

高等学校通信教材

gaodeng xuexiao tongxin jiaocai

© 沈元隆 周井泉 编 霍锡真 审

XINHAO
YU XITONG

信号 与系统

人民邮电出版社

POSTS & TELECOMMUNICATIONS PRESS

高等学校通信教材

信号与系统

沈元隆 周井泉 编
霍锡真 审

人民邮电出版社

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统/沈元隆;周井泉编. —北京:人民邮电出版社,2003.1

高等学校通信教材

ISBN 7-115-10904-4

I. 信... II. ①沈...②周... III. 信号系统 高等学校—教材 IV. TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 094351 号

内 容 提 要

本书全面介绍信号与系统分析的基本理论和分析方法。全书共分 7 章。内容包括:信号与系统的基本概念,连续信号与系统的时域分析,连续信号与系统的频域分析,连续信号与系统的复频域分析,离散信号与系统的时域分析,离散信号与系统的变换域分析以及状态变量分析。

全书选材得当,内容丰富,结构合理,条理清晰。每章都附有大量精选的习题,书后附有习题答案和 MATLAB 上机实验程序。

本书按照高等工科大学信号与系统课程教学基本要求编写而成。可供通信工程、电子信息工程、自动化、计算机科学与技术等专业大学本科作为信号与系统课程的教材使用,也可供有关科技人员阅读参考。

高等学校通信教材

信 号 与 系 统

-
- ◆ 编 沈元隆 周井泉
审 霍锡真
策划编辑 滑 玉
责任编辑 须春美
 - ◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街 14 号
邮编 100061 电子函件 315@ptpress.com.cn
网址 <http://www.ptpress.com.cn>
读者热线 010-67129260
北京汉魂图文设计有限公司制作
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷
新华书店总店北京发行所经销
 - ◆ 开本: 787×1092 1/16
印张: 26.75
字数: 655 千字 2003 年 1 月第 1 版
印数: 1-6 000 册 2003 年 1 月北京第 1 次印刷

ISBN 7-115-10904-4/TP · 3223

定价: 34.00 元

本书如有印装质量问题,请与本社联系 电话:(010) 67129223

编者的话

“信号与系统”是高等工科院校通信与电子信息类专业的一门重要的专业基础课程。本教材是根据高等工业学校信号与系统课程教学基本要求编写的,主要讨论确定信号的特性和线性时不变系统的基本理论和分析方法。

全书选材得当,内容丰富,重点突出,条理清晰、便于自学。本书具有以下特点。

(1) 信号与系统理论的发展愈来愈多地运用了现代数学的方法和结论。本书在基本理论和方法的阐述上,将其物理意义与数学论证和表述紧密的结合起来,这样做有利于培养学生应用数学知识解决实际问题的能力。

(2) 全书突出了信号与系统分析的理论核心是信号的分解特性和系统的线性特性,这样可以清晰地揭示不同分析方法的基本思想和内在联系,有利于学生综合分析能力的培养。

(3) 在主体内容安排上,按先“连续”后“离散”的方式进行讨论。这样,既体现了两者相对独立、内容相互并行的特点,又遵循了先易后难、循序渐进的原则。实践表明,这样安排有利于增强学生对“离散”部分内容的理解,以及对“连续”部分内容的深化。

(4) 在连续信号和系统的频域分析一章中,安排了相关函数、单边信号频谱和希尔伯特变换及其性质的内容。这样做有利于与后续课程“通信原理”的衔接和配合。

(5) 本书将离散时间傅里叶变换和 Z 变换合并成一章,为离散信号与系统的变换域分析。且先讨论 Z 变换,后导出离散时间傅里叶变换。这样做可以达到事半功倍的效果。最后讨论离散信号和系统的频率特性和离散傅里叶变换(DFT)的内容。这样安排有利于学生更深入理解各种变换的内在联系,并能更好地与后续课程“数字信号处理”衔接起来。

(6) 随着计算机技术的发展,本书还附有 MATLAB 上机实验程序。这样不仅使学生对信号与系统的许多概念和结论有直观的认识,加深对一些重要概念的理解;而且还能激发学生的学习兴趣 and 增强借助计算机解决实际问题的能力。

本教材是在南京邮电学院电子工程系电路与系统教研室全体教师 20 余年教学经验积累的基础上编写而成的。全书由沈元隆教授和周井泉副教授合作编写,其中沈元隆教授编写了第二、三、五、六、七章和附录一;周井泉副教授编写了第一、四章和附录二;全书由沈元隆统稿。

在本教材编写过程中,始终得到南京邮电学院各级领导和电路与系统教研室全体教师的热情鼓励和大力支持,其中,梅杓春教授、王锁萍教授、刘陈教授和蒋国平博士为本教材的出版给予了极大的关心和帮助;我院张志涌研究员对附录二多次提出了很多修改意见。北京邮电大学霍锡真教授详细审阅了本教材的全部原稿,并提出了许多宝贵的意见。在编写过程中,还参阅了国内外大量的著作、文献和资料。在此一并向他们表示衷心的感谢。

