数学解题的一座桥梁

王连笑

SHUXUE JIETI DE YIZUO QIAOLIANG

天津人民出版社

数学解题的一座桥梁

王 连 笑

天 津 人 民 出 版 社

数学解题的一座桥梁
王 连 笑
*
天津人民出版社出版
（天津市赤峰道124号）
天津新华印刷二厂印刷 天津市新华书店发行
*
开本787×1092毫米 1/32 印张 4 1/8 字数 60,000
一九八〇年七月第一版
一九八〇年七月第一次印刷
印数：1—170,000
统一书号：13072·10
定 价：0.30元

内 容 提 要

解几何题常常需要添置辅助线，解方程有时需要用辅助未知数进行变量代换，……，这种利用辅助元素（辅助未知数、辅助变数、辅助角、辅助函数、辅助方程、辅助线等）作为桥梁的解题方法，对于解决某些数学题很有用处。本书就是通过一定数量的例题向大家介绍“辅助元素法”，学习并掌握这种方法对于基本技能的训练和解题技巧的形成是有益的。书末附有练习题及参考答案。本书可供高中学生阅读，也可供中学数学小组开展课外活动时参考。

目　　录

一　谁的个子高？

放学了，同学们满载着一天学习的收获，欢快地回家了．整个校园里显得空荡荡的．可是，高一（1）班的教室里却非常热闹．这是怎么回事呢？原来，在数学课上王老师曾经给大家留了一个思考题，这个题目引起了同学们的兴趣，而且对答案有两种完全不同的意见．于是，放学后，同学们就激烈地争论起来了．

王老师留下的题目是这样的：

有一百个同学站成了一个方队，这个方队每一横排十个人，共站了十排．为了叙述方便，我们把每一横排叫做一行，每一竖排叫做一列．这一百个同学所站的方队就是一个十行十列的方队．如果我们从每一行中挑选出这一行中最高的一个，这样就挑出了十个各行的最高者，从这十个高个子中我们选出一个最矮者，这人就称为“高个子中的矮个”，然后，再从每一列中挑选出这一列中最矮的一个，这样就挑出了十个各列的最矮者，从这十个矮个子中我们选出一个最高者，这人就称为“矮个子中的高个”，如果这一百个同学并不都是一样高，请问，“高个子中的矮个”与“矮个子中的高个”究竟谁的个子高？

高一（1）班有的同学说：“高个子中的矮个”高，理由是，虽然是矮个，毕竟是属于高个子的集合；而另外一些同

学则认为“矮个子中的高个”高，理由是，虽然是矮个子的集合，但毕竟是这个集合中最高的呀！因为理由都不充分，所以谁也说服不了谁．

那么，谁的意见对呢？有的同学建议先通过试验来检验检验，高一（1）班没有一百人，就把全班的四十九个人全集合在一起，这四十九人并不都是一样高，他们站成了一个七行七列的方队，按照题目的要求找出高个中的矮个和矮个中的高个，结果是高个中的矮个比矮个中的高个要高．这是偶然的还是必然的呢？有的同学对这个结果有怀疑，又重新做了一遍试验，第二次做试验时，大家站的位置做了更换，这样一来，找出的高个中的矮个与矮个中的高个当然就不一定是原来的那两个人，但是结论却完全相同．大家又做了第三次试验，结论还是一样．那么，这个结论是否具有普遍性呢？因为刚才大家做的都是试验，这种试验即使做上一百次，一千次也决不能代替数学上的证明呀．

怎样证明这个结论呢？同学们找到了王老师，王老师又启发大家进行了证明：

高个中的矮个（我们设他为A）是从各行中挑选出来的，矮个中的高个（我们设他为B）是从各列中挑选出来的，这怎么比较呢？这不是风马牛不相及吗？所以要比较A和B谁高，就得想办法找一个媒介，给A和B搭起桥来．怎么搭这座桥呢？比如A是从第K行挑选出来的，当然A是第K行中的最高者，B是从第M列中挑选出来的，当然B是第M列中的最矮者，我们请C来帮忙，C是既站在第K行，又站在第M列的人．我们先比较A和C，由于A和C都在第K行，

当然A不比C矮（因为A是此行最高者），再比较C和B，由于C和B都在第M列，当然C不比B矮(因为B是此列最矮者)，这样一来，由A不比C矮，C不比B矮，可以得出A不比B矮的结论，如果这个方队的人不都是一样高，那么A和B就不会一样高，结论就是A比B高.

