线性代数学习指导与习题解答

哈尔滨工程大学应用数学系　编

哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导与习题解答/哈尔滨工程大学应用数学系编.—哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2002
ISBN 7-81073-288-9

Ⅰ.线...　Ⅱ.哈...　Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 023724 号

内容简介

本书内容分为两大部分,第一部分通过典型例题的归纳、分析与求解,加深理解线性代数的内容,熟练掌握各种解题方法、技巧和规律,提高解题能力。第二部分是王锋和陈林珠主编的《线性代数》中全部习题的解答。

本书可作为理、工科和经济学科的复习辅导书,也可作为考研的强化训练指导书。

哈尔滨工程大学出版社出版发行
哈尔滨市南通大街145号　哈工程大学11号楼
发行部电话:(0451)2519328　邮编:150001
新华书店经销
肇东粮食印刷厂印刷
*
开本 850mm×1 168mm　1/16　印张 8.5 字数 220 千字
2002 年 5 月第 1 版　2002 年 5 月第 1 次印刷
印数:1—4 000 册
定价:10.00 元

前　　言

线性代数是高等学校理、工科和经济学科有关专业的一门重要基础课。它的内容多、比较抽象，且具有一套特有的理论体系、思维方法及解题技巧。在线性代数的教学过程中，面临两个突出的矛盾：一方面，线性代数课的学时少，习题课不足；另一方面，后续专业课程及考研对学生学习这门课又有较高的要求。为了解决这些矛盾，我们编写了这本线性代数学习指导书。

全书分为两部分。第一部由于飞（第一章）、贾念念（第二章）、邱威（第三章）、陈林珠（第四、五章）编写。第二部分由王锋（第一、二章），卜长江（第三、四章）、沈艳（第五章）编写。

本书的编写和出版工作得以顺利进行，是与哈尔滨工程大学数学系全体教师的大力支持和帮助分不开的，并得到了哈尔滨工程大学出版社的大力支持。在此一并表示衷心感谢。

限于读者水平，书中疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

2002 年 4 月

目　　录

第一部分　线性代数辅导练习

第二部分　线性代数习题解答

第一部分　线性代数辅导练习

第一章　行　列　式

本章重点:行列式的计算

一、主要内容

1. n 阶行列式的定义

n 阶行列式是一个数,表示 n!项的代数和.即

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

$p_1 p_2 \cdots p_n$ 是自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,t 是这个排列的逆序数.

2. n 阶行列式的性质

(1) 行列式与其转置行列式相等

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $D = D'$

(2) 互换行列式的两行(列),行列式变号

(3) 行列式的某一行(列) 所有元素的公因子可以提到行列式

符号的外面

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(4) 若行列式的某一行(列) 的元素是两数之和,则这个行列式等于两个行列式之和.具体形式为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(5) 行列式的任一行(列) 的元素乘以同一个数后,加到另一行(列) 的对应元素上去,行列式不变.

3. 行列式的计算

(1) 利用行列式定义中,行列式的每一项都来自不同行不同列的特点计算行列式

(2) 利用性质计算行列式

(3) 用行列式按行(列) 展开:

(ⅰ) 行列式中任一行(列) 各元素与其代数余子式乘积之和等于此行列式之值,即

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

(ⅱ) 行列式中任一行(列) 各元素与另一行(列) 各元素对应

的代数余子式乘积之和等于零. 即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0 \quad (i \neq j) \quad \text{或} \quad D = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{jk} = 0 \quad (i \neq j)$$

行列式的计算是本章的重点. 主要技巧一般采用以下几种:利用性质化行列式为三角形;计算 n 阶行列式时,一般要利用递推公式、数学归纳法、加边法等技巧.

4. Cramer 法则

Cramer法则为解含 n 个方程 n 个未知数的线性方程组提供了一种公式解法(在系数行列式的值不为零时).

如果线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

的系数行列式不等于零,即则方程组(1) 有惟一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n = \frac{D_n}{D} \tag{2}$$

5. 常见行列式

(1) 对角行列式(对角线上的元素是 λ_i,未写出的元素都是0)

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

(2) 上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(3) 下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(4) 范德蒙(Vandermonde)行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$$

其中记号“$\prod$”表示全体同类因子的乘积.

二、基本题型:

例 1 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

分析 各行元素和为零,可根据行列式性质进行计算,将各列加到第一列,提取因子,消元化简便可计算.

解 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}\xlongequal[c_4+c_1]{\substack{c_2+c_1\\c_3+c_1}}$

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x^4$$

例 2 计算 $D = \begin{vmatrix} x_1+1 & x_1+2 & \cdots & x_1+n \\ x_2+1 & x_2+2 & \cdots & x_2+n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n+1 & x_n+2 & \cdots & x_n+n \end{vmatrix}$

解 当 $n = 2$ 时 $D = \begin{vmatrix} x_1+1 & x_1+2 \\ x_2+1 & x_2+2 \end{vmatrix} = x_1 - x_2$

当 $n > 2$ 时,将 D 的第一列乘 -1 后加到其余各列,则

$$D = \begin{vmatrix} x_1+1 & 1 & 2 & n-1 \\ x_2+1 & 1 & 2 & n-1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n+1 & 1 & 2 & n-1 \end{vmatrix} \quad \text{即 } D = 0$$

例 3 已知行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & -9 \\ 23 & 1 & 12 & 4 \\ -4 & 1 & 3 & 45 \\ 4 & 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$,求 $A_{14} + A_{24} + A_{34} + A_{44}$ 的值,其中 A_{ij} 为行列式D_4 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