限于编者水平有限,书中有不妥甚至错误之处,敬请读者批评指正。

编者
2002 年 12 月

81083/03

目 录

第一章 信号与系统的基本概念	1
1.1 信号的描述及其分类	1
1.2 信号的运算	7
1.3 系统的数学模型及其分类	12
1.4 系统的模拟	18
1.5 线性时不变系统分析方法概述	22
思考题与练习题	23
第二章 连续信号与系统的时域分析	29
2.1 冲激函数及其性质	29
2.2 系统的冲激响应	36
2.3 信号的时域分解和卷积积分	42
2.4 卷积的图解和卷积积分限的确定	46
2.5 卷积积分的性质	51
2.6 卷积的数值计算	58
思考题与练习题	60
第三章 连续信号与系统的频域分析	67
3.1 周期信号分解为傅里叶级数	67
3.2 信号在正交函数空间的分解	73
3.3 周期信号的频谱	80
3.4 非周期信号的频谱	88
3.5 一些常见信号的频域分析	92
3.6 傅里叶变换的性质及其应用	102
3.7 相关函数与谱密度	117
3.8 连续系统的频域分析	124
3.9 信号的无失真传输和理想滤波器	132
3.10 希尔伯特变换	140
3.11 取样定理	145
3.12 多路复用	153
思考题与练习题	162
第四章 连续信号与系统的复频域分析	179
4.1 拉普拉斯变换	179
4.2 典型信号的拉普拉斯变换	183

4.3 拉普拉斯变换的性质	185
4.4 拉普拉斯反变换	194
4.5 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系	200
4.6 连续系统的复频域分析	203
4.7 系统函数	210
4.8 由系统函数的零、极点分析系统特性	216
4.9 连续时间系统的稳定性	223
4.10 系统的信号流程图	227
思考题与练习题	230
第五章 离散信号与系统的时域分析	241
5.1 离散时间信号	241
5.2 离散系统的数学模型和模拟	250
5.3 离散系统的零输入响应	255
5.4 离散系统的零状态响应	259
思考题与练习题	267
第六章 离散信号与系统的变换域分析	272
6.1 Z 变换	272
6.2 Z 反变换	277
6.3 Z 变换的性质	281
6.4 Z 变换与拉氏变换的关系	289
6.5 离散系统的 Z 域分析	292
6.6 离散系统函数与系统特性	299
6.7 离散信号与系统的频域分析	305
6.8 数字滤波器的一般概念	314
思考题与练习题	317
第七章 状态变量分析	322
7.1 状态与状态空间	322
7.2 连续系统状态方程的建立	324
7.3 连续系统状态方程的解	339
7.4 离散系统状态变量分析	349
7.5 系统的可控制性和可观测性	357
思考题与练习题	366
附录一 矩阵函数	374
附录二 信号与系统的计算机辅助分析	386
部分思考题与练习题答案	399
主要参考书目	419

第一章 信号与系统的基本概念

随着近代科学技术的发展,特别是大规模集成电路的出现以及数字计算机的广泛应用,以信息技术为核心的高新技术正在迅速发展,使得信号与系统日益复杂,从而也促进了信号与系统理论研究的发展。

信号与系统的理论涉及范围广泛,内容十分丰富。信号理论包括信号分析、信号处理和信号综合。在系统理论的研究中,包括系统分析与系统综合两个方面。系统分析与信号分析被看成是一个整体。从信号传输的观点来看,信号通过系统后,由于系统的职能作用而使信号的时间特性及频率特性发生变化,从而产生新的信号。从系统响应的观点来看,系统在信号的激励下,将必然作出相应的反应,从而完成系统的职能作用。系统的主要任务是对信号进行传输与处理,分析系统的功能和特性必然首先涉及到对信号的分析。信号分析与系统分析关系密切又各有侧重,信号分析侧重于讨论信号的表示、性质、特征;而系统分析则着眼于系统的特征、功能。系统分析的任务就是在给定系统的条件下,研究系统对于输入激励所产生的输出响应。系统综合则是在给定输入的条件下,为了获得预期的输出去设计(综合)系统的构成。

本课程仅限于讨论信号与系统的分析。

本章讨论有关信号与系统的定义、分类方法和基本特性;着重介绍信号的函数表示与波形表示;介绍系统的模型及系统的模拟;最后,对线性时不变系统的各种分析方法作一概述,以便为学习全书打下基础。

1.1 信号的描述及其分类

1.1.1 信号及其描述

人类的社会活动离不开传递消息。从公元前 700 余年,我们的祖先利用烽火传递警报,到现代利用电报、电话、无线电广播与电视,以及目前迅速发展的以因特网(Internet 或称国际互联网)为代表的信息网络技术等等进行通信,其目的都是要把某些消息借一定形式的信号传送出去,给对方以信息。

