高等学校教学参考书

误差理论与平差计算

〔联邦德国〕W.赫普克 著

田佩俊 译 孔昭璧 校

煤炭工业出版社

译 者 的 话

本书是W.赫普克博士根据自己的教学实践经验编著的。本书突出的特点是所给出的各种平差计算数学模型直接服务于计算机软件的编制，因而使平差理论的讲授与计算机计算应用有机地结合起来。本书篇幅不大，但涉及的平差问题却较为广泛。这些，对我国的测量平差教学和测绘工作都有参考的价值。

在本书翻译过程中，孔昭璧同志作了大量的校订工作，使译文质量有较大提高；贺祖琪副教授对全书作了审阅；关蕴董同志在初译和稿件整抄中，做了很多工作。在此，对他们表示衷心感谢。

译 者

1988年6月29日

前　　言

这本书是根据我的授课内容整理而成的，我想将它作为教学的主要参考书。本书的内容比较详尽，可以帮助初学者克服理论应用方面的困难。经过一段教学的实践证明，按本书内容讲授，能使学生学到更多的新理论，同时对所学的内容也可有深入地理解。

本书中很多问题都用矩阵代数描述，因此对矩阵代数做了详细介绍，同时提供了大量实例和练习。这里不仅把矩阵作为大型计算系统的速记方法，更重要的是去解决矩阵的运算问题。这样，本书的主要内容——误差理论和平差计算方法就能容易理解了。在这些章节中同样结合实例进行了讲解。本书引入的检验方法、分析方法和推估方法，可以作为平差计算的补充内容。

这本书是在W.格罗斯曼教授倡导下写出的。在我和J.克利格尔博士的讨论中受到很多启示，J.克利格尔博士还给本书提供了大量的实例，并且在校稿中也给予了极大的帮助。J.克拉梅尔先生为本书绘了图。R.西维尔特夫人为我完成原稿付出了辛勤的劳动。借此机会向他们表示衷心的感谢。

W.赫普克

1980年4月于汉诺威

目　　录

1. 矩阵代数引论

像应用数学中的许多分支一样，在误差理论、平差计算、坐标变换和摄影测量中，常常遇到大规模的数字运算问题。这些问题采用矩阵计算的方法来解决，就很简便，并且一目了然。公式的推导也可以变得很简短明了，使结果容易记忆。甚至复杂的计算方法若采用矩阵来描述，也可得到比较直观的形式。这是优点之一。

优点之二是，在整个运算过程中，规定的初值、中间和最终结果均采用完全一样的矩阵格式，每个单独量的意义可由其在矩阵中所占的位置确定。

优点之三是，由于计算机的广泛应用，使矩阵代数具有更重大的意义。在矩阵代数基本运算的应用程序编制之后，任何变换或平差问题都可以用简洁的矩阵形式送入计算机，对大型数据的相同运算也不必再编程序。

在本引论中仅仅介绍了矩阵代数的基础知识和平差计算的必备内容。在本书的举例中未包含结构复杂的矩阵。然而，为了讨论平差计算和误差理论的核心问题，把逆矩阵作为本章的重点内容。本章还介绍了方阵的简单解法以及可以大量节省存储单元的方法。本章所有的算例及练习，均有助于以后各章中计算的应用。

1.1. 矩阵的定义、特殊形式和符号

1.1.1. 矩阵

$$\begin{Vmatrix} 1.64 & -2.34 \\ 7.31 & 0.38 \\ 6.14 & -1.42 \\ -2.19 & 3.15 \\ 5.06 & -8.73 \end{Vmatrix} = \underset{\square}{\underset{5,2}{\mathbf{A}}} \qquad \begin{Vmatrix} 4 & -2 & 0 & -6 & -1 \\ 2 & -4 & -5 & 7 & 4 \end{Vmatrix} = \underset{\square}{\underset{3,5}{\mathbf{B}}}{}^{*} \qquad \begin{Vmatrix} -1.4 \\ 0.7 \\ 2.3 \\ 0.6 \\ -4.7 \end{Vmatrix} = \underset{|}{\underset{5,1}{\mathbf{c}}}$$

A为竖立矩阵，B为横置矩阵，c为向量。

排列成m行和n列的有序数表称为矩阵，m，n是矩阵的阶数。

矩阵用左右划有双线或角括弧构成的数表表示。以大写拉丁字母作为矩阵的符号。如果用打字机打印时，在字母下边打一横线作为矩阵符号。矩阵的阶数是用字母下面的行数和列数表示，数字间用逗点隔开。

