USTC 中国科学技术大学 21世纪教改系列教材

群与代数表示引论

冯克勤　章　璞　李尚志　编著

中国科学技术大学出版社

中国科学技术大学21世纪教改系列教材

群与代数表示引论

冯克勤　章　璞　李尚志　编著

中国科学技术大学出版社

2003 · 合肥

内 容 简 介

本书介绍群与代数表示的基本理论与方法，侧重于有限群的常表示理论和有限维半单代数的表示理论．在强调线性代数方法的同时，也突出体现了群表示与代数表示的联系．

本书假定读者学过线性代数和近世代数．

本书可作为数学系研究生公共基础课教材和高年级本科生选修课教材，也可作为相关专业的参考书．

图书在版编目 (CIP) 数据

群与代数表示引论 / 冯克勤，章璞，李尚志编著． — 合肥：中国科学技术大学出版社， 2003.1
(中国科学技术大学 21 世纪教改系列教材)
ISBN 7-312-01465-8

I. 群 ··· II. ①冯 ··· ②章 ··· ③李 ··· III. ①群论 — 高等学校 — 教材 ②代数表示 — 高等学校 — 教材 IV. O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 086815 号

中国科学技术大学出版社出版发行
(安徽省合肥市金寨路 96 号， 230026)
合肥学苑印刷厂印刷
全国新华书店经销

开本：850×1168/32 印张：10.25 字数：266 千
2003 年 1 月第 1 版 2003 年 1 月第 1 次印刷
印数：1—2000 册
ISBN 7-312-01465-8/O·263 定价：15.00 元

前 言

1828 年， 17 岁的 E. Galois 发现 5 次和 5 次以上代数方程的根式可解性是由这个方程导出的某种代数结构的性质 (即现今称为方程的 Galois 群的可解性) 所决定的. 这一天才的发现不仅预示着以代数结构为研究对象的近世代数的开始，更重要的是，由于群能够描述自然界基本规律之一的对称性，从而成为现代科学中最核心的数学概念和工具之一. 杨振宁先生曾经说过："群论的美妙和它在物理中应用的深入对我后来的工作有决定性的影响."

群对称是现代数学的灵魂，而研究群对称的基本工具是群表示论. 从现代代数学的观点来看，研究一个代数结构，除了直接了解其内部构造和性质外，有效的方法是让这个代数结构 (例如群或域上的代数) "作用" 在另一个相对简单的结构上 (例如集合或向量空间)，通过考察这种作用的效果而达到理解这个代数结构本身的目的. 这一想法就是表示论的原始思想. 它在后来的发展中如此重要和富有成果，以至于现代表示论不仅以其优美和在数学的众多分支中的应用而别具魅力，而且在物理学、化学、天文、建筑、信息与通信乃至找矿等自然科学与技术领域里都有广泛的应用 . I. Gelfand 曾说过："All of mathematics is some kind of representation theory." E. Vinberg 曾称："The theory of linear representations of groups is one of the most widely applied branches of algebra."

在代数结构的表示中，群与代数的表示最为基本，两者之间

的联系和相互影响也很直接. 在历史的发展中, 有几个里程碑是值得回顾的.

1843 年, W. R. Hamilton 发现四元数代数, 被认为是有限维代数的起源; 而 1896 年, F. G. Frobenius 发现有限群的特征标理论, 标志着群表示论的诞生.

有限群表示论在发展的初期就显示出在群结构中的应用, W. Burnside 于 1904 年用特征标理论证明的关于 $p^a q^b$ 阶群的可解性定理直到 1972 年才有纯群论的证明; 更令人惊奇的是, Frobenius 关于真正规子群存在的一个充分条件至今尚无纯群论的证明.

1905 年, Frobenius 的学生 I. Schur 利用现今称为 Schur 引理的工具对 Frobenius 的工作作了系统的简化, 其方法是线性代数的.