那么,什么是信号(signal)? 广义地说,信号是随时间变化的某种物理量。在通信技术中,一般将语言、文字、图像或数据等统称为消息(message)。在消息中包含有一定数量的信息(information)。但是,信息的传送一般都不是直接的,它必须借助于一定形式的信号(光信号、

声信号、电信号等),才能远距离快速传输和进行各种处理。因而,信号是消息的表现形式,它是通信传输的客观对象,而消息则是信号的具体内容,它蕴藏在信号之中。本课程将只讨论应用广泛的电信号,它通常是随时间变化的电压或电流,在某些情况下,也可以是电荷或磁通。由于信号是随时间而变化的,在数学上可以用时间 t 的函数 $f(t)$ 来表示,因此,“信号”与“函数”两个名词常常通用。

信号的特性可以从两个方面来描述,即时间特性和频率特性。信号可写成数学表达式,即是时间 t 的函数,它具有一定的波形,因而表现出一定波形的时间特性,如出现时间的先后、持续时间的长短、重复周期的大小及随时间变化的快慢等。另一方面,通常遇到的信号在一定条件下总可以分解为许多不同频率的正弦分量,即具有一定的频率成分,因而表现为一定波形的频率特性,如含有大小不同频率分量、主要频率分量占有不同的范围等。

信号的形式所以不同,就因为它们各自有不同的时间特性和频率特性,而信号的时间特性和频率特性有着对应的关系,不同的时间特性将导致不同的频率特性的出现。

1.1.2 信号的分类

对于各种信号,可以从不同的角度进行分类。

1. 确定信号和随机信号

按时间函数的确定性划分,信号可分为确定信号和随机信号两类。

确定信号(determinate signal)是指一个可以表示为确定的时间函数的信号。对于指定的某一时刻,信号有确定的值。如我们熟知的正弦信号、周期脉冲信号等。随机信号(random signal)则与之不同,它不是一个确定的时间函数,通常只知道它取某一数值的概率,如噪音信号等。

实际传输的信号几乎都具有不可预知的不确定性,因而都是随机信号。例如,通信系统中传输的信号带有不确定性,接收者在收到所传送的消息之前,对信息源所发出的消息是不知道的,否则,接收者就不可能由它得知任何新的消息,也就失去通信的意义。另外,信号在传输过程中难免要受到各种干扰和噪声的影响,使信号产生失真。所以,一般的通信信号都是随机信号。但是,在一定条件下,随机信号也表现出某些确定性,通常把在较长时间内比较确定的随机信号,近似地看成确定信号,使分析简化,便于工程上的应用。本课程只讨论确定信号的分析,它也是研究随机信号特性的重要基础,而对随机信号的分析是后续课程的任务。

2. 连续信号和离散信号

按照函数时间取值的连续性划分,确定信号可分为连续时间信号和离散时间信号,简称连续信号和离散信号。

连续信号(continuous signal)是指在所讨论的时间内,对任意时刻值除若干个不连续点外都有定义的信号,通常用 $f(t)$ 表示,如图 1-1-1 所示。

离散信号(discrete signal)是指只在某些不连续规定的时刻有定义,而在其它时刻没有定义的信号。通常用 $f(t_k)$ 或 $f(kT)$ [简写 $f(k)$] 表示,如图 1-1-2 所示。图中信号 $f(t_k)$ 只在 $t_k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ 等离散时刻才给出函数值。

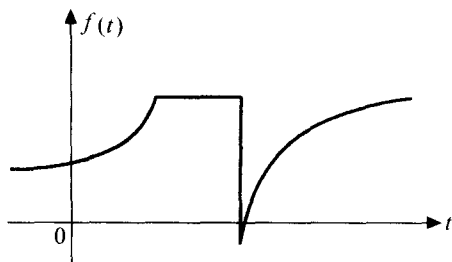


图 1-1-1 连续时间信号

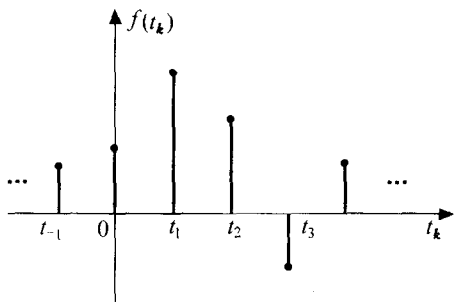


图 1-1-2 离散时间信号

3. 周期信号和非周期信号

按信号(函数)的周期性划分,确定信号又可以分为周期信号与非周期信号。

周期信号(periodic signal)是指一个每隔一定时间 T ,周而复始且无始无终的信号,它们的表达式可写为

$$f(t) = f(t + nT) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

满足此关系式的最小 T 值称为信号的周期。只要给出此信号在任一周期内的变化过程,便可确知它在任一时刻的数值。非周期信号(aperiodic signal)在时间上不具有周而复始的特性。非周期信号也可以看作为一个周期 T 趋于无穷大时的周期信号。