如果把矩阵的形式用一个明显的图形表示，就更容易看出矩阵的特点，如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \underset{\square}{\mathbf{A}} \qquad \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 & -1 \\ & 5 & -3 & 4 \\ & & 6 & 0 \\ & & & 3 \end{pmatrix} = \underset{\triangledown}{\mathbf{H}} \qquad \begin{pmatrix} 1.5 & & & \\ & 1.3 & & \\ & & 0.8 & \\ & & & 2.4 \end{pmatrix} = \underset{\diagdown}{\mathbf{P}}$$

---

* 这里的 $\underset{\square}{\underset{3,5}{B}}$ 应为 $\underset{\square}{\underset{2,5}{B}}$ ——责任编辑。

1.1.2.符号 矩阵的元素用拉丁字母表示时，元素所在位置，用字母的下标说明。前面一个数表示其所在行，后面一个数表示其所在列。

上面的A是一个3阶方阵，a_{11}，a_{22}，a_{33}是主对角线上的元素。

当$a_{21}=a_{12}$；$a_{31}=a_{13}$；$a_{32}=a_{23}$时，A称为对称矩阵。对称矩阵用图形◸表示。

如果在矩阵中有较大的或者明显的一部分元素全为零时，则零可不在矩阵中写出。例如，前面的矩阵H和P。

方阵中主对角线以上（或以下）的元素全部为零时，称为上（或下）三角矩阵。H是一个四阶上三角矩阵。除主对角线上元素外其它元素全为零的方阵称为对角矩阵。例如P为四阶对角矩阵。

$$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}=\underset{4,4}{E}\quad\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\underset{4,1}{e}\quad\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\underset{4,3}{0}\quad\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\underset{4,1}{o}$$

E称为单位矩阵，在矩阵中，它与自然数1的作用类似；

e称为幺向量，在平差计算和误差传播公式中常常出现；

0称为零矩阵；

o称为零向量；

E、e、0、o是本书中固定的表示符号。

1.1.3．转置矩阵

$$\begin{pmatrix}3&5\\6&7\\9&0\\0&4\end{pmatrix}=C\quad\begin{bmatrix}3&6&9&0\\5&7&0&4\end{bmatrix}=C^T\quad\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x\quad[x_1\ \ x_2\ \ x_3]=x^T$$

通过矩阵C的行与列互换得到的矩阵C^T称为C的转置矩阵。列向量x转置成为行向量x^T。对称矩阵满足条件：$A^T=A$。

1.1.4.形式的规定 在本书中，为了清楚地表达公式，原则上把长方形矩阵和方阵都用大写拉丁字母表示，向量用小写拉丁字母表示。如果长方形矩阵是竖立矩阵，并用A表示时，公式中出现它的横置矩阵就用A^T表示。同样，若a是列向量，则a^T为行向量。这种规定在数字运算和程序编制中具有实用价值。

1.1.5.行列式 方阵A的行列式的一个重要特性是具有确定的值。通常的表示符号为

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\det A\quad 或者\ |A|$$

$|A_{ik}|$表示一个去掉第i行和第k列后得到的子行列式。这样，行列式$|A|$就可用任

意一行或一列元素的余子式的展开式表达。例如，$|A|$ 用第一行元素的余子式展开式为：

$$|\mathbf{A}| = a_{11}|\mathbf{A}_{11}| - a_{12}|\mathbf{A}_{12}| + a_{13}|\mathbf{A}_{13}| - a_{14}|\mathbf{A}_{14}| + - \cdots \quad (1\text{-}1)$$

二阶行列式用下式计算：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1\text{-}2)$$

三阶行列式可用下面给出的表格来计算，很容易掌握。用这种方法与用式（1-1）计算的结果一样。这个表格是在原行列式的后面加上行列式的第一列和第二列，从而构成六条斜线上的三个元素的乘积，即

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \quad (1\text{-}3)$$

如果行列式高于三阶，用这种公式计算就很不方便，最好采用第1.3.节所述的方法。

下面的计算实例表明，三角矩阵的行列式的计算很简单，其值为第一列的元素与其余子式的乘积，即

$$\begin{vmatrix} 12 & 8 & -5 & 4 \\ & 2 & 1 & 3 \\ & & -4 & -2 \\ & & & 5 \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ & -4 & -2 \\ & & 5 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0$$

$$= 12\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ & 5 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 12\cdot 2\cdot(-4)\cdot 5 = -480$$

