假數測圓（求表捷術之一）

戴煦撰

中華書局

新法推步。用八線表則較繁。而用八線對數表則較易。竊嘗思必待求得八線。而後由八線一一求其對數。縱有捷法。亦嫌多一轉悵。若能舍八線而徑用弧背。求其八線對數。不更直捷乎。顧雖有此意。而禦之之法。殊不可得也。至去歲獲見壬叔李君。嘗接談。未數語。壬叔卽首議此事。頓驚喜其意見之同。然詢以禦之之法。亦未得其梗概。何則。蓋以眞數求假數。本非逐數可求。故恆借他數爲用數。今既但知弧背。又烏知此八線之眞數。或可徑求假數乎。抑倘須求用數乎。如須求用數。則卽不可求矣。此徑求八線假數之所以難也。今秋錄外切密率旣竟。忽悟四十五度以內割線。頗可徑求假數。不必借用數。依法衍之。果得徑求割線對數之術。復思割線旣可徑求。當不僅可求一線。因又悟連比例開方法其用初商實較大者二術。可求負算對數。而因以得弧背求四十五度以外正弦對數之術。夫八線內旣得二線對數。則諸線對數。可加減而得。遂乘數旬暇。衍爲術解。並附算式。以爲求表之助。至他線對數。亦可徑求。特須借用弧背對數。而求弧背對數。仍籍對數表。殊失徑求之意。故置不取焉。他日質之壬叔。未識定以爲何如也。

咸豐壬子仲冬鄂士戴煦識。

假數測圓總目

假數測圓卷之上

求負算對數二術

對數有正有負。自單一以上之對數。均爲正數。自單一以下之對數。均爲負數。而恆以單一爲正負之界。故其對數爲適足無數。假如以二除一。得〇五。故以二之對數命爲負數。即〇五之對數。蓋於適足無數內減二之對數。適負一二之對數也。又如以二除八得四。故以二之對數減八之對數。得四之對數。若以八除二。得〇二五。故以四之對數命爲負數。即〇二五之對數也。又不滿單一之數。用爲乘法。則乘得數必反小於原數。若用爲除法。則除得數必反大於原數。此定理也。故以〇二五除二得八。在對數爲以〇二五之對數。減二之對數。得八之對數。但減法係同名相減。異名相加。今〇二五與二之對數。既正負異名。則當以加爲減。故仍以〇二五之對數。加二之對數。而得八之對數。若以〇二五乘八。則得二。在對數爲以〇二五之對數。加八之對數。而得二之對數。但加法係同名相加。異名相減。今〇二五與八之對數。亦正負異名。又當以減爲加。故仍以〇二五之對數。減八之對數。而得二之對數矣。惟此種不滿單一之眞數。若用續對數簡法求對數根與求借數之對數二術求之。則必借單一下帶零數之數爲用數矣。茲更設二術。卽用不滿單一之數爲用數。而其對數亦無不可求。不特以補數對數簡法之遺。而求八線對數。有賴是術者。故先及之。

假如有不滿單一之眞數〇九八求其對數。

法以眞數〇九八減單一得〇〇二用爲乘法乃依續對數簡法求得對數根〇四三四二九四四八二。以乘法乘之得〇〇〇八六八五八八九六四爲第一數負。　置第一數以乘法乘之又一乘之二除之。得八六八五八九〇爲第二數負。　置第二數以乘法乘之又二乘之三除之得一一五八一二爲第三數負。　置第三數以乘法乘之又三乘之四除之得一七三七爲第四數負。　置第四數以乘法乘之又四乘之五除之得二八爲第五數負。　乃并諸負數得負〇〇〇八七七三九二四三一爲〇九八之對數。若以一百乘之得九十八故以一百之對數二內減求得數。正負異名以減爲加。得一九九一二二六〇七五六九爲九十八之對數也。