1908 年, J. H. M. Wedderburn 建立了现在称为 Wedderburn-Artin 定理的半单代数的基本理论; 到了 1929 年, E. Noether 在她的奠基性长文《 Hyperkomplexe Grössen und Darstellungs Theorie 》中用有限维代数上的模统一了有限群的常表示和有限维半单代数的表示. 在以 E. Noether, E. Artin 和 R. Brauer 为首的德国学派的工作中, 半单代数及其表示取得现代的形式, 并大部分地推广到具有降链条件的环上.

而在 20 世纪 20 年代中期, Schur 和 H. Weyl 将有限群的表示理论推广到紧群上, 开始了无限连续群的连续表示的研究. Peter-Weyl 定理推广了著名的 Fourier 展开定理, 成为紧群上调和分析的基础.

1935 年, Schur 的学生 Brauer 开创了有限群模表示论的研究, 即在特征整除群的阶的域上的有限群表示论, 这为有限单群的分类提供了工具上的准备. 有限群模表示论至今仍是数学中十分活跃的重要领域.

1956 年, N. Jacobson 出版了《Structure of Rings》一书, 实际上也将有限维代数的理论推广到了无限维代数上. 在群的模表示论和非半单代数的表示中, 仅仅研究不可约表示是远远不够的, 而需要研究不可分解表示. Jordan-Hölder 定理和 Krull-Schmidt-Remark 定理对于非半单代数的表示是两条基本的定理.

一方面, Brauer 和 R. M. Thrall 于 1940 年左右关于 Brauer-Thrall 猜想 (即如果有限维代数 A 上的不可分解表示的维数是有界的, 则 A 是有限表示型, 即 A 仅有有限多个不可分解表示) 刺激了现代代数表示论的发展; M. Auslander 和 A. V. Roiter 分别于 1974 年和 1968 年用不同的方法独立解决了 Brauer-Thrall 猜想, 被认为是现代代数表示论的开始. 另一方面, Auslander 和 I. Reiten 关于几乎可裂序列的理论反过来在有限群的模表示论中又起着重要的作用. 这种交叉式的发展在群与代数表示中显得十分突出.

自 1991 年起, 我们在中国科学技术大学数学系为研究生开设"群与代数表示引论"公共基础课, 本书是在讲稿基础上反复修改而成的.

虽然用半单代数上的模统一地处理有限群的常表示和有限维半单代数上的表示更为简洁, 但考虑到听众不仅有数学系的研究生和高年级本科生, 也有其它系的研究生和高年级本科生, 我们选择了只用线性代数, 开门见山地讲述群表示的基本概念和特征标理论. 实践表明, 这种处理无需很多预备知识就可直接进入表示论, 易于理解, 同时也体现出线性代数与表示论的直接联系. 待到前两章结束后, 再系统地介绍有限维代数上的模, 这时学生已有较多的感性认识, 同时也为讲述诱导表示提供了一般的语言和工具.

本书是群与代数表示的基础教材，对于有限群的表示，只涉及常表示论，当然，也通过例子说明了常表示与模表示的本质区别；对于有限维代数的表示，只介绍基本的理论，未涉及现代(非半单) 代数表示论；对于紧群的表示，只介绍紧致拓扑群的表示，未触及紧 Lie 群的表示．在处理方法上，前两章中我们强调线性代数的方法，而在后三章中则试图体现群与代数表示的联系和相互影响．在流行的群表示论教科书中， J. P. Serre 的书 [S] 是用线性代数写成的，但仅对复表示而言．尽管从复表示到一般的常表示没有本质的困难，但我们还是乐意作若干改变，将前两章的结果叙述成一般常表示的形式，而仍然保持线性代数的写法不变．

全书共分 6 章．第 1 章介绍群表示的基本概念，第 2 章讲述特征标理论，第 3 章是关于代数上的模，第 4 章讲述诱导表示与诱导特征标，第 5 章证明了 Brauer 和 Artin 关于诱导特征标和有理特征标的定理以及另外几个重要的定理，第 6 章介绍紧群上的表示．

本书力求条理清晰，通俗易懂；讲清思想、方法和线索；体现群与代数表示的联系；配以较多例题；几乎每节后都有难度适中的习题，有的是很重要的结论．我们鼓励读者做完这些习题，较难的习题均配有提示．

