微积分

（下册）

上海交通大学数学系　编

上海交通大学出版社

微 积 分

（下册）

上海交通大学数学系　编

上 海 交 通 大 学 出 版 社

内 容 简 介

本书是在原上海交通大学应用数学系编写的《高等数学》使用多年的基础上改编而成的微积分教材.本册主要包括了空间解析几何、多元微积分和级数的内容.全书共分5章:向量代数和空间解析几何;多元函数微分学;重积分;曲线积分和曲面积分;级数.

本书在保持微积分教材的传统框架下,概念论述简洁清晰,结构力求符合近代数学的特点,强调微积分课程的基本思想和方法.全书给出了大量例题,每章编排有配套习题和补充题,可供不同层次学生选用.书末附有全部计算题的答案.

本书可作为高等学校非数学专业的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分.下册/上海交通大学数学系编.—上海:上海交通大学出版社,2003

ISBN7-313-03276-5

Ⅰ.微... Ⅱ.上... Ⅲ.微积分—高等学校—教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第110110号

微积分(下册)

上海交通大学数学系 编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路877号 邮政编码200030)

电话:64071208 出版人:张天蔚

上海交通大学印刷厂 印刷 全国新华书店经销

开本:880mm×1230mm 1/32 印张:10.875 字数:340千字

2003年2月第1版 2003年2月第1次印刷

印数:1~5050

ISBN7-313-03276-5/O·151 定价:20.00元

前　言

微积分是高等学校的一门重要的基础课程，在培养高素质人才的过程中起着不可替代的作用. 国内外有大量的微积分教材，同时由于数学对现代科技和文化产生越来越大的影响，对这门传统课程教材的改革要求也日益迫切. 事实上，随着大学数学教学改革的进行，已经有一批新教材出版，并且产生了一定影响.

本教材是在原上海交通大学应用数学系所编《高等数学》教材使用多年的实践基础上重新编写的.

近年来上海交大基础课程的内容和教学有很大的变化，微积分课程面临的情况是：一方面由于科学技术的发展和提高学生综合素质的要求，各种相关课程的增设，使得数学课程在基础课教学中的比重相对减少；另一方面由于数学在各领域中的广泛应用，对学生数学素养和应用能力的要求则明显提高. 在这种情况下，编写一本突出基本思想方法、简明扼要、便于学习、适应教学新形势的微积分教材就十分必要了.

在本教材中，编者力图体现下列特点：

1. 努力将微积分的基本思想和方法融入各部分内容的阐述之中，以突出包括极限、导数和积分等重要概念的内涵以及它们之间的有机联系. 例如对积分的概念，从背景介绍、实例引述和定义解释直至计算应用中始终强调“分割求和”这一基本思想，而且无论是一元定积分、重积分或是曲线、曲面积分，均围绕这一思想加以展开.

2. 对数学中的一些常见重要方法在教材中加以重视. 例如两分法这一在理论和计算中有效而朴素的方法以及证明数学命题常用的辅助函数法等，在本教材中都给予了有意识的关注.

3. 作为探索，在微积分中适度渗入了现代数学观点和表达形式. 本教材通过映射导出函数概念，对线性齐次微分方程的解集合指出了其线性空间的实质，在多元函数部分采取向量表示，指出二维 Green 公

式和三维 Gauss 公式具有相同表达形式，从而揭示它们是微积分基本定理在多元情况下的推广，以及某些数学符号的采用都是这一方面的一些尝试.

向量代数和空间解析几何一章与传统高等数学教材这一部分的处理有所不同，无论在内容或表示形式上都充分考虑到与线性代数的相关部分的一致.

4. 本教材在内容的安排和阐述上作了慎重的选择和推敲，力求朴素明了，深入浅出；对运算技巧尤其是积分方法的介绍有所淡化，这是由于功能强大的计算工具已经可以轻易解决问题而这些技巧并未涉及基本的数学思想和方法.

5. 本教材在每章(上册)开端用简洁的引言介绍有关内容的历史和作用，指出微积分发展的线索，以提高读者对该课程的兴趣，从而引导读者的深入学习.

6. 例题丰富是本教材所保持的原《高等数学》教材的特点之一. 各种典型例题的介绍有助于对微积分基本方法尤其是运算法则的领会和掌握，在学时偏紧的情况下也利于读者自学.

