水。

1-2 地下水的势

在地下水中的势

以在各种不同方向作用于水的各种力所组成的向量场来描述作用在地下水上的力。当这些力平衡时，则地下水处于静态平衡而不产生运动。当这些力不平衡时，这种有限的合力引起水的运动。

因为力是向量，必须根据向量和的定律，把分量加起来，以便得到许多力的合力。这是麻烦的，需要几何作图。幸运地，在大多数孔隙水流情况中，利用引进纯量——势的概念可避开这个困难。势可用代数和的定律来相加。

有不同途径来确定势函数，包括古典水动力学的速度势。根据方便和对有关问题的适用情况来进行最终的选择。对于地下水，势的梯度与水运动的力成比例。进而言之，因为势是相对于任意参考面而定义的，于是只与特定点之间的差异相关。对于我们的目的，对一个静的体系来定势差是方便的， B 的势大于 A 的那个量等于每个单位量的作功，在微小的试验水体由 A 向 B 的运动期间，必须在这个水体上作功来克服作用在它上面的力。

博尔特和米勒所定义的土壤水总势容易加以引伸，把地下水包括在内。他们把每克水的最小能量作为总势，这是为了把一个微小的试验水体从一个规定的参考状态移至静态的土壤水体系的液相中的任一点所需要消耗的能量。这种参考状态一般设为同一温度的一个水池，其水面具有给定高程点的大气压力。在土壤会由参考状态自动吸附水的情况下，这个势是负的。在任何静态土壤水体系中，总势并不随点而异。

作者们发现以单位重量水的能量来表达势最为方便。利用这个定义，势具有长度的量纲，称为水头。

总势取决于下面所讨论的分势。

重 力 势

地球上所有的水都处在地球重力场之中。重力势是把微小质量或体积从任意地设重力势为零的基准面移至重力场中某一给定位置所需要的能量。

采用我们的定义，把势作为单位重量的能量，则

$$\psi_g = z \quad (1-2)$$

其中 ψ_g ——重力势，

z ——在参考基准面以上的高程。

于是重力势只取决于基准面以上的高程，称为“位头”。

静 水 压 势

在水面处取静水压力为零，这相当于绝对压力等于大气压力。那么，在地下水中的所有压力是相对于大气压而言的，或者是计示压力。

在水面以下，当静态平衡时，静水压力随深度而增加。当以单位水重的能量来表达时，经常看作为“压头”。

为了从水位以上非饱和土中取水或阻止客水侵入土中，则必须给予吸力或负压力。施加的吸力越大，取水越多，而且当土壤与吸力平衡时，土壤水分越低。作用于土壤的外来吸力与土壤本身克服脱水吸力所保留的水量之间的关系是水分特性的或者水分-贮存的曲线。

若从变干时不收缩的岩土格架中取水，空气进入孔隙空间且在孔隙空间存在空气-水接触面。这种弯曲的接触面由毛细水力来保持。故作用于接触面上的表面张力提供了克服外来吸水的土壤持水机制。与弯月面上蒸气-压力的不足相关的毛细力是同毛细管中液体上升相适应的。这是克服外来吸力而持水的几种力的一种。进而言之，这是在非饱和和岩土格架中产生负压和负压势的一种机制。

渗 透 压 势

出现在地下水中的第三种势是渗透压势。

阳离子或带正电荷的粒子经常与粘土那样大小的土粒分离。于是土粒表面会有负电荷，这种土粒称为胶团。因为带有相反电荷粒子的吸引，在带负电荷胶团的邻近出现加大的阳离子浓度。在胶团表面的这种电荷的排列称为“电”双层。因为两胶团之间所增加的离子浓度超过远水的浓度，故渗透力趋向于把水移至这些胶团之间，有分离它们的趋势。渗透压势的存在，趋向于在离子浓度大些的方向作用于水，即朝向土粒并进入电双层。

在由于变干而收缩的土壤中，渗透压势是重要的。如果对有这种现象的土壤给以吸力，由于外来吸力使水移动，会释放胶团之间的静水压力。于是土壤会由于变干而紧缩。类似地，土壤会由于吸水而膨胀。这种土壤含有粘土矿物和腐植质。蔡尔兹把这种土的持水作用看为由于土粒相斥而持水的机制。它是主要的负压源，用来克服作用于干缩土的外来吸力。

吸 附 势

吸附势是由于格架中水和格架粒子之间的引力而形成的。它们包括短期力和长期力。

短期力有两种。一种是由表面原子的电子云和水分子之间的局部作用而形成的化学力所组成。另一种是范德瓦尔斯力。长期粘力是起因于极化的水的正极和源于带负电荷土粒的静电场之间的吸引力。

热 势

当热梯度存在时，由于蒸气扩散或者蒸气扩散和毛细力结合，水分运动是显然的。但只有当地下水中的热梯度相当大时，才能产生大量的水转移。在有大热梯度靠近地面的地方，水转移最为重要。在深处，热梯度一般是小的。对于一定地区，由于深处小