空间角度计算

国防工业出版社

空间角度计算

国营黎明机械制造厂
北京航空学院
合编

国防工业出版社

内容简介

本书主要介绍空间角度的计算方法。全书共分七章：一、解三角形法，介绍平面三角的基本知识及其在工艺计算中的应用；二、点的坐标旋转法，介绍点的坐标旋转规律和它在工艺计算中的应用；三、关于直线空间角度的工艺计算，介绍投影的基本知识、空间直线旋转的规律及其在工艺计算中的应用；四、关于平面空间角度的工艺计算，介绍空间平面投影的基本概念和平面旋转的基本规律，阐述旋转法的基本原理及其在工艺计算中的应用；五、球面三角，介绍球面三角在空间角度计算中的应用；六、空间解析几何，介绍空间解析几何的基础知识及其在空间角度计算中的应用；七、几个问题的补充说明，介绍空间角度的多种解法以及关于斜旋转轴问题。在附录中还将各章所用的计算公式做了汇总，以便使用时查找。

本书可供从事工艺装备设计和制造的工人、技术人员以及院校师生参考。

空间角度计算

国营黎明机械制造厂
北京航空学院 合编

国防工业出版社 出版

北京市书刊出版业营业許可証出字第074号

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092 1/16　印张25　587千字

1978年3月第一版　1978年3月第一次印刷　印数：00,001—10,000册

统一书号：15034·1608　　定价：2.00元

（限国内发行）

前　　言

在毛主席无产阶级革命路线的指引下，我们根据生产发展的需要，在厂、校党委的领导下，组成“三结合”编写组，总结了工人、技术人员在生产斗争中积累的有关计算空间角度的实践经验，编写了《空间角度计算》一书。书中针对工艺装备的设计和制造中所遇到的空间角度计算问题，从理论上进行了分析，并通过大量的实例，由浅入深地介绍了各种典型零件的计算方法；综合应用画法几何、数学等基础知识，解决空间角度计算中较复杂的一些问题。

参加本书编写的有温俊铭、陈剑南、陈进、赵宗平、陈其明等同志。

在编写过程中，曾得到许多厂、所、院校的大力支持和帮助，在此深表谢意。

由于我们水平有限，书中难免有缺点和错误，恳请读者批评指正。

目　录

第一章　解三角形法在工艺计算中的应用

生产实际中，在一些图纸或零件上，经常需要确定三角形的边长和角度的大小。三角学则提供了解决这类问题的工具。在工厂里三角学的应用是十分广泛的。

第一节　直角三角形的基本知识

如图 1-1 所示，$\triangle ABC$ 是直角三角形。$\angle C$ 是直角，$\angle A$ 和 $\angle B$ 都是锐角。

即

$$\angle C = 90^\circ$$

$$\angle A + \angle B = 90^\circ$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

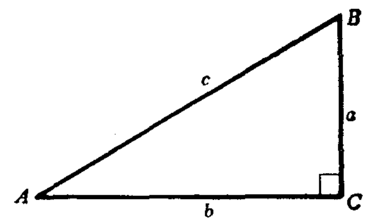


图1-1　直角三角形

1. 锐角三角函数的概念　在图 1-1 中，设 c 为三角形的斜边，a 为 $\angle A$ 的对边，b 为 $\angle A$ 的邻边。对于 $\angle B$，则 b 为对边，a 为邻边。

锐角 A 的各三角函数定义为：

$$\sin A = \frac{\text{对边}}{\text{斜边}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{\text{邻边}}{\text{斜边}} = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\text{对边}}{\text{邻边}} = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\text{邻边}}{\text{对边}} = \frac{b}{a}$$

$$\sec A = \frac{\text{斜边}}{\text{邻边}} = \frac{c}{b}$$

$$\csc A = \frac{\text{斜边}}{\text{对边}} = \frac{c}{a}$$

同理，锐角 B 的各三角函数定义为：

$$\sin B = \frac{b}{c} \qquad \cos B = \frac{a}{c} \cdots$$

2. 互余角三角函数之间的基本关系　如果 $\angle A + \angle B = 90^\circ$ 时，称这两个角为互余角。从三角函数的定义易见，互余三角函数有下列关系：

$$\sin A = \cos B = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \sin B = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{ctg} B = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{ctg} A = \operatorname{tg} B = \frac{b}{a}$$

$$\sec A = \csc B = \frac{c}{b}$$

$$\csc A = \sec B = \frac{c}{a}$$

3. 同名角各三角函数间的主要关系

1） $\sin A = \dfrac{1}{\csc A}$

2） $\cos A = \dfrac{1}{\sec A}$

3） $\mathrm{tg} A = \dfrac{1}{\mathrm{ctg} A}$

4） $\mathrm{tg} A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$

5） $\mathrm{ctg} A = \dfrac{\cos A}{\sin A}$

6） $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

7） $\sec^2 A - \mathrm{tg}^2 A = 1$

8） $\csc^2 A - \mathrm{ctg}^2 A = 1$

以上各关系式均可从定义推得。

4. 三边关系 勾股定理：直角三角形中，斜边的平方等于两直角边的平方和。即

$$c^2 = a^2 + b^2$$

第二节 斜三角形的基本知识

由于斜三角形的一内角可以小于或大于 90°，这样，在解决斜三角形的边角关系时，必须建立任意角三角函数的概念。数学上的这一概念是借助于点的平面直角坐标来实现的。因此，首先要了解平面直角坐标系是怎样建立和应用的。