本书从整体框架而言并未改变传统微积分的基本结构，而就具体部分的处理而言则作了一些改革. 我们的主要目的是在教材中注重体现微积分的思想和基本方法而不强调某些法则和公式的套用. 当然，这些改革毫无疑问仍以适宜于教学为最大前提.

本书分上、下两册，上册内容为一元微积分，下册为多元微积分.

本书适用于高等院校非数学专业作为微积分(高等数学)教材，参考教学时数为 162～180 学时，书中个别小节或内容标以“*”的，读者和教师可根据实际情况选择是否采用.

本书各章分别由乐经良、景继良、孙薇荣教授和王承国副教授编写，全书由乐经良统稿. 各章后的习题由郑麒海、钱芝蓁、汪静和何铭副教授选编，本册 9,10 两章插图由何铭制作.

本书的编写得到上海交通大学数学系和国家工科数学教学基地的支持，也得到交大教务处的关心和支持，上海交通大学出版社的陈克俭和孙岐昆两位编辑认真细致的工作保证了本书的顺利出版，编者在此

表示衷心的感谢.

尽管本书编者大多有微积分教学的长期经验,也大致了解国内外各种微积分教材的内容与特点,然而对本教材的编写还是不能驾轻就熟,对许多内容的处理虽均斟酌再三依然未觉满意,深感这一数学基础课教材编写之不易.限于编者水平,加上时间仓促,本书难免有缺点乃至错误之处,敬请国内同行和读者不吝指正.

编者

2002年10月

目　　录

第 7 章　向量代数与空间解析几何

一元微积分的方法也可用于讨论多元函数，多元函数的自变量是多元数组或者称为向量.

本章将讨论三维向量的概念、运算、相应的几何意义及其坐标表示；进而讨论在空间直角坐标系下的直线、平面的方程以及它们的位置关系.另外介绍典型的二次曲面及其标准方程.

7.1　向量

7.1.1　向量的概念

在中学物理学中我们就知道，有些物理量仅由数值大小来度量，例如时间、距离、质量和温度等，称之为**标量**；而另一些物理量不仅有大小而且有方向，例如力、速度和加速度等，称之为**向量**.

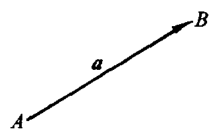

图 7-1

向量在几何上可以用既有长度又有方向的线段(**有向线段**)来表示，起点为 A，终点为 B 的有向线段记为$\overrightarrow{AB}$(见图 7-1)，它代表了一个向量：向量的大小等于$\overrightarrow{AB}$的长度，向量的方向与$\overrightarrow{AB}$的方向一致.

我们通常还将有向线段$\overrightarrow{AB}$表示的向量就称为向量$\overrightarrow{AB}$.为方便计，向量还可用一个黑斜体字母表示，例如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 等，在手写时也可用带箭头的字母表示，例如 $\vec{a},\vec{b},\vec{i},\vec{j}$ 等.

向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**长度**或**模**，记为 $\|\boldsymbol{a}\|$；模为 1 的向量称为**单位向量**；模为零的向量称为**零向量**，记为 $\mathbf{0}$，零向量的方向规定为任意的，即可根据情况任意指定.与 $\boldsymbol{a}$ 大小相等方向相反的向量称为

$\boldsymbol{a}$ 的负向量，记为 $-\boldsymbol{a}$.

若向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小和方向均相同，则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **相等**，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

向量相等的定义意味着向量在平移下保持不变，这样的向量称为**自由向量**，在不特别说明的情况下，本教材中的向量均指自由向量.

若将向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平移到同一起点，而表示它们的有向线段间的夹角为 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，则称角 θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角（见图 7-2），记为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$；零向量与任一向量的夹角规定为任意的，即可以根据需要取 0 到 π 之间的任何值.

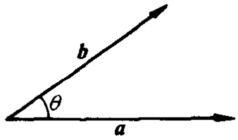

图 7-2

若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 等于 0 或 π，则表示 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的有向线段是平行的，此时称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是**共线**的，记为 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$；若 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 等于 $\frac{\pi}{2}$，则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 正交，记为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

7.1.2 向量的线性运算

向量最基本的运算是加法和数乘，这两种运算称为向量的线性运算.