用數	〇九八	
乘法	〇〇二	
第一數	〇〇〇八六八五八八九六四	
	八六八五八九〇	
	一一五八一二	
	一七三七	
	二八	
并得數	〇〇〇八七七三九二四三一	〇九八對數
以減	二〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇	
減餘數	一九九一二二六〇七五六九	九十八對數

此術用續對數簡法。以本數求折小各率第三術。開極多位九乘方也。蓋大於單一各數。則用第三術。其初商必爲二。而初商已極大而不可算。若小於單一各數。則如求對數根以及求借數之對數二術。其初商必小於單一。如求〇九八之對數。其初商必爲〇九。而初商實又極小而不可算。故用第三術。則初商可用單一。而初商實必仍爲單一。而無所窒礙矣。又第三術之第一數爲正。而第二數以下。均爲負。求對數之開方例不用第一數。故所得各數。均爲負算。惟每數當以初商實爲除法。而初商實既爲單一。則可省除。又本法應於求得數後。以對數根乘之。而以之先乘第一數。其得數亦相同也。

又術

法以眞數〇九八減單一。得〇〇二。用爲乘法。以〇九八爲除法。乃以乘法乘對數根。除法除之。得〇〇〇八八六三一五二六九。爲第一數負。　置第一數。以乘法乘之。除法除之。一乘之。二除之。得九〇四四〇三三。爲第二數正。　置第二數。以乘法乘之。除法除之。二乘之。三除之。得一二三〇四八。爲第三數負。　置第三數。以乘法乘之。除法除之。三乘之。四除之。得一八八三。爲第五數正。　置第四數。以乘法乘之。除法除之。四乘之。五除之。得三一。爲第五數負。　置第五數。以除法乘之。除法除之。五乘之。六除之。滿五進一得一。爲第六數正。　乃幷諸負數。得〇〇〇八八六四三八三四八。以幷諸正數〇〇〇〇〇九〇四五九一七減之。得負〇〇〇八七七三九二四三一。爲〇九八之對數也。

用數	乘法	除法
○九八	○○二	○九八

第一數	二	三	四	五	六	并負數	并正數	減餘數
○○○八八六三一五二六九	九○四四○三三	一二三○四八	一八八三	三一	一	○○○八八六四三八三四八	○○○○○九○四五九一七	○○○八七七三九二四三一

此術。用以本數求折小各率第四術。開極多位九乘方也。術之乘法。與前術同。而除法則前術用初商實爲單一。自可省算。此術用本數。故較前術多一次除。其正負相間。本起正數。而求對數者不用第一數。故其正負相間。起負數。既起負數。必負數盈而正數歉。故負正二數相減。而所餘者在負數也。此二

術亦可求單一以上之對數。如遇眞數九十八之類。則降二位。如前二術求之。求得數後。與二相減。即九十八之對數。又或他數。用借數乘之。使首位爲九。降位。亦可爲用數。假如求二十三之用數。置二十三。以四乘之。得九十二。降二位。得〇九二。爲二十三之用數。依前二術求得數後。與二相減。再減四之對數。即得二十三之對數也。總而論之。開諸乘方。有四術求對數。則求正算對數二術。求對數根一術。求借數之對數一術。求負算對數二術。亦有四術。而求對數之法。於是乎始全矣。凡弧背求正割對數。則生於求正算之術。而求正弦對數。則生於求負算之術。故不可不備也。

以本弧弧分徑求四十五度以內正割對數

術曰。先求各率分子。爲遞次乘法。　以二爲數根。即爲第一乘法。　置前數根。加二。得四。爲數根。置前乘法。四五遞乘之。一二遞除之。得二十。爲初減數。以數根減初減。得十六。爲第二乘法。　置前數根。加二。得六。爲數根。置前初減。六七遞乘之。三四遞除之。得七十。爲初減數。置前乘法。六七遞乘之。一二遞除之。得三百三十六。爲次減數。以數根減初減。得六十四。再減次減。得二百七十二。爲第三乘法。　置前數根加二。得八。爲數根。置前初減。八九遞乘之。五六遞除之。得一百六十八。爲初減數、置前初減。八九遞乘之。三四遞除之。得二千〇十六。爲次減數。置前乘法。八九遞乘之。一二遞除之。得九千七百九十二。爲三減數。以數根減初減。得一百六十。再減次減。得一千八百五十六。再減三減。得七千九百三十六。爲第四乘法。