4. 能量信号与功率信号

信号按时间函数的可积性划分,可以分为能量信号、功率信号和非功非能信号。

信号可看作是随时间变化的电压或电流,信号 $f(t)$ 在 1Ω 的电阻上的瞬时功率为 $|f(t)|^2$,在时间区间 $(-\infty, \infty)$ 所消耗的总能量定义为

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \quad (1-1-1)$$

其平均功率定义为

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \quad (1-1-2)$$

上两式中,被积函数都是 $f(t)$ 的绝对值平方,所以信号能量 E 和信号功率 P 都是非负实数。

若信号 $f(t)$ 的能量 $0 < E < \infty$,此时 $P = 0$,则称此信号为能量有限信号,简称能量信号(energy signal)。

若信号 $f(t)$ 的功率 $0 < P < \infty$,此时 $E = \infty$,则称此信号为功率有限信号,简称功率信号(power signal)。

信号 $f(t)$ 还可以是一个既非功率信号,又非能量信号,如单位斜坡信号就是一个例子。但一个信号不可能同时既是功率信号,又是能量信号。

一般说来周期信号都是功率信号,非周期信号或者是能量信号,或者是功率信号,或者既非能量信号又非功率信号。属于能量信号的非周期信号称为脉冲信号,它在有限时间范围内有一定的数值;而当 $t \rightarrow \infty$ 时,数值为 0,如图 1-1-3 所示。属于功率信号的非周期信号是 $|t| \rightarrow \infty$ 时仍然为有限值的一类信号,如图 1-1-4 所示。

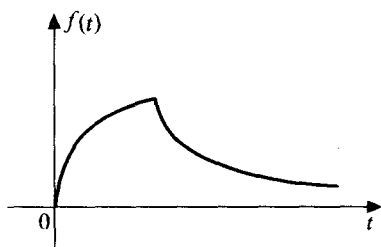


图 1-1-3 非周期能量信号

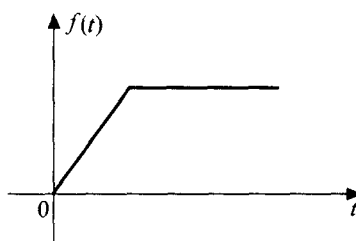


图 1-1-4 非周期功率信号

【例 1-1-1】如图 1-1-5 所示信号,判断其是否为能量信号或功率信号。

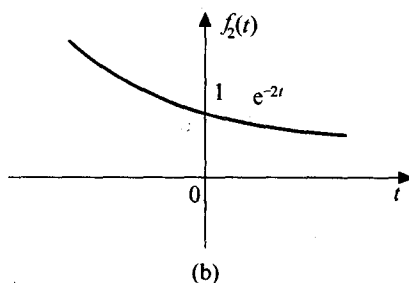
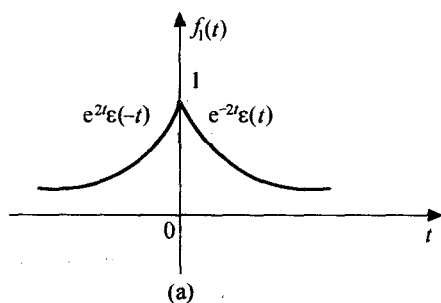


图 1-1-5 例 1-1-1 题图

解 图 1-1-5(a) 信号 $f_1(t) = e^{-2|t|}$

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T (e^{-2|t|})^2 dt = \int_{-\infty}^0 e^{4t} dt + \int_0^{\infty} e^{-4t} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-4t} dt = \frac{1}{2}$$

$$P = 0$$

所以该信号为能量信号。

对于图 1-1-5(b) 所示信号 $f_2(t) = e^{-2t}$, 则有

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T (e^{-2t})^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{4} [e^{-4T} - e^{4T}] = \infty$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E$$

利用罗必塔法则可求得

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{4T} - e^{-4T}}{8T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{4T}}{8T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{4e^{4T}}{8} = \infty$$

故 $f_2(t)$ 为一个既非能量信号又非功率信号。

1.1.3 典型连续信号

下面给出一些典型连续信号的表达式和波形,我们今后会经常遇到它们。典型离散信号的表达式及波形将在第五章中讨论。

1. 单位阶跃信号(unit step signal)

单位阶跃信号的定义为

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (1-1-3)$$

其波形如图 1-1-6 所示,在跃变点 $t=0$ 处,函数值未定义。

若单位阶跃信号跃变点在 $t=t_0$ 处,则称其为延迟单位阶跃函数,它可表示为

$$\epsilon(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases} \quad (1-1-4)$$