1. 平面直角坐标系 平面上确定一个点的位置，最常用的是直角坐标。

在平面上取两根互相垂直的数轴，以它们的交点为原点，这样就构成了平面直角坐标系。如图 1-2 所示，两根数轴分别称为横轴 X 与纵轴 Y，统称坐标轴。坐标原点记作“O”。坐标系记为“XOY”。X 轴、Y 轴均有正负值之分，两轴均以原点为始点，朝有箭头方向一侧为正值，反之为负值。

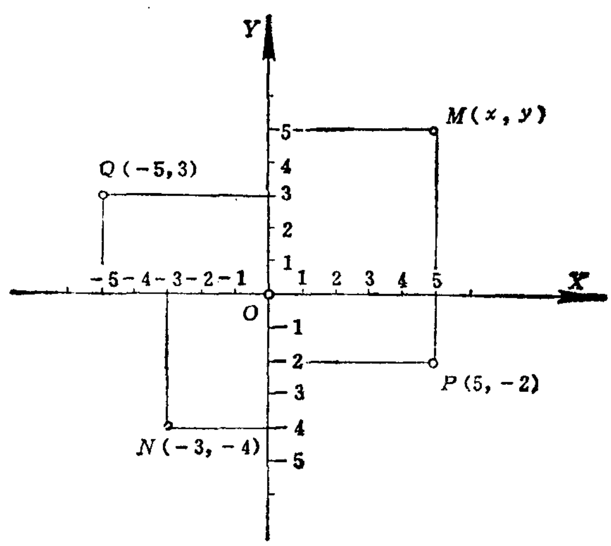


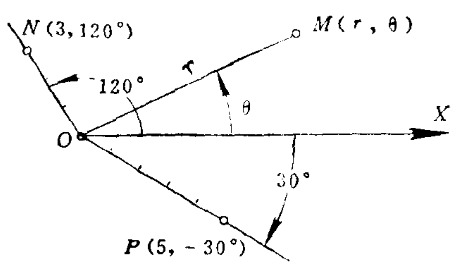
图1-2 平面直角坐标系

建立了平面直角坐标系后，平面上任一点M就由它对X、Y轴的垂线在两轴上所截取的坐标x、y所确定，通常M点的坐标用$M(x, y)$表示。此处x和y的位置不能颠倒，x称为M点的横坐标值，y称为M点的纵坐标值。如图 1-2 中的点$Q(-5, 3)$，$N(-3, -4)$，$P(5, -2)$，它们的横坐标分别是-5，-3，5，纵坐标分别是 3，-4，-2（本书线性尺寸均以毫米为单位）。

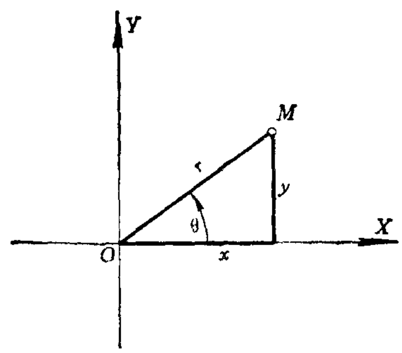
平面上确定一个点的位置，还可以用极坐标系。如注图 1 所示。图中O点称为极点，射线OX称为极轴。对于平面上任意一点M，它的位置可以由OM的长度r和从OX到OM的角度θ来确定。称(r, θ)为M点的极坐标，记为$M(r, \theta)$，r称为极径，θ称为极角。例如点$N(3, 120°)$，$P(5, -30°)$，表示它们的极径分别为 3、5，极角为 120°、$-30°$。极角θ有正负角之分，即自极轴OX始，按逆时针方向旋转的角度为正角，反之则为负角。例如，$-30°$表示OF自OX轴起，按顺时针方向转了30°角。

极坐标和直角坐标之间有下列关系（见注图 2）：

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$



注图 1　极坐标系



注图 2　极坐标系和直角坐标系的关系

2. 任意角三角函数的定义　所谓任意角就是既可以是小于 360° 的角，也可以是大于360°的角，既可以是正角，也可以是负角。

图 1-3 是以原点O为圆心，r为半径的圆。角α的终边与圆周交于一点M，设M的坐标为(x, y)，α为任意角。

角α的各三角函数定义为：

$$\sin\alpha = \frac{M\text{点的纵坐标}}{\text{半径}} = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{M\text{点的横坐标}}{\text{半径}} = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{M\text{点的纵坐标}}{M\text{点的横坐标}} = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{M\text{点的横坐标}}{M\text{点的纵坐标}} = \frac{x}{y}$$