定义 7.1 对向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，作有向线段 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则有向线段 $\overrightarrow{AC}$ 所表示的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和（见图 7-3），记为

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

求和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的运算称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**加法**，求向量和的方法常称为**三角形法则**.

求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和的另一方法：作有向线段 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以 AB,AD 为邻边作平行四边形 $ABCD$，则不难看出对角有向线段 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（见图 7-4），这样求向量和的方法常称为**平行四边形法则**.

向量的加法满足下列运算律：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ （交换律）；

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ （结合律）；

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$；

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

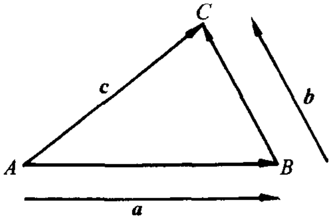

图 7-3

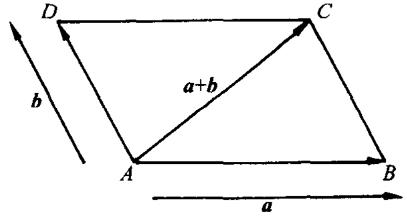

图 7-4

运算律(1)由向量加法的平行四边形法则是显然的;(3),(4)由零向量和负向量的定义及加法的三角形法则立即可得;运算律(2)则由图 7-5 验证.

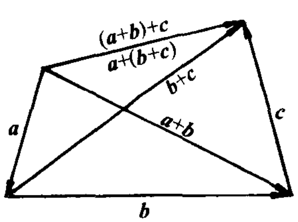

图 7-5

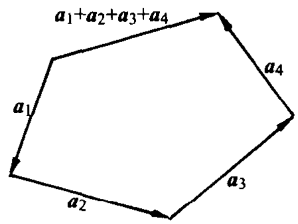

图 7-6

由加法的结合律,我们可以直接写出向量连加的形式:

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

且容易看出只要将 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 依次首尾相接,则由 $\boldsymbol{a}_1$ 的起点到 $\boldsymbol{a}_n$ 的终点的有向线段所表示的向量就是它们的和,图 7-6 给出的是 $n=4$ 时的情况.

利用负向量我们可以定义向量的减法:

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\overset{\text{def}}{=\!=}\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

向量的减法也可以由三角形法则表示(见图 7-7).

由于三角形两边之和大于第三边,立即得到

$$\|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}\|\leqslant\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|.$$

根据加法的运算律和减法定义,可以推得以下的等价关系:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}.$$

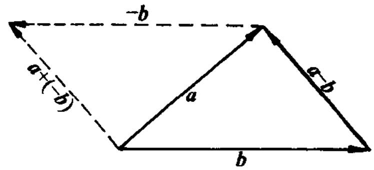

图 7-7

这表明对向量等式运算时，如同对代数等式的运算那样，可以进行"移项".

定义 7.2 对实数 λ 和向量 $\boldsymbol{a}$，定义**数乘向量**是一个向量，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$；它的模 $\|\lambda\boldsymbol{a}\|=|\lambda|\cdot\|\boldsymbol{a}\|$，它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反(见图 7-8).

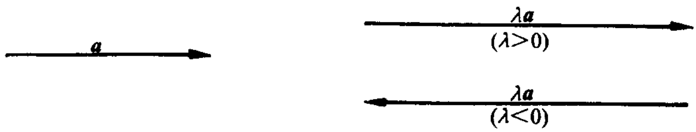

图 7-8

求数乘向量的运算称为**数乘**.

数乘向量满足向量下列运算律：

(1) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；

(2) $\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\mu\lambda)\boldsymbol{a}$ (结合律)；

(3) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ (对数的分配律)；

(4) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ (对向量的分配律).

数乘运算律(1)，(2)，(3)由数乘的定义是显然的，(4)可以由加法的三角形法则和相似三角形的性质推得(见图 7-9).

向量的集合在定义了加法和数乘运算后称为(三维)**向量空间**或**线性空间**.

显然若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，那么 $\frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{a}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量，记为 $\boldsymbol{a}^0$，从而 $\boldsymbol{a}=\|\boldsymbol{a}\|\boldsymbol{a}^0$.