这个题目解决了，大家高高兴兴地就要回家了，可是王老师却又把大家留住了.

王老师说:“同学们会做这个题目了,这很好,但是，做完一个题目之后,一定还要继续进行思考.‘学而不思则罔’，如果做完题目就满足于这个题目会了，而不再思考，做一个题目就只能会一个题目，世界上的数学题何止成千上万，我们什么时候才能做完呢？所以我们不仅要学会解题，更重要的是学会解题之后的思考，通过思考提高解题的能力，这样才能举一反三，事半功倍.就拿这个题目来说吧，大家已经看出来了，对于A和B来说，C虽然是一个配角，但是C很重要，没有C就没有办法比较A和B，所以C是一个媒介，是一座桥梁.我们在解数学题时，经常要搭起一座座桥梁.你们想一想，在平时的解题中遇到没遇到过需要通过一些辅助的数字或者图形来搭起桥梁呢？”

“有！例如解平面几何题时，有时就需要添辅助线.”

“还有，解方程时，有时需要设辅助未知数.”

“对了，您在课上给我们讲解求

$$\sqrt{3}\sin x+\cos x$$

的极值的时候，就教给我们设辅助角.”

同学们争先恐后地回答着王老师提出的问题.

“好！同学们想的这些都对．辅助线、辅助未知数、辅助角，还有辅助数列、辅助函数、辅助方程、辅助变数等等都是解题的媒介，解题的桥梁．通过这些辅助的数和图，或者把还没有建立起联系的已知条件联系起来，或者把已知条件与未知条件连结起来，或者把我们没学过的知识通过这些辅助元素转化为已经学过的知识，这样，我们就能化难为易，就能一桥飞架南北，天堑变通途．我们姑且把这种方法叫做辅助元素法吧！这种辅助元素法的灵活运用可以提高解题能力和技巧，你们平时要注意积累这方面的题目，注意这种通过辅助元素进行解题方法的训练．”

王老师的话激发了同学们的学习兴趣，大家很注意积累和收集这方面的题目，王老师又帮助大家把这些题目分类进行了整理．

同学们看了下面这些题目之后，再做一些练习，解题的能力一定会得到提高，对于形成一定的解题技巧也一定会有所帮助，同时，也为以后学习高等数学做好了一些准备，因为在高等数学中经常用到这种设辅助元素进行解题的方法．

同时，我们还建议用心的读者，在阅读下面的例题时，最好先不要阅读解答（当然下面给出的各题的解法不一定是最好的，也不一定是唯一的），而是把书合起来，先自已独立思考一番．还希望把本书之末的练习题认真地练习一遍（当然也不要先看提示或参考答案）．

二　辅助未知数

在初中一年级的时候，大家就已经接触到了用辅助未知数解方程的例子，例如在学习"可化为一元一次方程的分式方程"的时候，课本上就曾经举出这样一个例题：

解方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x}+\dfrac{6}{y}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{8}{x}-\dfrac{3}{y}=\dfrac{3}{10} \end{cases}$$

在解这个方程组的时候，我们只要用X代替原方程组中的$\frac{1}{x}$，用Y代替原方程组中的$\frac{1}{y}$，这时原方程组就可以变为

$$\begin{cases} 6X+6Y=\dfrac{1}{2} \\ 8X-3Y=\dfrac{3}{10} \end{cases}$$

这个方程组是很容易解的.

有一些高次方程、分式方程或者无理方程，由于方程本身的复杂性，往往解起来十分困难，但是其中有一些题目可以象上面举的例题那样，通过设辅助未知数进行变量代换，往往可以将高次方程转化为低次方程，将分式方程转化为整式方程，将无理方程转化为有理方程，这样就可以使没有办

法解的题目有了办法，需要进行复杂运算的题目可以简化运算。下面看几个例子.