本书可作为高等学校数学系研究生和高年级本科生 “群与代数表示” 课程的教材，一学期周 4 或周 3 学时，亦可作为相关专业的参考书．带星号的内容可略去不讲．

在成书的过程中，主要参阅了 [AB], [CR2], [D], [Jac], [I], [S], [Sim], [Vin], 曹锡华 - 时俭益 [CS], 丘维声 [Q], 曹锡华 - 叶家琛 [CY] 等文献．

刘绍学教授对于本书的写作始终给予热情的鼓励，并提出宝

贵意见．成书过程中得到程艺教授的支持和龚升教授的关心．各届同学也对讲稿提出了修改之处，例如徐松昀、黄华林、李立彬、李锦嘉、宋柏林、孙建华、许彬、方明、储诚浩、郭学军、叶郁、傅广宇、王艳华、陈小伍、杜家春等，特别是武清宇协助仔细校对．余华敏女士耐心地打印了本书的初稿．

本书的写作得到中国科学技术大学教务处和研究生院的资助，在此一并致谢．

作者热诚欢迎读者提出宝贵意见．

冯克勤　章　璞　李尚志

2002 年 6 月

符 号 说 明

II.3.2	第 2 章 3.2 小节
定理 II.3.2	第 2 章 3.2 中的定理
定理 3.2	本章 3.2 中的定理
习题 I.3.4	第 1 章 §3 后习题 4
习题 3.4	本章 §3 后习题 4
习题 4	本节后习题 4
:	定义为
$\mathbf{R}$	实数域
$\mathbf{C}$	复数域
$\mathbf{Z}$	整数环
$\mathbf{Z}_p$	p 阶素域
$\mathbf{Q}$	有理数域
ϕ	空集
$A-B$	集合 B 在集合 A 中的余集
$\subsetneq$	真包含于
$\supsetneq$	真包含
$\mathbf{R}^n$	n 维欧氏空间
$\mathbf{C}^n$	n 维酉空间
S^1	单位圆周
$x \mapsto y$	x 映到 y
$m\|n$	m 能整除 n

$m \nmid n$	m 不能整除 n
$\equiv$	同余
$\cong$	同构
$\oplus$	直和
$\times$	卡氏积 (或直积)
$\otimes_F$	在域 F 上的张量积
$\otimes_A$	在代数 A 上的张量积
δ_{ij}	Kronecker 符号
$\mathbf{1}_V$	V 的恒等变换
1_F	域 F 的单位元
$\mathbf{1}_G$	群 G 的单位表示或单位特征标
$\overline{A}$	集合 A 的闭包
$\|G\|$	有限集 G 中所含元素的个数
$\underline{\mathbf{dim}}M$	模 M 的维数向量
D_n	$2n$ 阶二面体群
S_n	n 次对称群
A_n	n 次交错群
$\mathbf{H}$	四元数代数
$M_n(F)$	域 F 上 n 阶全矩阵环
$GL_n(F)$	域 F 上 n 次一般线性群: F 上 n 阶可逆矩阵的乘法群
$SL_n(F)$	域 F 上 n 次特殊线性群: F 上行列式为 1 的 n 阶矩阵的乘法群
O_n	n 阶正交群 : $\mathbf{R}$ 上 n 阶正交矩阵的乘法群
SO_n	n 阶特殊正交群 : $\mathbf{R}$ 上行列式为 1 的 n 阶正交矩阵的乘法群
U_n	n 阶酉群: $\mathbf{C}$ 上 n 阶酉阵的乘法群