$$\sec\alpha = \frac{\text{半径}}{M\text{点的横坐标}} = \frac{r}{x}$$

$$\csc\alpha = \frac{\text{半径}}{M\text{点的纵坐标}} = \frac{r}{y}$$

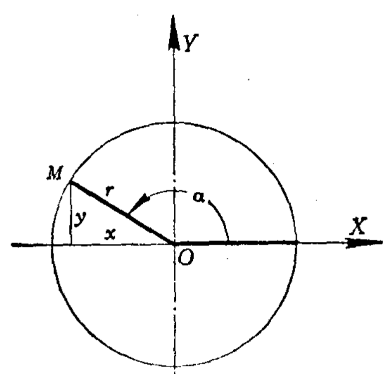


图1-3　任意角

有关任意角三角函数间的关系以及它与锐角三角函数间的关系，见本书的附录。

3．解斜三角形的两个基本定理 三内角均不为直角的三角形称为斜三角形或任意三角形。斜三角形有两种情况：

三内角均小于直角的斜三角形，称为锐角三角形，如图 1-4 所示。

三内角中有一个角大于直角的斜三角形，称为钝角三角形，如图 1-5 所示。

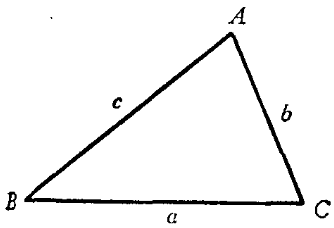


图1-4 锐角三角形

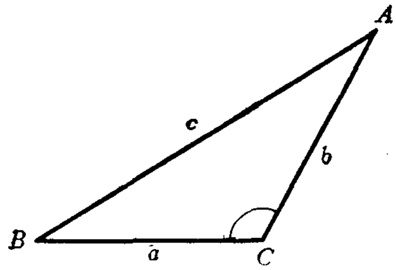


图1-5 钝角三角形

设斜三角形的三边分别为 a、b、c 与其相对应之各角分别用 A、B、C 表示（如图 1-4 和图 1-5 所示）。有下述两个定理：

1）正弦定理 三角形的各边与它所对应的角的正弦成比例。

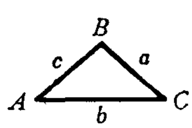
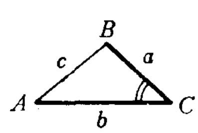
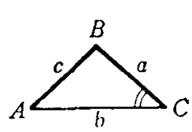
即
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

2）余弦定理 三角形任意一边的平方，等于其余两边的平方和减去该两边与它们所夹的角的余弦乘积的二倍。

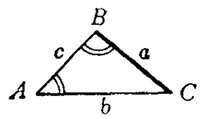
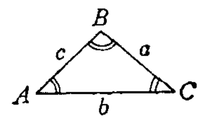
即
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

各类斜三角形的解法，列于表 1-1。

表 1-1

	已知条件		图形	确定其它参数所用公式
	类别	例如		
1	三边	$a\ b\ c$		1. $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 2. $\sin B$❶ $=\frac{b\sin A}{a}$ 3. 用余弦定理计算 $\cos B$，可得唯一解
2	两边及其夹角	$a\ b\ C$		1. $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}$ 2. $\sin A$❶ $=\frac{a\sin C}{c}$
3	两边及其中一边的对角	$a\ c\ C$		1. $\sin A$❶ $=\frac{a\sin C}{c}$ 2. $b=\frac{c\sin B}{\sin C}$

（续）

	已知条件		图　　形	确定其它参数所用公式
	类　别	例　如		
4	一边及任两角	aAB		1. $b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}$ 2. $c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}$
5	三　角	ABC		不定解，可作无数个相似三角形

❶ 如果两角之和为180°时，称该二角为互补角，根据三角函数的定义，锐角及其补角的正弦函数值是相同的，因此，用正弦定理确定角度时，要根据零件结构或工艺计算的具体要求来选择用锐角，还是用补角。

第三节　图形分析概述

一般的零件，它的投影图都是由直线和圆弧组成的平面几何图形。这些图形上的角度和直线尺寸的计算，一般可化为求解三角形的边角关系问题。

用解三角形的方法进行必要的工艺计算，通常有以下三个步骤：

1）明确工艺要求，并对零件图形进行几何分析，弄清各部分关系；

2）根据加工方法，对零件图形进行工艺分析，确定需要计算的角度和直线尺寸；

3）作出计算草图，必要时增作辅助线，构成可解三角形，从而求出所需的角度和尺寸。

其中工艺分析要结合具体零件，才能说明清楚，将在第四节实例中再作分析，本节从略。现将几何分析和作计算草图的问题简述如下：

1．几何分析　这里主要介绍零件图形中的圆弧连接问题，也就是将零件轮廓线分解成直线和圆弧，弄清它们之间是相切还是相交，找出其判别条件。

下列几个定理是分析此类问题的基础。

1）轨迹定理

定理 1　定半径的圆外切（或内切）于一定圆时，其圆心轨迹也是一个圆，且与定圆同心，其半径等于相切两圆半径之和（或之差），见图 1-6 *a*、*b*。

定理 2　定半径的圆切于定直线时，圆心轨迹是与定直线平行的两条直线（位于定直线两侧），和定直线间的距离等于定半径，见图 1-6 *c*。

定理 3　同时切于两条相交直线的圆，其圆心轨迹是此二直线所构成的角等分线，见图 1-6 *d*。

2）切点定理

定理 4　两相切圆的连心线过切点，见图 1-7 *a*。

定理 5　垂直于切线的圆半径过切点，见图 1-7 *b*。

用上述定理去分析零件图形，一般是容易弄清楚的。例如图 1-8 *a* 所示的是一个冲模的模块，在加工中为保证 $R20$ 同时与圆弧和直线相切，需计算出 $R20$ 中心的坐标。根据定