于是，三角矩阵的行列式的值等于主对角线上各元素的乘积，即

$$\det A \quad 或者 \quad \det A = a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn} \quad (1\text{-}4)$$

1.1.6.对角矩阵和迹 如果A是一个方阵，我们规定如下符号：

diagA 表示由A的主对角线上元素组成的对角矩阵，称之为A的对角矩阵。

trA 表示主对角线元素的和，称之为A的迹，即

$$\mathrm{tr}\mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots \quad (1\text{-}5)$$

1.1.7.列表示法 在公式推导和计算过程中，常用下式表示矩阵A：

$$\underset{n,m}{\mathbf{A}} = [a_1 a_2 \cdots a_m]$$

式中：a_i表示矩阵A的第 i 列。

在对称矩阵N中，第 i 列的n_i和第 i 行的n_i^T它们对应分量相等。

1.2. 运 算 规 则

1.2.1.加法和减法

1.2.1.1.如果两个矩阵阶数相同、且相应行列元素对应相等时，则称两个矩阵相等。例如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix} \quad a_{11}=3;\ a_{12}=0;\ \cdots\cdots$$

1.2.1.2.常数与矩阵相乘，等于矩阵的每个元素乘以该常数得到的矩阵。例如

$$2\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 10 \\ 12 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2.1.3.同阶矩阵相加或相减，等于对应元素相加或相减得到的矩阵。例如

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 6 \\ 7 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

1.2.1.4.加法和减法满足交换律和结合律。

$$A+B=B+A$$

$$A+B-C=(A+B)-C=A+(B-C)=(A-C)+B$$

1.2.2.乘法

1.2.2.1.两个矩阵的乘积AB等于一个新矩阵 C。矩阵 C中的元素c_{ik}是矩阵A的第 i 行元素与矩阵B的第 k 列对应元素的乘积之和，即

$$AB=C; \qquad a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots+a_{in}b_{nk}=c_{ik} \qquad (1\text{-}5)^*$$

$$A\cdot B=C$$

$$A\cdot Be=Ce \qquad \underset{4,3}{B}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}=Be$$

$$\underset{2,4}{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \underset{2,3}{C}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 8 & -7 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}=A\cdot Be=Ce$$

由以上数表得出一个相应的规律，即在C中的每一个元素都是由矩阵A的行与矩阵B的相应列组合而成。例如

$$c_{2,3}=3\cdot(-1)+4\cdot0+0\cdot2+5\cdot2=7$$

两个矩阵相乘，要求第一个矩阵的行数必须等于第二个矩阵的列数。这样，乘积的阶，由第一个矩阵的行数和第二个矩阵的列数来确定，即

$$\underset{m,n}{A}\cdot\underset{n,p}{B}=\underset{m,p}{C}$$

1.2.2.2.矩阵乘法不满足交换律。当上式中 p = m时，虽然AB和 BA 都有 意 义，但是，一般$\underset{m,m}{AB}$不等于$\underset{n,n}{BA}$。

矩阵乘法满足结合律：

$$\underset{m,n}{A}\cdot\underset{n,r}{B}\cdot\underset{r,p}{C}=\underset{m,r}{AB}\cdot\underset{r,p}{C}=\underset{m,n}{A}\cdot\underset{n,p}{BC}=\underset{m,p}{D}$$

矩阵乘法也满足分配律：

$$A(B+C)=AB+BC$$

只要上面的乘法有意义。

因为乘法不满足交换律，因此在说明矩阵相乘关系时，应该指明是左乘还是右乘。例如$a^T\cdot Cb$称为a^T左乘Cb。

---

* 有两个式（1-5），原文如此——责任编辑。

1.2.2.3.向量乘积

$$a=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix},\quad c=\begin{pmatrix}3\\-4\\2\\5\end{pmatrix}\quad \begin{matrix}a^Ta=14\ \ b^Tb=21\\ a^Tb=b^Ta=0\end{matrix}$$

$$ab^T=\begin{pmatrix}6&12&-3\\-2&-4&1\\4&8&-2\end{pmatrix},\quad ac^T=\begin{pmatrix}9&-12&6&15\\-3&4&-2&-5\\6&-8&4&10\end{pmatrix}$$

上面a^Ta或a^Tb等于一个标量，称为标量积。ab^T或ac^T等于一个秩为1的矩阵，它的列（或行）是线性相关的。

1.2.3.和检验法

1.2.3.1.