其波形如图 1-1-7 所示。

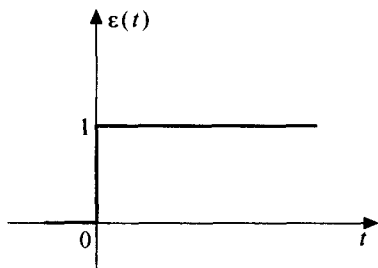


图 1-1-6 单位阶跃函数

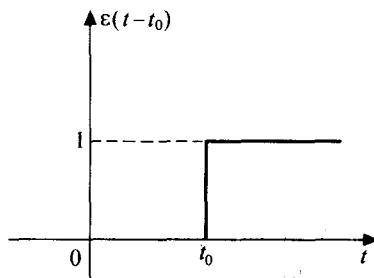


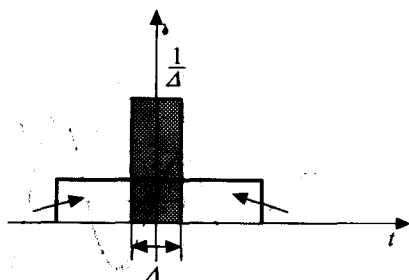
图 1-1-7 延迟单位阶跃函数

2. 单位冲激信号(unit impulse signal)

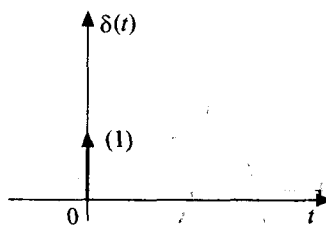
单位冲激信号 $\delta(t)$ 是一个特殊信号,它不是用普通的函数来定义。它的工程定义如下:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1-1-5)$$

这个定义由狄拉克(P. A. M. Dirac)提出,故又称狄拉克函数或 δ 函数。它除在原点以外,处处为零,并且具有单位面积值。直观地看,这一函数可以设想为一个窄脉冲的极限。比如一个矩形脉冲,宽度为 Δ ,高度为 $1/\Delta$,其面积为 1,在极限的情况下,当 $\Delta \rightarrow 0$ 时,它的高度无限增大,但面积始终保持为 1,如图 1-1-8(a) 所示。单位冲激信号的波形难于用普通方式表达,通常用一个带箭头的单位长度线表示,如图 1-1-8(b) 所示。如果矩形脉冲的面积不为 1,而是一个常数为 A ,则一个强度为 A 的冲激信号可表示为 $A\delta(t)$ 。在用图形表示时,可将强度 A 标注在箭头旁。



(a) 矩形脉冲演变为冲激信号



(b) 单位冲激信号

图 1-1-8 单位冲激信号

由以上定义,可得
$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

或
$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \epsilon(t) \quad (1-1-6)$$

式(1-1-6)表明单位阶跃信号是单位冲激信号的积分。

任一单位冲激信号在 t_0 处出现冲激时,可得到一个具有延迟的冲激函数 $\delta(t - t_0)$ 为

$$\begin{cases} \delta(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t \neq t_0 \\ \infty & t = t_0 \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1 \end{cases} \quad (1-1-7)$$

其波形如图 1-1-9 所示。

3. 复指数信号(complex exponential signal)

复指数信号 e^{st} 的指数因子 $s = \sigma + j\omega$ 为复数,称为复频率。

借助欧拉公式可展开为: $e^{st} = e^{\sigma t} \cos \omega t + je^{\sigma t} \sin \omega t$ 。复指数信号的波形随 s 的不同而不同。当 $s = 0$ 时, $e^{st} = 1$, 为直流信号; 当 $\omega = 0$ 时, $e^{st} = e^{\sigma t}$ 就成为一个单调增长或衰减的实指数信号, 如图

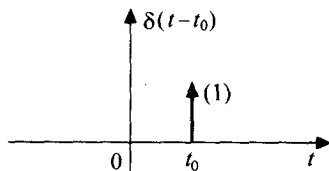


图 1-1-9 延迟单位冲激信号

1-1-10(a)所示; 当 $\sigma = 0$ 时, $e^{st} = e^{j\omega t} = \cos \omega t + jsin \omega t$, 其实部是一个等幅余弦信号, 虚部是一个等幅正弦信号, 图 1-1-10(b)画出了其实部的波形。在一般情况下, e^{st} 的实部是一个增幅($\sigma > 0$)或减幅($\sigma < 0$)的余弦信号, 虚部是一个增幅($\sigma > 0$)或减幅($\sigma < 0$)的正弦信号, 图 1-1-10(c)和(d)画出了两种不同 σ 的实部波形。