从数乘的定义易知：

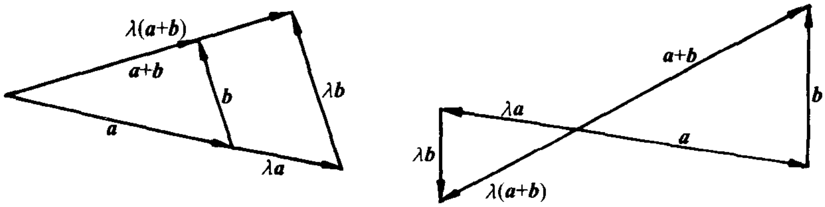

图 7-9

命题 7.1 若 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$,那么 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是,存在实数 λ,使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

利用向量的线性运算,有时可方便地证明一些几何命题.

例 7.1 四边形 $ABCD$ 的对角线相互平分,试证 $ABCD$ 是平行四边形(见图 7-10).

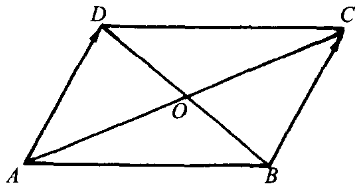

图 7-10

证 设对角线 AC 和 BD 的交点为 O,那么就有 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC},\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$,从而

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BC},$$

即

$$\overrightarrow{AD}/\!/\overrightarrow{BC},\qquad \|\overrightarrow{AD}\|=\|\overrightarrow{BC}\|,$$

故知 $ABCD$ 是平行四边形.

若将向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的起点移至同一点时,这些向量的起点和终点均在同一平面上,则称向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 是**共面**的.

命题 7.2 若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面,而 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,那么存在实数 λ 与 μ,使得

$$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.$$

证 由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线可知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为非零向量,取一定点 O 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,则 $OABC$ 共面,过 C 点作 OA 的平行线交 OB 所在的直线于 F,作 OB 的平行线交 OA 所在的直线于 E(见图 7-11),则依向量加法

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}.$$

又因$\overrightarrow{OE}/\!/\overrightarrow{OA}$，由命题 7.1 可知存在实数 λ，使得

$$\overrightarrow{OE}=\lambda\overrightarrow{OA}=\lambda\boldsymbol{a},$$

同理可得存在实数 μ，使得

$$\overrightarrow{OF}=\mu\overrightarrow{OB}=\mu\boldsymbol{b},$$

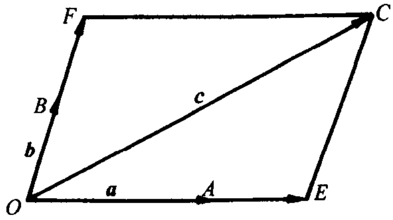

图 7-11

从而$\overrightarrow{OC}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.$$

进而我们有以下结论.

命题 7.3 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是不共面的 3 个向量，那么对任一向量 $\boldsymbol{d}$，存在实数 λ,μ,ν，使得

$$\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}.$$

这命题的证明方法类似证明命题 7.2 的方法，留给读者作为练习.

我们称 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的**线性组合**，命题 7.3 意味着任一向量均可表示为 3 个不共面向量的线性组合.

7.1.3 向量的内积

定义 7.3 对向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}),\boldsymbol{b}$，称实数 $\|\boldsymbol{b}\|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$为向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的**投影**，记为 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$，即

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{b}\|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).$$

设有向线段$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}$ 所在直线为 l，在点 A 与 l 所确定的平面内由 A 向 l 作垂线，记所得的垂足为 A'，则称 A'是点 A 在 l 上的投影；同样可以得到点 B 在 l 上的投影 B'（见图 7-12），因此 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ 就是有向线段$\overrightarrow{A'B'}$的大小，当$\overrightarrow{A'B'}$与 $\boldsymbol{a}$ 同向，$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}>0$；当$\overrightarrow{A'B'}$与 $\boldsymbol{a}$ 反向，$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}<0$. 通常将$\overrightarrow{A'B'}$称为向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的**投影向量**. 容易看出

$$\overrightarrow{A'B'}=(\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}^0.$$

投影有如下的线性性质：