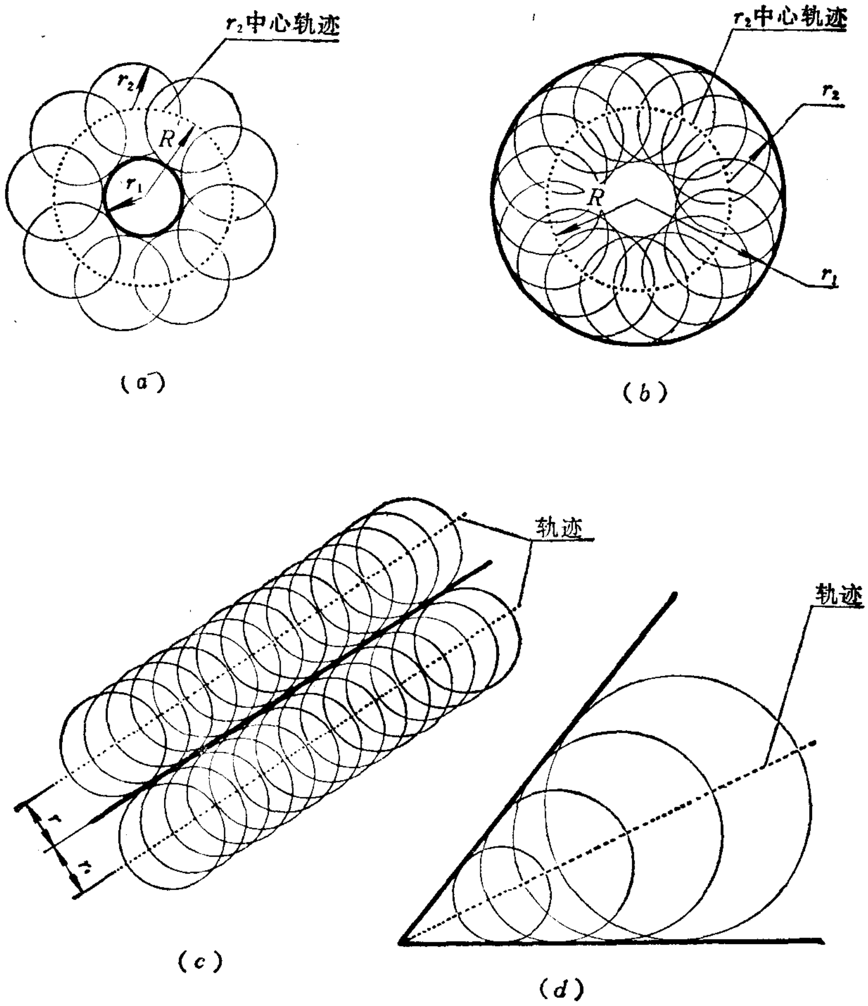


图1-6　圆的轨迹

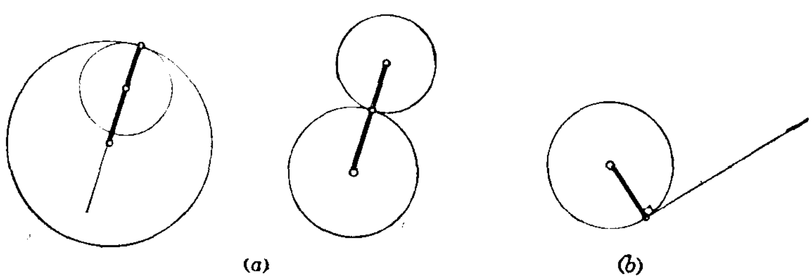
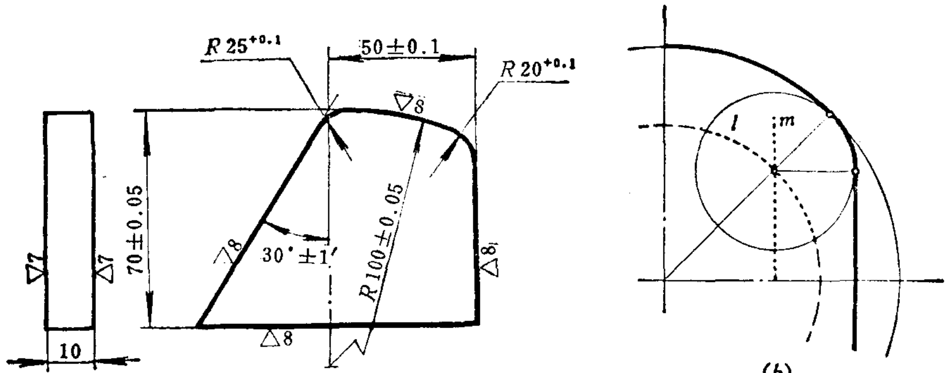


