当代科学前沿论丛

NEW FRONTIERS OF SCIENCES

拟阵论

赖虹建 LAI HONGJIAN

MATROID THEORY

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书较为系统地介绍了拟阵论的基本概念和理论，引入和比较了拟阵的不同的公理系统，并较为全面地讨论了拟阵的几何表示、对偶、幼阵、连通度以及拟阵的线性与代数表示。本书还讨论了拟阵中的模性与格结构，二元域和三元域拟阵的特征与性质，分裂子定理及其应用，次模函数和优化理论，拟阵的着色，处处非零流和圈覆盖问题，以及拟阵的极值理论。本书的最后一章列举了一些在拟阵理论研究方面尚待解决的问题。此外，书中的大量习题以及它们的解答也是本书的一个重要组成部分。

本书可作为数学、组合数学、运筹学和计算机等专业研究生的教材，也可供有关专业的高年级大学生、研究生、教师，以及相关的科研、工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

拟阵论/赖虹建. —北京：高等教育出版社，2002
ISBN 7-04-010563-2

Ⅰ.拟… Ⅱ.赖… Ⅲ.拟阵 Ⅳ.0157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 028750 号

拟阵论
赖虹建

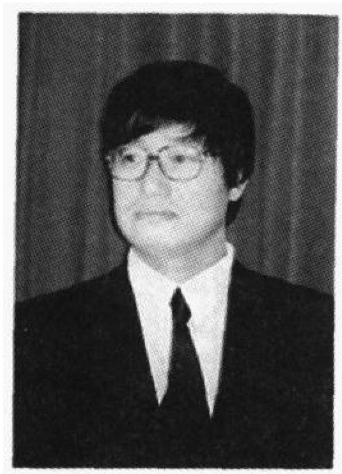
出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn

经　　销　新华书店北京发行所
印　　刷　北京民族印刷厂

开　　本	787×960　1/16	版　　次	2002 年 7 月第 1 版
印　　张	35.25	印　　次	2002 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	550 000	定　　价	68.00 元

《当代科学前沿论丛》专家委员会

(按姓氏笔画为序)



赖虹建

1953 年生。广州华南工学院学士(1982)，美国维恩州立大学博士(1988)。曾在加拿大滑铁卢大学组合与优化系做博士后，现任美国西弗吉尼亚大学数学系教授。在图论、拟阵论以及离散数学的理论与应用方面发表论文 60 余篇，出版论著“Matrices in Combinatorics and Graph Theory”一本(与柳柏濂合作，Kluwer Academic Publishers 出版)。

出版者的话

人类创造了科学技术，科学技术推动了人类的文明进程．两者的互动影响，今天已达到了前所未有的程度：人类的经济发展和社会进步的需要，为科学技术迅猛的创新，提供了强大的动力；科学技术的发展，在急剧地改变着人类的思维方式、学习方式、工作方式、生活方式、娱乐方式．科学技术已成为强大的社会生产力和巨大的社会资本．现在，每个国家，每个地区，甚至每个单位，都把科学技术创新、科学技术转化为生产力作为头等大事，抢占科学技术制高点，以此来提高自己的综合实力．

新中国成立 50 多年特别是改革开放 20 多年来，随着经济的蓬勃发展，科学技术得到了长足的进步，两弹一星、载人飞船、生物工程、信息技术等正在大步追赶国际先进水平．科学技术转化成的强大生产力，对国民经济发展和社会进步、对增强综合国力产生了重大的影响．

改革开放以来，在中国共产党的“科教兴国”方针的鼓舞下，举国上下，尊重科技，学习科技，普及科技，创新科技，应用科技，发展科技，已蔚然成风．科技结硕果、神州尽彩虹的绚丽画面，正在展示于世人面前．自 16 世纪中叶中国科学技术失去世界领先地位后所形成的中西科学技术的差距，现在正在缩小．重振中华科学技术雄风的序幕已经拉开．

为了能使我国的科学技术水平在不久的将来赶上并达到世界先进水平，我们不仅要自己进行科学技术创新，也要学习世界上一切国家的先进科学技术；不仅要靠国内的科技工作者发展我国的科学技术，还要借助海外学者特别是华人学者的力量．在这种思想的指导下，我们萌生了组织海外学者编写科技前沿丛书的想法．这一想法在海内外学者中引起了强烈的反响：在他们中，有的出谋献策，有的出资开会，有的撰搞，有的审稿，有的愿把稿酬作为基金，……海内外学者的诚言乐行，极大地感染着我们，鼓舞着我们；这一想法得到了教

育部陈至立部长和分管我社的周远清副部长的肯定和支持，这增加了我们开展此项工作的决心和信心。根据各方面意见，经过反复研究，最后将丛书定名为《当代科学前沿论丛》。《论丛》是我们献给祖国母亲的21世纪的圣礼，企盼我国能在21世纪夺回三四百年前失去的科学技术领先的地位。《论丛》如能在推动我国科学技术进步和“科教兴国”中有所作用，将是我们的最大欣慰。为了做好本《论丛》的出版工作，我们邀请了国内一些著名科学家和在海外工作的部分优秀学者组成《论丛》的专家委员会，帮助筹划、组织和评议《论丛》的出版。随着学科的发展，专家委员会的成员可能会有所变化。我们向一切关心和支持《论丛》出版工作的人士，表示衷心的感谢。由于缺乏经验，《论丛》出版后，编辑出版方面的不足，在所难免，诚望各方指正。