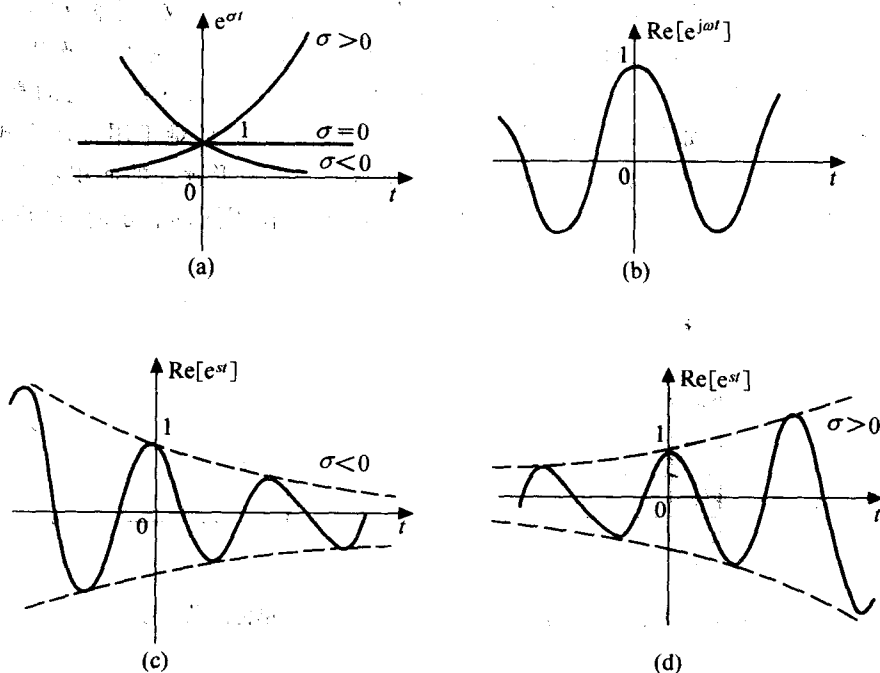


图 1-1-10 复指数信号 e^{st} 在不同 s 值时的波形

由于复指数信号能概括多种情况,所以可利用它来描述多种基本信号,如直流信号、指数信号、等幅、增幅或减幅正弦或余弦信号,因此,它是信号与系统分析中经常遇到的重要信号。

上面我们介绍了几种最基本的信号,接着来介绍有关信号的各种运算。

1.2 信号的运算

1.2.1 信号的相加与相乘

两个信号相加(相乘)可得到一个新的信号,它在任意时刻的值等于两个信号在该时刻的值之和(积)。信号相加与相乘运算可以通过信号的波形(或信号的表达式)进行。

【例 1-2-1】 信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的波形如图 1-2-1(a) 和 (b) 所示,试求 $f_1(t) + f_2(t)$ 和 $f_1(t) \cdot f_2(t)$ 的波形,并写出其表达式。

解 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的表达式为

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 < t < 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$

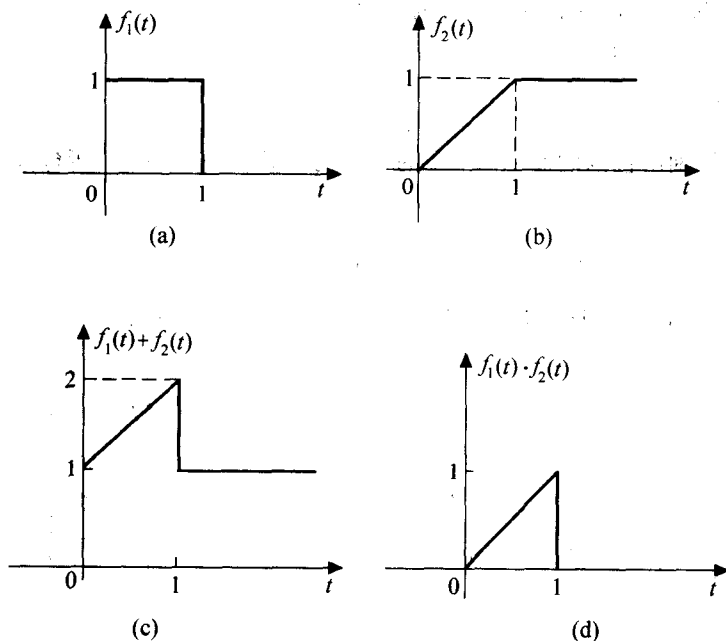


图 1-2-1 信号的相加与相乘

它们的和为

$$f_1(t) + f_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t+1 & 0 < t < 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$

它们的积为

$$f_1(t) \cdot f_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 < t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

由此可得它们的波形分别如图 1-2-1(c)和(d)所示。

本例也可由图 1-2-1(a)和(b)画出 $f_1(t) + f_2(t)$ 和 $f_1(t) \cdot f_2(t)$ 的波形,然后写出它们的表达式,所得到的结果相同。

1.2.2 信号的导数与积分

信号 $f(t)$ 的导数是指 $\frac{df(t)}{dt}$ 或记作 $f'(t)$,从波形看,它表示信号值随时间变化的变化率。

当 $f(t)$ 含有不连续点时,由于引入了冲激函数的概念, $f(t)$ 在这些不连续点上仍有导数,出现冲激,其强度为原函数在该处的跳变量。

信号 $f(t)$ 的积分是指 $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$ 或记作 $f^{(-1)}(t)$,从波形看,它在任意时刻 t 的值为从 $-\infty$ 到 t 区间, $f(t)$ 与时间轴所包围的面积。