图1-7　圆的切点

理 2，R20 的中心应在直线m上；根据定理 1，它又应在圆弧 l 上（见图 1-8 b），因此，m和 l 的交点就是R20 的圆心。这样，它们之间的数量关系也就容易求得。

2. 作计算草图　将零件图形的几何关系分析清楚，并结合工艺要求，确定所求尺寸之后，就可以将已知和待求的角度及尺寸，作出直接的或间接的可解三角形（即计算草图），以便计算。



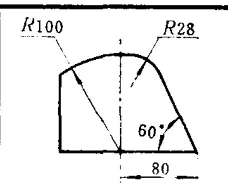
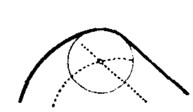
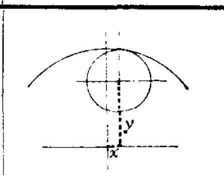
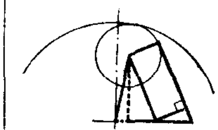
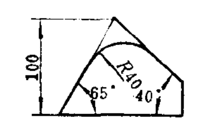
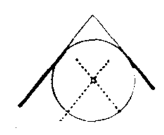
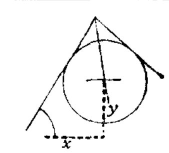
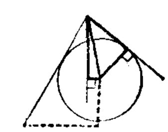
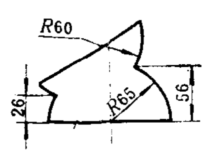
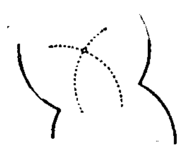
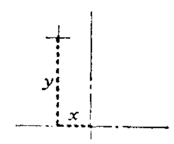
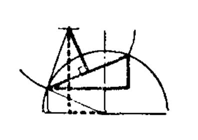
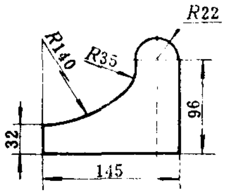
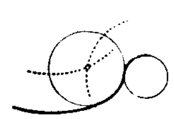
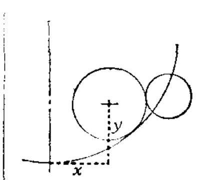
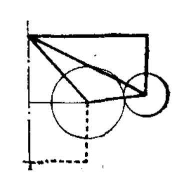
(a)　　　　　　(b)

图1-8　模块图形的几何分析

a—零件图；b—理论分析图。

在计算草图中，这些三角形的边，一般是由圆的切线、联心线、过切点的半径或公共弦等构成。现将几种常见零件的计算草图列于表 1-2，该表中各图是按分析过程分步骤地抽象出来。

表　1-2

已　　知	待　　定	工　作　图　形	确定圆心的原理图	所　求　坐　标	计　算　图　形
一圆和定直线、定圆相切	R 28圆的中心坐标				
一圆和两定直线相切	R 40圆的中心坐标				
两相交圆	R 60圆的中心坐标				
一圆与两圆相切	R 35圆的中心坐标				

在一些零件的计算草图上，辅助线作得合适，就可使问题得到迅速解决。要作出合适的辅助线，要在实践中不断积累经验。这里介绍一种作计算草图的基本方法，即当遇到难解的平面图形，可按画图步骤，根据图纸标注的尺寸依次分析。凡可以先画也可以后画的图线，表明它们之间是相对独立的；凡有严格先后次序要求的，就表明它们之间的依赖关