解 如直接计算很麻烦且容易出错,所以不可取.由于 $A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=1\cdot A_{14}+1\cdot A_{24}+1\cdot A_{34}+1\cdot A_{44}$ 它是行列式 D_4 中第2列元素与第4列对应元素代数余子式的乘积之和,故由展开式定理得 $A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=0$

例 4 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$

解 将第2列的 $-1/2$ 倍,第3列的 $-1/3$ 倍,…… 第 n 列的 $-1/n$ 倍都加到第一列上,则

$$D=\begin{vmatrix}1-\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{1}{i}&1&1&\cdots&1\\0&2&0&\cdots&0\\0&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}=n!(1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i})$$

例 5 已知 204,527,255 都能被 17 整除,试证

$$D_3=\begin{vmatrix}2&5&2\\0&2&5\\4&7&5\end{vmatrix}$$

能被 17 整除.

证 给定的三个3位数,其各位数字恰分别为 D_3 的3个列的元素,为将 D_3 的第3行的3个元素分别化成204,527,255,将 D_3 的第1,2行分别乘上 10^2,10,且都加到第3行,得到

$$D_3=\begin{vmatrix}2&5&2\\0&2&5\\204&527&255\end{vmatrix}$$

由题设,17 能整除上行列式的第 3 行,故 D_3 能被 17 整除.

例 6 计算 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & & \cdots & n^n \end{vmatrix}$

解 从第一行提出 1,第二行提出 2,… 第 n 行提出 n 得

$$D_n = n!\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & n & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}$$

此式为 n 阶范德蒙行列式

则 $D_n = n!(2-1)(3-1)\cdots(n-1)(3-2)\cdots$

$(n-2)\cdots[n-(n-1)] =$

$n!(n-1)!\cdots 2!\cdot 1!$

例 7 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1^2+1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2+1 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2+1 \end{vmatrix}$$

解

$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1^2+1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ 0 & x_2x_1 & x_2^2+1 & \cdots & x_2x_n \\ 0 & x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2+1 \end{vmatrix}$(把原行列式加了一行,一列)

$$D_n \xlongequal[i=1,2,\cdots,n+1]{\text{第 } i \text{ 行减第 1 行的 } x_{i-1} \text{ 倍}} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_n & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n+1]{x_{i-1}C_i + C_1}$$

$$\begin{vmatrix} 1+\sum_{j=1}^{n} x_j^2 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$1+\sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

例 8 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 2 \\ n & n-1 & \cdots & 3 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n-1 & \cdots & n-1 & n-1 & n-1 \\ n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix}$$

解 将 $n-1$ 列的 -1 倍加到第 n 列，把第 $n-2$ 列的 -1 倍加到第 $n-1$ 列，以此类推，把第 1 列的 -1 倍加到第 2 列，可把原行列式化为

$$D_n = \begin{vmatrix} n & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 \\ n & -1 & \cdots & -1 & -1 & 0 \\ n & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(-1)^{n-1}n = (-1\frac{(n-1)(n+2)}{2}n$$

例 9 证明

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 + x \end{vmatrix} =$$

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n (n \geqslant 2)$$

证明 将 D_n 按第 1 列展开得

$$D_n = x\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & a_1 + x \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix} =$$

$$a_n + xD_{n-1}$$

由此得递推公式 $D_n = a_n + xD_{n-1}$，利用此递推公式可得

$$D_n = a_n + xD_{-1} = a_n + x(a_{n-1} + xD_{n-2}) =$$

$$a_n + a_{n-1}x + x^2 D_{n-2} = \cdots =$$

$$a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1 x^{n-1} + x^n$$

例 10 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ x & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ x & x & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ x & x & x & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

解 从第 2 行开始,逐行乘以 -1 加到上一行,得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

在对列自右向左逐列相减,从 $n-1$ 列开始,依次把前一列乘 -1 加到后一列,得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-x & x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-x & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & x & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x \end{vmatrix}$$

按第一列展开,得

$$D_n = (1-x)\begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x \end{vmatrix} +$$

$$x(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-x & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^n[(x-1)^n - x^n]$$

例 11 求 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & a_1 & x & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & x \end{vmatrix}$ 的根

解 第一行乘 -1 后加到其余各行，得

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x-a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a_n \end{vmatrix} =$$

$$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

所以 $f(x)$ 的根为 $a_1,\cdots,a_n$

例 12 计算 $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} ==$

$$a_1a_2\cdots a_n(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})$$

解 将 D_{n+1} 按第一列展开

$$D_{n+1}=a_0\begin{vmatrix}a_1&0&\cdots&0\\0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\a_1&0&0&\cdots&0\\0&0&a_3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1&1&1&\cdots&1\\a_1&0&0&0&\cdots&0\\0&a_2&0&0&\cdots&0\\0&0&0&a_4&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\a_1&0&\cdots&0&0\\0&a_2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{n-1}&0\end{vmatrix}=$$

$$a_0a_1a_2\cdots a_n-a_2a_3\cdots a_n-a_1a_3\cdots a_n-a_1a_2a_4\cdots a_n-\cdots$$
$$-a_1a_2\cdots a_{n-1}$$

当 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$ 时，还可以改写成

$$D_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$$

例 13 计算 n 阶行列式

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}1-a_1&a_2&0&\cdots&0&0\\-1&1-a_2&a_3&\cdots&0&0\\0&-1&1-a_3&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1-a_{n-1}&a_n\\0&0&0&\cdots&-1&1-a_n\end{vmatrix}$$

解 将 Δ_n 最后一列各元素看成是两项的和，则