【例 1-2-2】 $f(t)$ 的波形如图 1-2-2(a)所示,画出它的导数和积分的波形。

解 由于 $f(t)$ 在 $t=0$ 和 $t=1$ 处有不连续点,故在 $t=0$ 和 $t=1$ 处,它的导数出现冲激。在 $t=0$ 处, $f(t)$ 的跳变值为 1,所以冲激强度为 1;在 $t=1$ 处, $f(t)$ 的跳变值为 -1,所以冲激是强度为 1 的负冲激。在其它各点处 $f'(t)$ 为零,信号的导数 $f'(t)$ 的波形如图 1-2-2(b)所示。可见,信号经过微分后突出显示了它的变化部分。

信号的积分在 $t < 0$ 时为零。

当 $0 < t \leq 1$ 时, $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = \int_0^t 1 d\tau = t$

即信号 $f(t)$ 与时间轴所包围的面积随着 t 的增大而增大。当 $t=1$ 时,所包围的面积达最大为 1。

当 $t > 1$ 时, $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = \int_0^1 1 d\tau + \int_1^t 0 d\tau = 1$

即信号 $f(t)$ 与时间轴所包围的面积不再增大仍保持为 1。信号的积分 $f^{(-1)}(t)$ 的波形如图 1-2-2(c)所示。

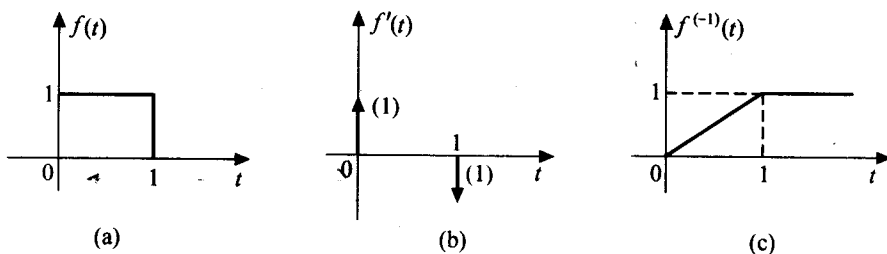


图 1-2-2 信号的导数与积分

1.2.3 信号的时移和折叠

信号 $f(t)$ 时移 $\pm t_0$ ($t_0 > 0$), 就是将 $f(t)$ 表达式中所有自变量 t 用 $t \pm t_0$ 替换, 成为 $f(t \pm t_0)$ 。需要注意的是 $f(t)$ 的时间范围定义域中的 t 也要被替换。从波形上看, 时移信号 $f(t+t_0)$ 的波形比 $f(t)$ 的波形在时间上超前 t_0 , 即 $f(t+t_0)$ 的波形是 $f(t)$ 的波形向左移动 t_0 ; $f(t-t_0)$ 的波形比 $f(t)$ 的波形在时间上滞后 t_0 , 即 $f(t-t_0)$ 的波形是 $f(t)$ 的波形向右移动 t_0 。

信号 $f(t)$ 的折叠就是将 $f(t)$ 表达式以及定义域中的变量 t 用 $-t$ 替换, 成为 $f(-t)$ 。从波形上看, $f(-t)$ 的波形是 $f(t)$ 的波形相对于纵轴的镜像。

折叠信号 $f(-t)$ 时移 $\pm t_0$ 就是将 $f(-t)$ 的表达式以及定义域中的所有自变量 t 用 $t \pm t_0$ 替换, 成为 $f[-(t \pm t_0)] = f(-t \mp t_0)$ 。从波形看, $f[-(t+t_0)] = f(-t-t_0)$ 的波形是 $f(-t)$ 的波形向左移动 t_0 ; $f[-(t-t_0)] = f(-t+t_0)$ 的波形是 $f(-t)$ 的波形向右移动 t_0 。

【例 1-2-3】 信号 $f(t)$ 的表达式为

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 < t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

求 $f(t+1)$ 、 $f(t-1)$ 、 $f(-t)$ 、 $f[-(t+1)]$ 及 $f[-(t-1)]$ 的表达式, 画出它们的波形。

解 $f(t)$ 波形如图 1-2-3(a) 所示, 可得

$$\begin{aligned} f(t+1) &= \begin{cases} 0 & t+1 < 0 \\ t+1 & 0 < t+1 < 1 \\ 0 & t+1 > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & t < -1 \\ t+1 & -1 < t < 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases} \\ f(t-1) &= \begin{cases} 0 & t-1 < 0 \\ t-1 & 0 < t-1 < 1 \\ 0 & t-1 > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & t < 1 \\ t-1 & 1 < t < 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

时移信号 $f(t+1)$ 和 $f(t-1)$ 的波形如图 1-2-3(b) 所示。

$$\begin{aligned} f(-t) &= \begin{cases} 0 & -t < 0 \\ -t & 0 < -t < 1 \\ 0 & -t > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & t > 0 \\ -t & -1 < t < 0 \\ 0 & t < -1 \end{cases} \end{aligned}$$