凡數根。均起各耦數。其求各減數。則用耦奇二數乘。而逐次乘法遞加。如第二乘法用四五乘。第三乘法用六七乘。再用奇

耦二數除。而挨次減數遞降。如第三乘法。初減用三四除。次減用一二除。乘法降一位則多一減。如是遞求得各率分子。即爲遞次乘法。

乃以二爲全徑。單一爲半徑。求其逐度弧分。爲弧線表。以所設若干度。檢弧線表得弧分。爲二率。以半徑單一爲一率。二率自乘。得三率。本當以一率除之。得三率。而一率係單一。可省除。下做此。以乘對數根。二除之。爲第一數正。　置第一數。以三率乘之。得五率。三四遞除之。爲七率用數。第一乘法乘之。爲第二數正。　置七率用數。以三率乘之。得七率。五六遞除之。爲九率用數。第二乘法乘之。爲第三數正。　置九率用數。以三率乘之。得九率。七八遞除之。爲十一率用數。第三乘法乘之。爲第四數正。　置十一率用數。以三率乘之。得十一率。九十遞除之。爲十三率用數。第四乘法乘之。爲第五數正。　如是遞求至應求位數下。乃幷諸正數。視所設半徑。較單一應升若干位。如半徑一百億係十一位。較單一應升十位。則於首位加一〇。即得所設度正割對數。

解曰。求對數。用以本數求折小各率第一第二術。其用數。必爲單一下帶零數。則降位易而可求。如續對數簡法。求對數根以及求借數之對數是也。而四十五度以內各正割線與其用數相似。何也。用數爲單一下帶零數。而割線爲半徑外帶割線半徑差。若命半徑爲單一。則亦爲單一下帶零數。四十五度以外。則割綫半徑差漸大。不類帶零數矣。故有割線求其對數者。不必更求用數。但降半徑爲單一。即可爲用數。其求法用第二術。當以降位割線半徑差爲乘法。半徑單一爲除法。復挨次以一二三四等數乘除之。求得各數。又

一正一負加減之。然後以對數根乘之。卽得半徑單一之割線對數。今雖未知割線半徑差眞數。而弧背求割線半徑差各率分數。則推演而可知。見外切密率。則卽命割線半徑差各率分數爲乘法。以半徑一率爲除法。如求折小各率第二術演之。而本弧求正割對數之各率分數。卽在是矣。蓋本弧求割線半徑差率分。起三率。若自乘。爲一率乘五率。以半徑除之。必起五率率數。逐次遞降。則推演率分。亦無所窒礙也。今依外切密率。演得本弧求割線半徑差率分。三率、一二分之一。又五率、一二三四分之五。又七率、自一至六分之六十一。又九率、自一至八分之一千三百八十五。又十一率、自一至十分之五萬○五百二十一。爲本弧求正割線對數之乘法也。

如圖。置本弧求割線半徑差率分爲實。仍以本弧求割線半徑差爲乘法。乘之。先置原實五率以下分母爲定母。以原實首位三率一二分之一。徧乘乘法。得首層一率乘五率、一二分之一。又一率乘七率、一二三四分之五。又一率乘九率、自一至六分之六十一。又一率乘十一率、自一至八分又一二分之一千三百八十五。爲第一乘法式。其五率定母。係一二三四分。乘法式分母係一二分又一二分。應以一二除之三四乘之。使從定母。其七率定母。係自一至六分。乘法式。係一二三四分又一二分。應以一二除之五六乘之。其九率定母。係自一至八分。乘法式。係自一至六分又一二分。應以一二除之七八乘之。其十一率。定母。係自一至十分。乘法式。係自一至八分又一二分。應以一二除之九十乘之。通計乘除。得如次層一率乘五率、一二三四分之六又一率乘七率自一至