SU_n	n 阶特殊酉群： $\mathbf{C}$ 上行列式为 1 的 n 阶酉阵的乘法群
$GL(V)$	一般线性群
$H \leq G$	H 是 G 的子群
$N \lhd G$ 或 $G \rhd N$	N 是 G 的正规子群
$[G : H]$	子群 H 在 G 中的指数
G'	群 G 的换位子群
$G^{(i)}$	群 G 的第 i 次换位子群
$C_G(H)$	H 在群 G 中的中心化子
$N_G(H)$	H 在群 G 中的正规化子
$C_G(x)$	元素 x 在群 G 中的中心化子
$Z(G)$	群 G 的中心
$Z(A)$	代数 A 的中心
$\mathrm{rad}(A)$	代数 A 的 Jacobson 根
$\mathrm{rad}(M)$	模 M 的 Jacobson 根
$\det(A)$	矩阵 A 的行列式
$N \rtimes H$	正规子群 N 与子群 H 的半直积
${}^gH$	子群 H 的共轭子群 gHg^{-1}
$\mathrm{ann}\,(M)$	模 M 的零化子
Im	像
Ker	核
tr	迹
ρ_{reg}	正则表示
χ_{reg}	正则表示的特征标
χ_ρ	表示 ρ 的特征标
$\deg\rho$	表示 ρ 的次数
$\deg\chi$	特征标 χ 的次数

$\mathrm{Ker}\rho$	表示 ρ 的核
$\mathrm{Ker}\chi$	特征标 χ 的核
$\mathrm{char}F$	域 F 的特征
$\overline{\mathrm{Irr}_F}G$	群 G 的所有互不等价的不可约 F- 表示的集合
$\mathrm{Irr}_F G$	群 G 的所有互不等价的不可约 F- 表示的特征标的集合
$R_F^+(G)$	群 G 的所有互不等价的 F- 表示的集合
$\mathrm{ch}_F^+(G)$	群 G 的所有互不等价的 F- 表示的特征标的集合
$\mathrm{ch}_F(G)$	群 G 的所有 F- 特征标的整线性组合的集合
$\mathrm{cf}_F(G)$	群 G 上 F- 值类函数的集合
$\mathrm{cf}^F(G)$	群 G 上 F- 值 F- 共轭类的类函数的集合
$C(G,\mathbf{C})$	紧群 G 上连续复值函数的集合
$\mathrm{Hom}_F(M,N)$	F- 空间 M 到 F- 空间 N 的全体 F- 线性映射的集合
$\mathrm{Hom}_G(M,N)$	群 G 的表示 M 到群 G 的表示 N 的全体 G-模映射的集合
$\mathrm{Hom}_A(M,N)$	A- 模 M 到 A- 模 N 的全体模同态的集合
$\mathrm{End}_A(M)$	模 M 的自同态代数
$\mathrm{End}_F(V)$	向量空间 V 的全体 F- 线性变换作成的代数
ρ^G 或 ρ_H^G	子群 H 的表示 ρ 的诱导表示
W^G 或 W_H^G	子群 H 的表示 W 的诱导表示
V^K	群 G 的 F- 表示 V 通过基域 F 的扩张得到的 G 的 K- 表示
ρ^K	群 G 的 F- 表示 ρ 通过基域 F 的扩张得到的 G 的 K- 表示

$\rho\#\varphi$	群 G_1 的表示 ρ 与群 G_2 的表示 φ 的外张量积
${}^g\rho$	群 G 的表示 ρ 的共轭表示: ${}^g\rho(h)=\rho(g^{-1}hg),\ \forall h\in G$
ρ_H	群 G 的表示 ρ 在子群 H 上的限制表示
χ_H	群 G 的特征标 χ 在子群 H 上的限制
ρ^*	表示 ρ 的反轭表示
χ^*	特征标 χ 的反轭特征标
V^*	向量空间 V 的对偶空间
nV	n 个表示 (或向量空间)V 的直和
$n\rho$	n 个表示 ρ 的直和
G_ρ	表示 ρ 的惯性群 : $G_\rho=\{g\in G \mid {}^g\rho\cong\rho\}$
$\mathrm{Gal}(E\|F)$	域 E 在子域 F 上的 Galois 群
$\Phi_n(t)$	n 次分圆多项式

目　　录

前言 ......(I)
符号说明 ......(XI)
第 1 章　群表示的基本概念 ......(1)
§1　定义和例子 ......(1)
§2　子表示、商表示、表示的同态 ......(7)
§3　表示的常用构造法 ......(11)
§4　不可约表示与完全可约表示 ......(20)
§5　Maschke 定理 ......(26)
§6　表示的不可约分解 ......(28)
*§7　举例确定不可约表示 ......(31)