折叠信号 $f(-t)$ 的波形如图 1-2-3(c) 所示。

$$f[-(t+1)] = f(-t-1)$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{cases} 0 & -t-1 < 0 \\ -t-1 & 0 < -t-1 < 1 \\ 0 & -t-1 > 1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & t > -1 \\ -t-1 & -2 < t < -1 \\ 0 & t < -2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$f[-(t-1)] = f(-t+1)$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{cases} 0 & -t+1 < 0 \\ -t+1 & 0 < -t+1 < 1 \\ 0 & -t+1 > 1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & t > 1 \\ -t+1 & 0 < t < 1 \\ 0 & t < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

折叠时移信号 $f(-t-1)$ 和 $f(-t+1)$ 的波形如图 1-2-3(d) 所示。

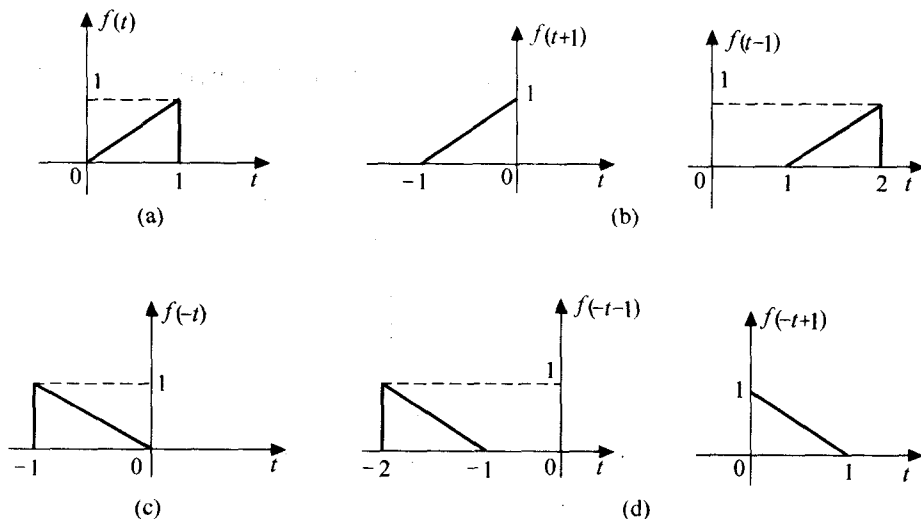


图 1-2-3 信号的时移和折叠

1.2.4 信号的尺度变换

尺度变换就是把信号 $f(t)$ 以及定义域中自变量 t 用 at 去置换, 成为 $f(at)$ 。其中 a 是常数, 称为尺度变换系数。如果 $a > 1$, 则 $f(at)$ 的波形是把 $f(t)$ 的波形以原点 ($t=0$) 为基准, 沿时间轴压缩至原来的 $\frac{1}{a}$; 如果 $0 < a < 1$, 则 $f(at)$ 的波形是把 $f(t)$ 波形扩展至 $\frac{1}{a}$; 当 $a < 0$ 时, 信号 $f(at)$ 的波形是将 $f(t)$ 的波形折叠并压缩或扩展至 $\frac{1}{|a|}$ 。

若将 $f(at)$ 的波形时移 $\pm t_0$, 即得 $f[a(t \pm t_0)]$ 的波形。

【例 1-2-4】 已知 $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & 1 < t < 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$

试求 $f(2t)$, $f(\frac{1}{2}t)$, $f(-2t)$ 及 $f(-2t+2)$ 。

解

$$f(2t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2t & 0 \leq 2t \leq 1 \\ 1 & 1 < 2t < 2 \\ 0 & 2t > 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2t & 0 \leq t \leq 0.5 \\ 1 & 0.5 < t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

$$f\left(\frac{1}{2}t\right) = \begin{cases} 0 & t/2 < 0 \\ t/2 & 0 \leq t/2 \leq 1 \\ 1 & 1 < t/2 < 2 \\ 0 & t/2 > 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t/2 & 0 \leq t \leq 2 \\ 1 & 2 < t < 4 \\ 0 & t > 4 \end{cases}$$

$$f(-2t) = \begin{cases} 0 & -2t < 0 \\ -2t & 0 \leq -2t \leq 1 \\ 1 & 1 < -2t < 2 \\ 0 & -2t > 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & t > 0 \\ -2t & -0.5 \leq t \leq 0 \\ 1 & -1 < t < -0.5 \\ 0 & t < -1 \end{cases}$$

$$f(-2t+2) = \begin{cases} 0 & -2t+2 < 0 \\ -2t+2 & 0 \leq -2t+2 \leq 1 \\ 1 & 1 < -2t+2 < 2 \\ 0 & -2t+2 > 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & t > 1 \\ -2t+2 & 0.5 \leq t \leq 1 \\ 1 & 0 < t < 0.5 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$