例1 解方程

$$(x+3)^4+(x+1)^4=82$$

这个方程如果直接展开来做，虽然可以明显地看出有一个根为0，但是，还要继续解一个三次方程，解三次方程对中学生来说，还是比较困难的，然而，如果设辅助未知数，解起来就很简单.

[**解**] 设$x+2=u$

则原方程可化为

$$(u+1)^4+(u-1)^4=82$$

整理此方程得

$$u^4+6u^2-40=0$$

这是一个双二次方程，这个方程也可以用辅助未知数来解.

设 $u^2=v$

则 $v^2+6v-40=0$

$$(v-4)(v+10)=0$$

$$v_1=u_1{}^2=4,\quad v_2=u_2{}^2=-10$$

即 $(x+2)^2=4$，$(x+2)^2=-10$

解这两个方程即得

$$x_1=0,\ x_2=-4,\ x_3=-2+\sqrt{10}i,$$
$$x_4=-2-\sqrt{10}i$$

——解毕

解这个方程用了两次辅助未知数，特别是遇到形状如$ax^{2n}+bx^n+c=0$的方程（如本题的双二次方程u^4+6u^2-40

$=0$），只要设 $x^n=u$，就可以化为一个一元二次方程 $au^2+bu+c=0$ 来解.

例 2 解方程组：

$$\begin{cases}(x^2+1)(y^2+1)=10 & (1)\\ (x+y)(xy-1)=3 & (2)\end{cases}$$

［解］ 把方程(1)化为

$$x^2y^2+x^2+y^2+1=10$$

$$(x^2y^2-2xy+1)+(x^2+2xy+y^2)=10$$

$$(xy-1)^2+(x+y)^2=10 \qquad (3)$$

观察方程(3)和方程(2)，可以看到，如果把 $x+y$ 和 $xy-1$ 分别看成两个未知数，就可以化为两个简单方程，为此，我们设

$$x+y=m \qquad (4)$$

$$xy-1=n \qquad (5)$$

则有
$$\begin{cases}m^2+n^2=10 & (6)\\ mn=3 & (7)\end{cases}$$

方程(6)＋2×方程(7)得

$$(m+n)^2=16$$

$$m+n=\pm 4 \qquad (8)$$

方程(6)－2×方程(7)得

$$(m-n)^2=4$$

$$m-n=\pm 2 \qquad (9)$$

解方程(8)，(9)可得

$$\begin{cases}m_1=3\\n_1=1\end{cases}\quad\begin{cases}m_2=-1\\n_2=-3\end{cases}\quad\begin{cases}m_3=1\\n_3=3\end{cases}\quad\begin{cases}m_4=-3\\n_4=-1\end{cases}$$

将m，n的值代入(4)，(5)，可得方程组

$$\begin{cases}x+y=3\\xy=2\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=-1\\xy=-2\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=1\\xy=4\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+y=-3\\xy=0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x_1=1\\y_1=2\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=2\\y_2=1\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=-2\\y_3=1\end{cases}\quad\begin{cases}x_4=1\\y_4=-2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_5=\dfrac{1+\sqrt{15}\,i}{2}\\[2ex]y_5=\dfrac{1-\sqrt{15}\,i}{2}\end{cases}\quad\begin{cases}x_6=\dfrac{1-\sqrt{15}\,i}{2}\\[2ex]y_6=\dfrac{1+\sqrt{15}\,i}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_7=0\\y_7=-3\end{cases}\quad\begin{cases}x_8=-3\\y_8=0\end{cases}$$

——解毕

观察这个方程组大家可以看出，x与y的数值可以互换，也就是说，x与y是对称的，这种具有对称型的方程组往往都可以用辅助未知数进行变量代换.