第 2 章　特征标理论 ......(39)
§1　特征标的基本概念 ......(39)
§2　特征标的正交关系 ......(45)
§3　分裂域上不可约常表示的个数 ......(50)
§4　特征标表计算举例 ......(58)
§5　从特征标表读群的结构 ......(70)
§6　整性定理与不可约复表示的维数 ......(75)
§7　Burnside 可解性定理 ......(79)

第 3 章　代数的表示 ......(83)
§1　域上代数 ......(83)

§2 代数上的模范畴 .... (91)
§3 Jordan-Hölder 定理 .... (108)
§4 Wedderburn-Artin 定理 .... (112)
§5 代数与模的 Jacobson 根 .... (125)
§6 Krull-Schmidt-Remak 定理 .... (135)
§7 投射模与内射模 .... (141)
§8 模在代数上的张量积、平坦模 .... (154)
*§9 绝对单模与分裂域 .... (163)
*§10 应用：有限群常表示的不可约特征标 .... (171)
*§11 Frobenius 代数与对称代数 .... (179)

第 4 章 诱导表示与诱导特征标 .... (184)
§1 基本概念和性质 .... (184)
§2 模与诱导类函数的 Frobenius 互反律 .... (195)
§3 Mackey 的子群定理 .... (203)
§4 诱导表示不可约的判定 .... (208)
§5 Clifford 定理 .... (211)
*§6 小群法 .... (214)
§7 Frobenius 群 .... (220)
*§8 单项表示与 M 群 .... (226)

第 5 章 Artin 定理与 Brauer 定理及其应用 .... (232)
§1 有理特征标的 Artin 定理 .... (232)
§2 Brauer 诱导定理 .... (239)
*§3 Green 定理： Brauer 定理的一个逆 .... (245)
*§4 Brauer 分裂域定理 .... (246)
*§5 不可约常表示的个数 (一般形式) .... (251)

第 6 章　紧群的表示 .... (256)
§1　紧群 .... (256)
§2　紧群上的不变积分 .... (268)
§3　紧群的线性表示、完全可约性 .... (271)
§4　不可约表示的矩阵元的正交关系 .... (275)
§5　Peter-Weyl 定理 .... (282)
§6　SU_2 和 SO_3 的复表示 .... (289)

参考文献 .... (298)
汉英名词索引 .... (301)

第 1 章 群表示的基本概念

本章介绍群表示的基本概念，包括群表示的定义与例子，常用的构造方法，不可约表示与完全可约表示，Maschke 定理，正则表示的不可约分解，最后举例确定群的不可约表示.

我们强调有限群的表示是向量空间 V 上 $|G|$ 个可逆线性变换的理论，这 $|G|$ 个可逆线性变换是以“群 G 的方式”同时作用在 V 上的. 因此，从某种意义上讲，有限群的表示理论可视为线性代数“非平凡”的推广.

§1 定义和例子

1.1 定义 设 G 是任一群，V 是域 F 上的向量空间. 如果存在群同态 $\rho : G \to GL(V)$, 其中 $GL(V)$ 是一般线性群，即 V 上全体可逆线性变换作成的乘法群，则称 (V,ρ) 是 G 的一个 F- 线性表示，简称为 F- 表示 V, 或 F- 表示 ρ. 若 V 是有限维的，将 $\dim_F V$ 称为该表示的维数或次数，记为 $\deg\rho$；将 V 称为表示空间.

令 $\mathrm{Ker}\rho := \{\ g \in G \mid \rho(g) = 1_V\ \}$, 称为表示 ρ 的核. 若 $\mathrm{Ker}\rho = \{1\}$, 则称 ρ 是忠实的表示.

因此，群 G 的 F- 表示 (V,ρ) 有两个要素，一为表示空间 V，二为群同态 ρ. 要断言 (V,ρ) 是 G 的一个 F- 表示，必须而且只要验证如下两条：