系。这样，作图次序就构成了图形各部分已知条件与待定尺寸之间的相互关系，把它们组合在一个或几个可解三角形内，就成为所需的计算草图。现举例如下：

图 1-9 a 所示的是一个带球体的圆锥零件，计算锥角时的辅助线不易作好，但按作图顺序明确了已知与待定尺寸间的关系后就不难了。

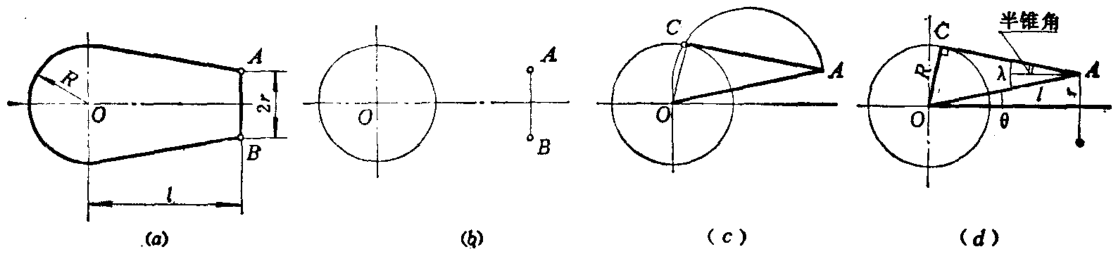


图1-9　按作图顺序分析图形

此例的分析和作图过程如下：

1）作球头和锥部小端的直径 A,B（见图 1-9 b）至此，这一问题就转为过一点 A 作定圆 R 的切线了。

2）过 A 点作圆 R 的切线。连接 OA，以 OA 为直径作半圆交定圆 R 于 C 点，连接 AC，则 AC 即为所求的切线（见图 1-9 c）。

3）连接 OC，则 OC、OA 和其它已知线段构成两个可解三角形，所以 OC、OA 就是解决问题的辅助线（见图 1-9 d）。

事实上，有了辅助线 OC、OA 后，根据 l、r 可求出 OA 及角度 θ。再由 OA 与 R 求出角度 λ，而半锥角 $= \lambda - \theta$。问题到此已得到解决。

第四节　应 用 实 例

1. 解直角三角形法应用举例

例 1　正多边形零件加工中的计算

各边长相等，各个角也相等的多边形称为正多边形，如正三、四、五、六边形（见图 1-10）。

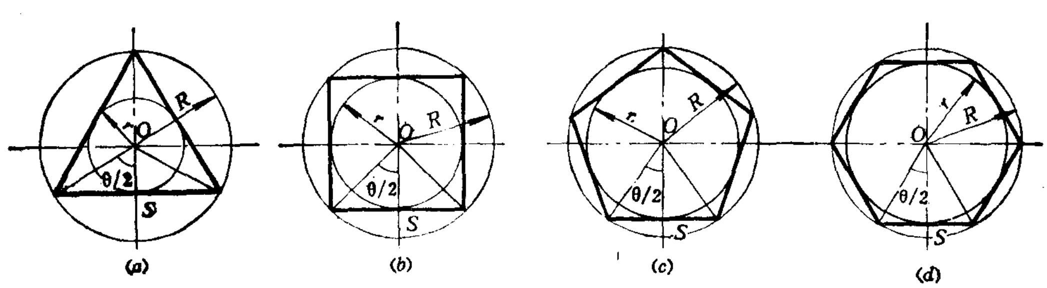


图1-10　正多边形

设正多边形的边数为 n，边长为 s，每边所对的圆心角为 θ，内切圆半径为 r，外接圆半径为 R，如图 1-11 所示。从几何关系中可得：

$$\theta = \frac{360^\circ}{n}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{s}{2R}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{r}{R}$$

$$\text{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{s}{2r}$$

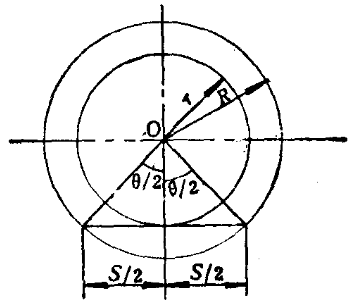


图1-11　正多边形的几何关系

1）图 1-12 a 是个冲正六方孔的冲头，在设计中需要给出最大轮廓尺寸 L。

图1-12 a 中尺寸 L 是正六边形两相对顶点间的距离，可作出计算关系图（见图1-12 b）。

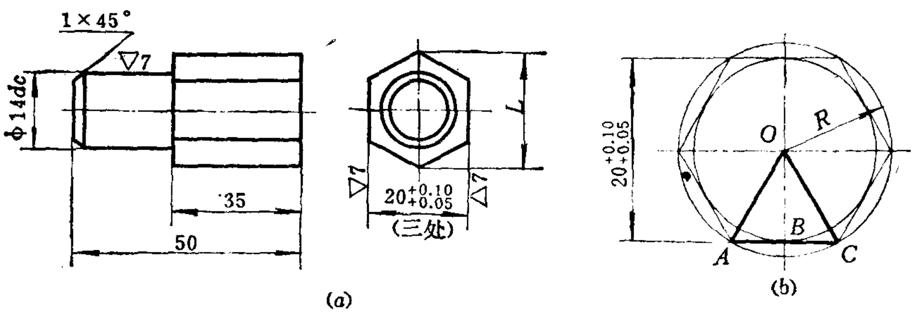


图1-12　正六方冲头及其计算图

图 1-12 b 中 $20^{+0.10}_{+0.05}$ 是正六边形的内切圆直径 $2r$，所求的 L 为正六边形的外接圆直径 $2R$，即

$$L = 2R$$

为求得 L，只要求出 R 即可。

因为是正六边形，所以

$$s = R$$

$$\theta = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

$\triangle AOB$ 是直角三角形

$$\angle B = 90^\circ$$

$$\angle AOB = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

$$OB = r = \frac{20.1}{2} = 10.05$$

$$\begin{aligned} \therefore R &= OA \\ &= OB \sec 30^\circ \\ &= 10.05 \sec 30^\circ \\ &= 11.604 \end{aligned}$$

$$L = 2R$$
$$= 2 \times 11.604$$
$$= 23.208 \text{（}L\text{为最大极限尺寸）}$$

2）图 1-13 是个分度盘。盘上 ϕ$10D$六等分孔的位置在加工后要进行检查，通常采取测量相邻两孔的弦长来检查孔的位置是否符合要求，测量的方法是在相邻两孔 ϕ$10D$中插入两根量棒，用千分尺量出这两根量棒外圆柱面之间的实际距离是否符合计算值L。