五率	七率	九率	十一率
一二三四	一二三四五六	一二三四五六七八	一二三四五六七八九十
一二 一二 丨	一二三四 一二 ‖‖	一二三四五六 一二 丄丨	一二三四五六七八 一二 丨‖≡‖‖
一二除 三四乘 丅	一二除 五六乘 ≐‖‖	一二除 七八乘 一‖〇‖‖	一二除 九十乘 丅≡‖≐‖‖
	一二 一二三四 ‖‖	一二三四 一二三四 =‖‖	一二三四五六 一二三四 ‖〇‖‖
	一二三四除 三四五六乘 ≐‖‖	一二三四除 五六七八乘 一‖≣〇	一二三四除 七八九十乘 丅≡〇≣〇
		一二 一二三四五六 丄丨	一二三四 一二三四五六 ‖〇‖‖
		一二三四五六除 三四五六七八乘 一‖〇‖	一二三四五六除 五六七八九十乘 丅≡〇≣〇
			一二 一二三四五六七八 [illegible]
			一二三四五六七八除 三四五六七八九十乘 丅‖≐‖‖
丅	≣〇	≣‖丅	=‖‖丅≣〇

六分之七十五。又一率乘九率、自一至八分之一千七百〇八。又一率乘十一率、自一至十分之六萬二千三百二十五。爲第一同母式。次以原實次位五率一二三四分之五。徧乘乘法得三層。一率乘七率、一二分又一二三四分之五。又一率乘九率、一二三四分又一二三四分之二十五。又一率乘十一率、自一至六分又一二三四分之三百〇五。爲第二乘法式。復依法乘除之。使從定母得四層。一率乘七率、自一至六分之七十五。又一率乘九率、自一至八分之一千七百五十。又一率乘十一率、自一至十分之六萬四千〇五十。爲第二同母式。次以原實三位七率自一至六分之六十一。徧乘乘法得五層。一率乘九率一二分又自一至六分之六十一。又一率乘十一率、一二三四分又自一至六分之三百〇五。爲第三乘法式。復依法乘除之。使從定母得六層。一率乘九率、自一至八分之一千七百〇八。又一率乘十一率自一至十分之六萬四千〇五十。爲第三同母式。次以原實四位九率自一至八分之一千三百八十五乘乘法得七層。三率乘十一率、一二分又自一至八分之一千三百八十五。爲第四乘法式。復依法乘除之。使從定母得一率乘十一率、自一至十分之六萬二千三百二十五。爲第四同母式。以四同母式相并。一率除之。一率乘三率者。命爲三率。一率乘五率者。命爲五率。即爲一率除之。得五率、一二三四分之六。又七率、自一至六分之一百五十。又九率、自一至八分之五千一百六十六。又十一率、自一至十分之二十五萬二千七百五十。爲第二數全率。

次以第二數全率爲實。以乘法乘之。先置原實七率以下分母爲定母。以原實首位五率一二三四分

之六．偏乘乘法．得首層．一率乘七率、一二分又一二三四分之六．又一率乘九率、一二三四分又一二三四分之三十．又一率乘十一率、自一至六分又一二三四分之三百六十六．爲第一乘法式．依法乘除之．使從定母．得次層．一率乘七率、自一至六分之九十．又一率乘九率、自一至八分之二千一百．又一率乘十一率、自一至十分之七萬六千八百六十．爲第一同母式．次以原實次位．七率自一至六分之一百五十．偏乘乘法．得三層．一率乘九率、一二分又自一至六分之一百五十．又一率乘十一率、一二三四分又自一至六分之七百五十．爲第二乘法式．復依法乘除之．使從定母．得四層．一率乘九率、自一至八分之四千二百．又一率乘十一率、自一至十分之十五萬七千五百．爲第二同母式．次以原實三位．九率自一至八分之五千一百六十六乘乘法．得五層．一率乘十一率、一二分又自一至八分之五千一百六十六．爲第三乘法