例3 解方程

$$4x^6-12x^5-3x^4+26x^3-3x^2-12x+4=0$$

［解］ 由方程可以看出$x=0$显然不是方程的根，我们注意到和$26x^3$距离相等的对应项系数相等，于是，可以用

x^3除方程的每一项可得

$$4x^3-12x^2-3x+26-\frac{3}{x}-\frac{12}{x^2}+\frac{4}{x^3}=0$$

$$4\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-12\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$+26=0 \qquad (1)$$

我们设 $\quad x+\dfrac{1}{x}=y \qquad (2)$

则 $\quad x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}\right) \quad 2$

$$=y^2-2 \qquad (3)$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=(y^2-2)y-y$$

$$=y^3-3y \qquad (4)$$

将(2)、(3)、(4)代入(1)得

$$4(y^3-3y)-12(y^2-2)-3y+26=0$$

$$4y^3-12y^2-15y+50=0$$

$$4y^3+8y^2-20y^2-40y+25y+50=0$$

$$4y^2(y+2)-20y(y+2)+25(y+2)=0$$

$$(y+2)(4y^2-20y+25)=0$$

$$(y+2)(2y-5)^2=0$$

所以 $\quad y_1=-2,\ y_2=\dfrac{5}{2},\ y_3=\dfrac{5}{2}$

即 $$x+\frac{1}{x}=-2,\quad x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2},\quad x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$$

所以 $$x_1=-1,\quad x_2=-1,\quad x_3=2,$$

$$x_4=\frac{1}{2},\quad x_5=2,\quad x_6=\frac{1}{2}$$

——解毕

观察这个方程的根，可以知道，x_1和x_2，x_3和x_4，x_5和x_6互为倒数．一般地说，如果$f\left(\frac{1}{x}\right)=0$的根和$f(x)=0$的根完全相同，那么$f(x)=0$叫做倒数方程．从这个例题看到$x^6$的系数与常数项相同，$x^5$与$x$的系数相同，$x^4$与$x^2$的系数相同，这就是倒数方程的特点．一般地，对于一个偶次方程，若

$$a_{2m}x^{2m}+a_{2m-1}x^{2m-1}+a_{2m-2}x^{2m-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

若x^k的系数与x^{2m-k}的系数相等，即

$$a_k=a_{2m-k}$$

这个方程就叫做标准倒数方程．这种倒数方程的解法一般都和例 3 的解法相同，通过设辅助未知数y，使

$$y=x+\frac{1}{x}$$

再推算出 $$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=y^4-4y^2+2$$

……

就可以把一个$2m$次方程化为m次方程，从而达到降次的目的.

例4 解方程

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}=x$$

[**解**] 把原方程移项得

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}}=x-\sqrt{1-\frac{1}{x}}$$

两边平方得

$$x-\frac{1}{x}=x^2+1-\frac{1}{x}-2x\sqrt{1-\frac{1}{x}}$$

$$x^2-x+1-2\sqrt{x^2-x}=0$$

设 $y=\sqrt{x^2-x}$

则 $y^2-2y+1=0$

$y=1$

于是 $x^2-x-1=0$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

可以验证 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 为原方程的根，而 $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$ 为增根.

——解毕

这个题目就是通过辅助未知数的代换，把无理方程变为

有理方程．此题还可以用设两个辅助未知数的办法变为有理方程，解法如下：

［解法二］ 设 $u=\sqrt{x-\frac{1}{x}}$ （1）

$$v=\sqrt{1-\frac{1}{x}} \quad (2)$$

则 $u^2=x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}$ （3）

$$v^2=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x} \quad (4)$$

因为 $u+v=x$ （5）

$$u^2-v^2=\frac{x^2-1}{x}-\frac{x-1}{x}=x-1 \quad (6)$$

方程(6)÷(5)得

$$u-v=\frac{x-1}{x}=v^2 \quad (7)$$

方程(5)+(7)得

$$2u=v^2+x=x+\frac{x-1}{x}=x-\frac{1}{x}+1$$

$$2u=u^2+1 \quad (8)$$

整理(8)式得

$$u^2-2u+1=0$$

$$u=1$$

把$u=1$代入(3)得

$$x^2-x-1=0$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$