$$\underset{2,4}{A}=\begin{pmatrix}-3.4&0.0&4.1&1.2\\5.6&-0.8&3.2&0.0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}1.9\\8.0\end{pmatrix}=\underset{2,1}{Ae}$$

$$[\ 2.2\ \ -0.8\ \ 7.3\ \ 1.2\ ]=\underset{1,4}{e^TA}$$

用幺向量e乘矩阵，可得：

$\underset{m,n}{A}\cdot\underset{n,1}{e}=\underset{m,1}{Ae}$，其积为A的各行元素之和；

而 $\underset{1,m}{e^T}\cdot\underset{m,n}{A}=\underset{1,n}{e^TA}$，其积为A的各列元素之和。

1.2.3.2.对于$AB=C$的计算正确性的检验是通过右乘幺向量e来实现的，即$A\cdot Be=Ce$。实例见1.2.2.1.节。在算例中，于第二项矩阵中增添其行的和，并参与运算。这时，首先由$A\cdot Be$计算出Ce的行和，作为正确值，在运算结束后，根据$C\cdot e$得到计算值，两者对比，即可发现计算正确与否。

1.2.4.线性函数和线性方程组

用矩阵运算可以简写某些公式。设

$$\underset{n,1}{x}=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\quad \underset{n,1}{y}=\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\quad z=\begin{pmatrix}z_1\\\vdots\\z_n\end{pmatrix}\quad a=\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\quad A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

线性函数可写为$f=a_0+a^Tx$

线性方程组可写为$y=a+Ax$

相应地可以写出：

n个未知数的线性方程为$a^Tx+a_0=0$

n个线性方程的方程组为$\underset{\square}{A}^Tx+a=\underset{n,1}{0}$

1.2.5.乘法的实用规则

平差计算公式中常常需要计算A^TA或A^TB，这时的A写成竖立矩阵。第一个矩阵A^T的行即为矩阵A的相应列，因此A^TA为矩阵A的列与列的组合。

因为n_{ik}和n_{ki}均为矩阵A的第k列与第i列的标量积，所以，$\underset{m,n}{A^T}\cdot\underset{n,m}{A}=\underset{m,m}{N}$总是一个对称矩阵。

如果A和B的行数相同且均为n时，$\underset{m,n}{A}^{T}\cdot\underset{n,p}{B}=\underset{m,p}{C}$才有意义。这时矩阵C中的元素$c_{ik}$由A的第 i 列和B的第 k 列的标量积组成，即

$$A^TB = C;\quad c_{ik} = a_{1i}b_{1k} + a_{2i}b_{2k} + \cdots + a_{ni}b_{nk} \tag{1-6}$$

在大规模的数字计算和多个矩阵相乘时，利用该规则特别便利。此规则可用折叠的办法进行，即将两矩阵并排放在一起，列与列对应相乘之和元素排在右边构成积矩阵。若A^TPA中，P是对称矩阵，则在计算时应按$A^T(P^TA)$的顺序进行。在此举一实例说明这种程序：

P					A		Ae
2.4		0.9	−0.7		0.997	0.070	1.067
	3.2			1.8	0.292	0.956	1.248
0.9		1.8	0.4	−0.3	−0.857	0.515	−0.342
−0.7		0.4	1.1		−0.502	−0.865	−1.367
	1.8	−0.3		2.9	0.858	−0.513	0.345

PA		P·Ae
1.9729	1.2370	3.2099
2.4788	2.1358	4.6146
−1.1035	0.7979	−0.3056
−1.5929	−0.7945	−2.3874
3.2709	0.0786	3.3495

$A^T\cdot PA$		$A^T\cdot PAe$
7.2426	1.6394	8.8820
1.6394	3.1863	4.8257

1.2.6. 乘法练习

1.2.6.1.

a	b	C		D			P				
3	4	1.55	0.65	0.00	9.42	−2.14	2				
−2	−1	−0.13	1.13	2.95	−8.47	1.89		3			
0	0	2.34	1.32	1.34	4.65	0.00			2		
6	0	5.16	−4.41	−1.41	0.00	3.11				1	
−4	1	−7.24	1.15	2.96	0.78	−4.74					2

根据上面矩阵的行列数，判断下面的运算是否有意义，并对有意义的运算进行计算和检验：

a^Tb, ab^T, Db, D^Ta, a^TC+b^TD, DP, PC, aC, C^TD, a^TPb

1.2.6.2. 用折叠法进行乘法计算