计算L值是先求出弦长s，然后加上量棒的直径d。

则 $$L = s + d$$

很明显，弦长s就是正六边形的边长（见图 1-14）。

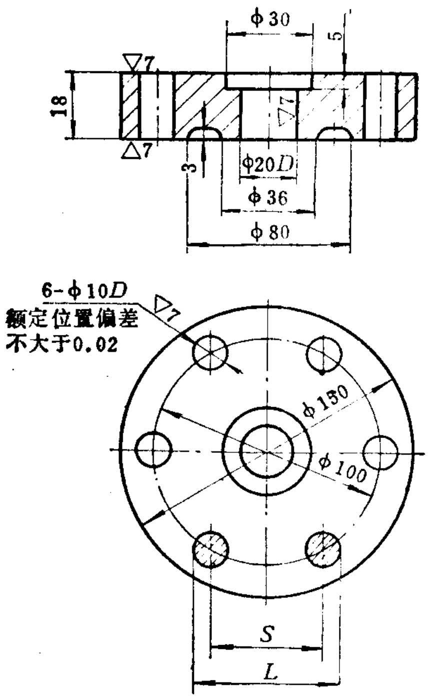


图1-13 分度盘

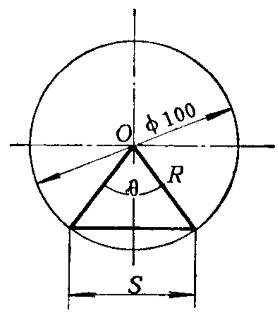


图1-14 分度盘孔距计算图

所以
$$\theta = 60^\circ$$
$$s = R = 50$$
$$d = 10$$
$$L = s + d$$
$$= 50 + 10$$
$$= 60$$

3）扇形定位板，如图 1-15 所示，在单件生产中，有时要用矩形板材加工，下料时，须按零件的最大轮廓尺寸，计算出矩形的长宽尺寸，即a和b。

从图 1-15 中的图形，可抽象出计算关系图，如图 1-16 所示。

已知
$$OB = R_1 = \frac{680}{2} = 340$$
$$OA = R_2 = \frac{600}{2} = 300$$
$$\theta = 50^\circ$$
$$\frac{\theta}{2} = 25^\circ$$