高等教育出版社

2000年6月

序

与其他数学分支相比，拟阵理论并不是一个具有悠久历史的古老分支．拟阵的概念最早由 Whitney 在 1935 年第一次引进，是作为一种同时推广了图和矩阵的概念。尽管年轻，但由于实际需要的推动和数学工作者的努力，拟阵理论已有相当丰富的内容。特别是在最近三十年内，拟阵理论得到了很大的发展，形成了一个群峰竞秀，万水争流的局面，成为一个日益引人瞩目的生气勃勃的数学分支。

这本书的目的是尽可能比较直接而又详细地叙述拟阵理论的基础和核心部分，从而成为一本既可作为高校数学系或有关工程专业的教科书，又不失为一本有价值的参考书．为了使初学者能够较为方便地学习本书的内容，我们对有关基础部分章节的习题尽可能地提供了解答或提示。对一部分没有给出解答或提示的习题，则提供了问题的来源和有关的文献。限于篇幅及作者的学识，也由于这个学科的快速发展，本书无法提供给读者一个有关拟阵理论的全面综述，也无法全面反映所有在拟阵领域的最新结果，这都是作者感到遗憾之处。

西弗吉尼亚大学自 1991 年起开设拟阵论课程。本书的部分章节，便是在这门课程的讲稿的基础上整理而成。一般来说，学完高等代数的基本内容后就具备了阅读本书的基础。本书的意图是以前四章（除去 1.6， 2.6， 2.7， 3.3， 3.4 和 4.5 这六节）作为对拟阵的基本概念、理论和方法的一个介绍．这些内容一般可以在一个学期内讲授完毕。在第五章到第十一章中所讨论的内容相对地专门化，故可根据需要在讲授时加以选择。

本书对有关内容的处理主要参考了 Welsh 的《Matroid Theory》(1976)，White 的《Matroid Theory》(1986)，Oxley 的《Matroid Theory》(1992) 以及刘桂真、陈庆华的《拟阵》(1994) 等书。在讲授和写作这本书的过程中，一些参与讨论的朋友和同学们提出了许多很有帮助的建议。他们是张昱坤，潘海峰，李相文，詹明泉，欧永斌，喻革新，徐睿和王小强，其中，詹明泉，潘海峰，喻革新和王小强参与了这本书的文字输入，詹明泉和潘海峰还帮助对本书进行了校对。作者在这里向他们表示诚挚的感谢。作者还想借此机会感谢高等教育

出版社的张小萍老师对本书的出版所给予的自始至终的热情支持和帮助。

作者特别深深地感谢他的妻子吴莹女士和他的父亲赖汉斯先生和母亲李杰英女士。没有他们的支持和长期的鼓励和教育，作者在今天一定不能够完成这一本书。

限于作者的水平，本书中错漏之处在所难免，恳请国内同行和广大读者不吝赐教。

赖虹建

2001 年 12 月 31 日

美国西弗吉尼亚大学

目　录

Contents

第零章 符号和预备知识

本书所介绍的拟阵理论基本上是讨论在一个有限集上的数学结构. 因此, 除非特别声明, 书中所讨论的集合均为有限集. 集合族或集合类通常指的是集合的集合. 由于讨论上的需要, 我们有时要允许一个元素在一个集合中多次出现, 这时有关的集合被称为一个可重复集合. 比如 $\{a,a,b,b,b\}$ 就是一个可重复集合.

为了显而易见的原因, 我们尽量采用标准的集合论的符号, 同时也兼顾在拟阵文献中的习惯. 当 E 是一个集合时, 2^E 和 $|E|$ 分别表示 E 中全体子集的集合族和 E 的基数. 对集合 X 和 Y , 我们定义 $X-Y=\{x\in X: x\notin Y\}$, 而当 $Y=\{e\}$ 时, 我们通常用 $X-e$ 来代替较为正规的写法 $X-\{e\}$; 类似地, $X\cap Y$ 和 $X\cup Y$ 分别表示 X 和 Y 的交与 X 和 Y 的并, 并且当 $Y=\{e\}$ 时, 我们也用 $X\cup e$ 和 $X\cap e$ 来分别代替 $X\cup\{e\}$ 和 $X\cap\{e\}$. 当 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是两两不相交的集合时, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i$ 称为一个不相交并.

在本书中, 我们用 $\mathbf{N}$ 代表自然数的集合, 用 $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{Z}_m$ 分别代表整数, 有理数, 实数和模 m 同余整数的集合 (连同它们具有的域或加群结构) , 并用 $\mathbf{Z}^+$, $\mathbf{Q}^+$ 和 $\mathbf{R}^+$ 来分别代表非负整数, 非负有理数和非负实数的集合. 在本书中用到的一些不太常用的集合论的运算记号将在下面列出, 而其它的记号则在需要时才引入. 设 E 是一个集合, $\mathcal{A}\subseteq 2^E$ 是 E 中子集的一个集族. 定义

$Upp(\mathcal{A})=\{X\subseteq E:$ 存在 $A\in\mathcal{A}$ 使 $A\subseteq X\}$;

$Low(\mathcal{A})=\{X\subseteq E:$ 存在 $A\in\mathcal{A}$ 使 $X\subseteq A\}$;

$Max(\mathcal{A})=\{X\subseteq \mathcal{A}:$ 对任意 $Y\in\mathcal{A}$, 若 $X\subseteq Y$, 则 $X=Y\}$;