七率 一二三四五六	九率 一二三四五六七八	十一率 一二三四五六七八九十
一二 一二三四 𝍥	一二三四 一二三四 𝍫〇	一二三四五六 一二三四 𝍢𝍮𝍥
一二三四除 三四五六乘 𝍱〇	一二三四除 五六七八乘 𝍡𝍩〇〇	一二三四除 七八九十乘 𝍦𝍮𝍧〇
	一二 一二三四五六 𝍠𝍭〇	一二三四 一二三四五六 𝍦𝍭〇
	一二三四五六除 三四五六七八乘 𝍣𝍪〇〇	一二三四五六除 五六七八九十乘 𝍠𝍭𝍦𝍭〇〇
		一二 一二三四五六七八 𝍤𝍩𝍥𝍮
		一二三四五六七八除 三四五六七八九十乘 [illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]

式。復依法乘除之。使從定母。得六層。一率乘十一率、自一至十分之二十三萬二千四百七十。爲第三同母式。以三同母式相并。一率除之得七率、自一至六分之九十。又九率、自一至八分之六千三百。又十一率、自一至十分之四十六萬六千八百三十。爲第三數全率。

次以第三數全率爲實。以乘法乘之。先置原實九率以下分母爲定母。以原實首位七率自一至六分之九十。徧乘乘法。得首層一率乘九率、一二分又自一至六分之九十。又一率乘十一率、一二三四分又自一至六分之四百五十。爲第一乘法式。依法乘除之。使從定母得次層。一率乘九率、自一至八分之二千五百二十。又一率乘十一率、自一至十分之九萬四千五百。爲第一同母式。次置原實次位。九率自一至八分之六千三百乘乘法得三層。一率乘十一率、一二分又自一至八分之六千三百。爲第二乘法式。復依法乘除之。使從定母。得四層。一率乘十一率、自一至十分之二十八萬三千五百。爲第二同母式。以二同母式相并。一率除之。得九率、自一至八分之二千五百二十。又十一率、自一至十分之三十七萬八千。爲第四數全率。

<table>
<tr><td>九率
一二三四五六七八</td><td>十一率
一二三四五六七八九十</td></tr>
<tr><td>一二
一二三四五六
𝍱〇</td><td>一二三四
一二三四五六
𝍣𝍭〇</td></tr>
<tr><td>一二三四五六除
三四五六七八乘
𝍪𝍤𝍪〇</td><td>一二三四五六除
五六七八九十乘
𝍨𝍬𝍤〇〇</td></tr>
<tr><td></td><td>一二
一二三四五六七八
𝍮𝍢〇〇</td></tr>
<tr><td></td><td>一二三四五六七八除
三四五六七八九十乘
𝍡𝍰𝍢𝍭〇〇</td></tr>
<tr><td>𝍪𝍤𝍪〇</td><td>𝍢𝍯𝍧〇〇〇</td></tr>
</table>

次以第四數全率爲實。以乘法乘之。先置原實十一率分母爲定母。以原實首位。九率自一至八分之二千五百二十乘乘法。得首層。一率乘十一率、一二分。又自一至八分之二千五百二十。爲乘法式。依法乘除之。使從定母。得次層。一率乘十一率、自一至十分之十一萬三千四百。爲同母式。以一率除之。得十一率、自一至十分之十一萬三千四百。爲第五數全率。乃置本弧求割線半徑差率分。爲第一數。次置第二數全率。二除之。得五率一二三四分之三。又七率自一至六分之七十五。又九率自一至八分之二千五百八十三。又十一率自一至十分之十二萬六千三百七十五。爲第二數。係負算。應減第一數。計減得三