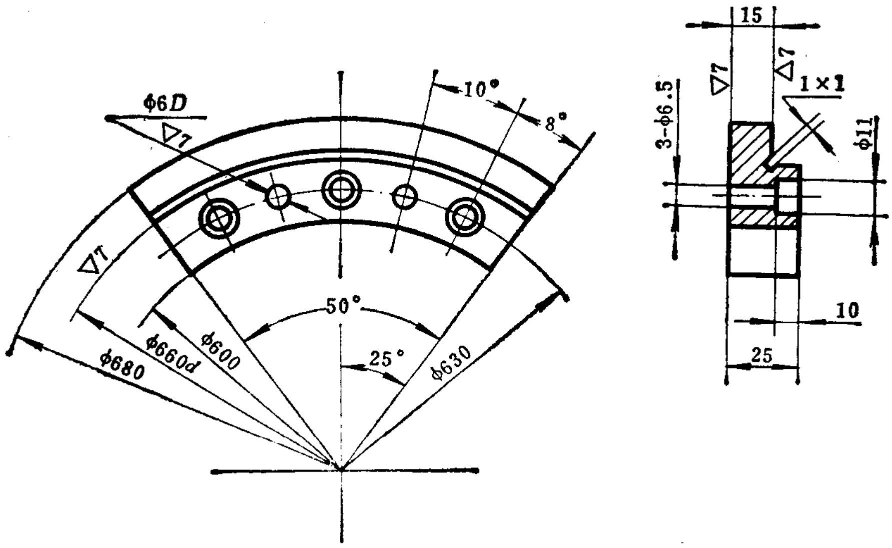


图1-15　扇形定位板

计算 a 和 b

从图 1-16 中可见，仿照计算正多边形尺寸的方法

$$a = 2BC$$

$$= 2R_1\sin\frac{\theta}{2}$$

$$= 2\times340\times\sin25^\circ$$

$$= 287.38$$

$$b = R_1 - R_2\cos\frac{\theta}{2}$$

$$= 340 - 300\times\cos25^\circ$$

$$= 340 - 271.892$$

$$= 68.108$$

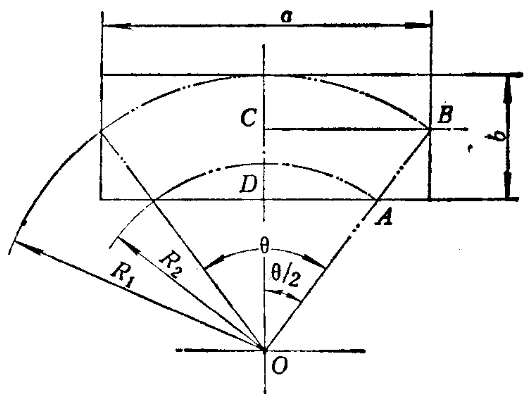
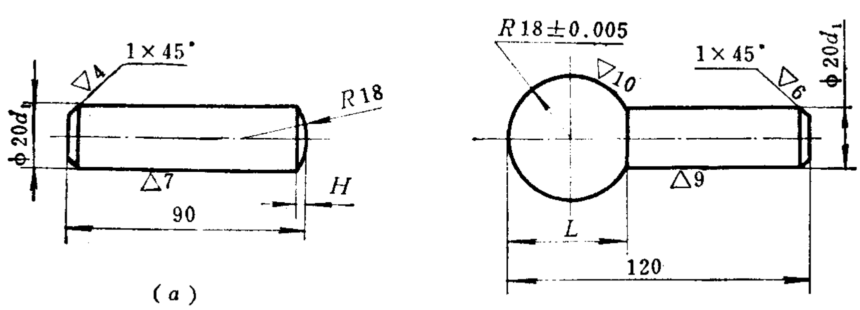


图1-16　扇形定位板的计算图

例 2　球头零件加工中的计算

图 1-17 a 是定位销，图 1-17 b 是球头测量器。在车削加工中往往需要分别计算出尺寸H和L。



(a)　　　　(b)

图1-17　具有球面的零件

这两个零件虽然外表不一样，但其计算关系是相同的，两者均可抽象成同一个计算关系图，如图 1-18 所示。

在$\triangle AOC$中，已知$\angle C=90^\circ$；$OA=18$；$AC=10$，求H和L。

由勾股定理可知

$$OA^2=OC^2+AC^2$$

$$OC^2=OA^2-AC^2$$

$$OC=\sqrt{OA^2-AC^2}=\sqrt{18^2-10^2}=14.966$$

$$H=OB-OC$$

因 $$OB=OA=r=18$$

故 $$H=18-14.966=3.034$$

$$L=r+OC=18+14.966=32.966$$

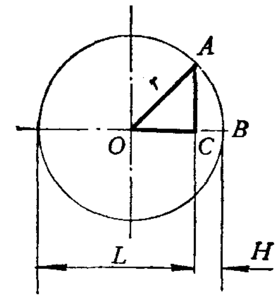


图1-18　球头部分计算图

例 3　燕尾形零件的测量与计算

带燕尾的滑块，如图 1-19 所示，带有燕尾槽的底座，如图 1-20 所示。

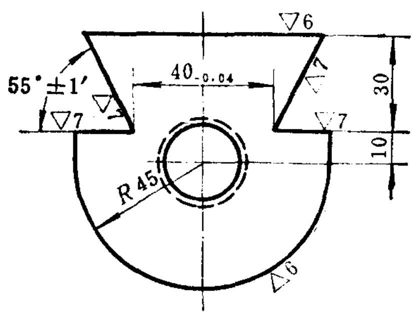


图1-19　带燕尾的滑块

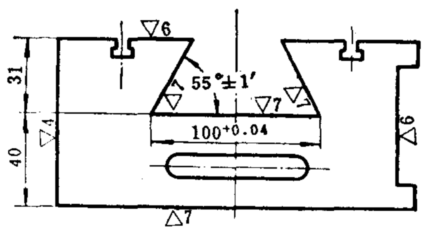


图1-20　带有燕尾槽的底座

在加工中，燕尾和燕尾槽的尺寸，通常是采取间接测量法测量的。其测量方法是在燕尾的两侧各放一根量棒，用千分尺测量H_1值，如图 1-21 所示。

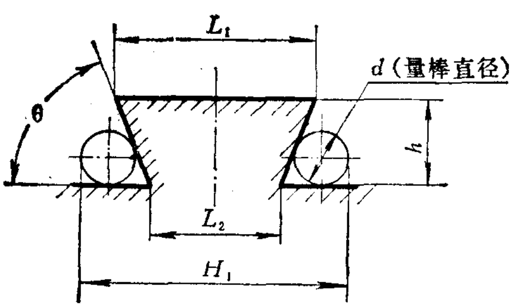


图1-21　用量棒测量燕尾

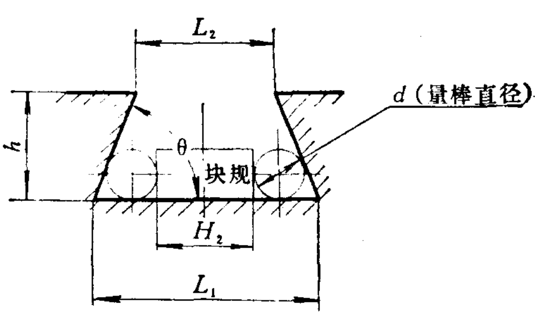


图1-22　用量棒块规测量燕尾槽