十一率
一二三四五六七八九十
一二
一二三四五六七八
𝍪𝍤𝍪〇
一二三四五六七八除
三四五六七八九十乘
𝍩𝍠𝍫𝍣〇〇

三率 一二	五率 一二三四	七率 一二三四五六	九率 一二三四五六七八	十一率 一二三四五六七八九十
𝍠	𝍢	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
𝍠	𝍡	[illegible]	[illegible]	[illegible]
		𝍫〇	𝍪𝍠〇〇	[illegible]
𝍠	𝍡	𝍩𝍥	[illegible]	[illegible]
			𝍥𝍫〇	[illegible]
𝍠	𝍡	𝍩𝍥	[illegible]	[illegible]
				[illegible]
𝍡	𝍡	𝍩𝍥	[illegible]	[illegible]

率一二分之一。又五率一二三四分之二。少七率自一至六分之十四。少九率自一至八分之一千一百九十八。少十一率自一至十分之七萬五千八百五十四。爲第一減得數。次置第三數全率。三除之。求對數第三數。係二乘三除。彼因第三數生於第二數。原屬二分第三數全率之一。故二乘之得全率。再三除。此既用第三數全率。則三除之已得第三數。不必再用二乘也。下倣此得七率。自一至六分之三十。又九率、自一至八分之二千一百又十一率、自一至十分之十五萬五千六百一十。爲第三數。係正算應加。而第一減得數七率以下。均屬負數。正負異名。仍當以減爲加。計減得三率、一二分之一。又五率、一二三四分之二。又七率、自一至六分之十六。又九率、自一至八分之九百〇二。又十一率、自一至十分之七萬九千七百五十六。爲第二加得數。次置第四數全率。四除之。得九率、自一至八分之六百三十。又十一率、自一至十分之九萬四千五百。爲第四數。係負算應減。計減得三率、一二分之一。又五率、一二三四分之二。又七率、自一至六分之十六。又九率、自一至八分之二百七十二。少十一率、自一至十分之一萬四千七百四十四。爲第三減得數。次置第五數全率。五除之。得十一率、自一至十分之二萬二千六百八十。爲第五數。係正算應加。因第三減得數之十一率、係負數。仍當以減爲加。計減得三率、一二分之一。又五率、一二三四分之二。又七率、自一至六分之十六。又九率、自一至八分之二百七十二。又十一率、自一至十分之七千九百三十六。爲本弧求正割線對數各率分數也。

細審本弧求割線對數率分、其分母、與本弧求割線半徑差同。是其逐率除法。必自一二而三四而五

六矣。惟其分子。則由迭次乘除迭次加減而得。莫能知其所由來。乃取本弧求切線分子與之相較。本弧求切線分子見外切密率。則一一相符。如求切線二率分子爲一。而求割線對數三率分子亦爲一。求切線四率分子爲二。而求割線對數五率分子亦爲二。求切線六率、八率、十率、分子。爲十六、爲二百七十二、爲七千九百三十六。而求割線對數七率、九率、十一率、分子。亦爲十六、爲二百七十二、爲七千九百三十六。夫算五分子以前。既一一相符。則第五分子以後。亦必一一相符。蓋迭次乘除加減。層層抵算。適與脗合也。故借本弧求切線術中求各率分子之法。以求遞次乘法。而數適合。更不待他求也。又求得數後。當以對數根乘之。爲正割對數。又先以乘第一數。其得數亦同也。

又術。用以本數求折小各率第一術。如續對數簡法求對數根之法求之。則當以本弧求割線半徑差率分爲乘法。以本弧求割線半徑差率分首位加一率一。得本弧求割線率分爲除法。乃置一率一。以乘法乘之。除法除之。爲第一數。次置第一數。又乘法乘之。除法除之。爲第二數全率。次置第二數全率。以乘法乘之。除法除之。爲第三數全率。如是遞求得各數全率。然後置第二數全率。二除之。爲第二數。置第三數全率。三除之。爲第三數。如是遞求得各數。乃以各數相并。亦得本弧求正割線對數率分。但所求得率分之分母分子。與前術相同。而是術以本弧求割線率分爲除法。衍算較煩重。故不復贅。

弧線表

設全徑二　半徑單一