科學圖書大庫

圖形及用途

譯者　王昌銳

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會
監修人　徐銘信　發行人　王洪鎧

科學圖書大庫

中華民國六十八年三月三十日再版

圖形及用途

基本定價 1.30

譯者　王昌鋭 台灣省立高雄工業專科學校教授

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(67)局版臺業字第1810號

出版者 財團法人 臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號 電話 7813686 7815250號
發行者 財團法人 臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第15795號
承印者 大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號 電話9719739

譯 序

圖形理論及應用，雖其正式歷史，由世界聞名之瑞士數學家歐拉(Euler)時代算起，爲期尙不足三百年，但却爲今日數學之一重要部門，拓樸學(Topology)之重要內容．不惟可用於充實數學內容，促進數學研究，解決數學問題．而且可有助於經濟學，心理學，及生物學等之研究．所以圖形學是一門重要學問，而且爲用極廣．

圖形可用於安排球類及棋藝比賽賽程，分析勝敗因素，記錄比賽結果，解決疑難問題。對於運動之提倡，正當娛樂之鼓勵，生活情趣之增進，貢獻頗大。不特此也，圖形復可用於生物繁殖實驗，探索家族淵源．更可用於都市街道溝渠，以及公路，鐵道、電力、給水、燃料、運輸、通信………等網路與管路之設計，國計民生，裨益至大，所以爲工程人員所必研究之課題．

本書作者奧爾博士(Dr.Oystein Ore)，於1899年，出生於挪威奧斯陸，於一九二二年畢業當地奧斯陸大學，一九二四年獲該大學博士學位．且曾先後研究數學於德國、法國及瑞典等地．一九二七年赴美國，受聘爲耶魯大學數學教授．伊對數學史，數學理論，圖形理論與應用，頗多造詣．出版著作極豐．殊値推介．

本書譯名，力求通俗流行．重要名詞術語，且留綴原文，以資參證．敍述文字，力存其眞，以保原作之意．此譯係響應徐氏基金會廣譯新書，吸收新學之號召而作，並得其協助，始得早日付梓，以饗讀者，深爲感激．譯稿多勞吾妻蔣君英女士，代爲整理，尤値永誌勿忘．

中華民國五十八年十二月十二日

湘潭留田王昌銳序於高雄工專

Hwtbao|07

致讀者

本書爲數學專家，所撰一系列書刊之一，其目的在確立多數中等學校學生及社會人士，有興趣而易通曉之某些重要數學觀念。新數學文庫（ New Mathematical Library ）之大部篇幅，包含中學課程，不常包容之課題；且難易相殊，而即使同一書內，某些部份即比其他部份，需要較高程度之專注．由是，讀者需要少量技能學識，以瞭解此等書籍之多數內容，且須作明智之努力．

如讀者一直僅於教室作業遭遇數學，則應熟記於心，數學書籍，不能快速閱讀．亦不應期望乍覽之餘，即能瞭解書之所有內容，應很自然地越過複雜部份，以後再回來讀．因後續之陳述，常能澄清一種理論也．反之，包含完全熟悉內容之章節，則可快速閱讀．

學數學之最佳途徑爲“做”數學，各書所含習題，有些需要縝密思考，奉勸讀者養成手持紙筆從事閱讀之習慣；如此，數學對之將變爲意義倍增．

對著作及編者而言，此爲新的嘗試，甚願對許多中等學校師生，給予此等書刊籌印之眞誠協助，表示由衷謝意．編者頗有興趣於此系列書刊之反應意見．望讀者書寄紐約大學新數學文庫編輯委員會．

原　編　者

引 言

本書採用圖形(graph)一詞，其所表示之意義，完全不同於解析幾何或函數理論中，耳熟能詳之圖形；或曾論及之包含其坐標體系內，坐標値 (x, y) 滿足 x 及 y 方程式之平面所有諸點集合的一種圖形．本書行將研究之圖形，均爲包含點及連接某些點之直綫的幾何圖象；有時稱爲綫性圖形(Linear graph)．兩種不同概念，具有相同名稱，實爲不幸．但名詞已定，很難更改，其他數學方面，亦出現物名混淆情形，除非有嚴重混同危險，數學家亦無暇計及於改其辭彙．

圖形理論之首作，出現於1736年，係瑞士名數學家歐拉(Euler)所撰．由數學觀點言之，因圖形理論所討論者，多爲娛樂性之難題．開始之時，似乏意義；但近來於數學上之發展，特別於其應用上，已予圖形理論，以强力衝進，於十九世紀時，圖形已應用於電子綫路及分子圖解等方面；今天，已爲純粹數學課題；例如，數學關係理論，即圖形理論爲自然工具之處．但亦有其他許多與高度實用問題有關連之用途；如競賽，運輸問題，管路流動作業及所謂“計劃節略”等問題．圖形理論，現亦出現於各種不同方面，如經濟學，心理學及生物學等，對一小小延伸之困惑，圖形理論，特別如包含有名的“四色圖推理”之部份，留下今猶如昔之許多數學家引爲興趣之事．

於數學中，圖形理論，列爲拓樸學(Topology)之一部門；但其與代數及矩陣論，亦有强力關係．

於以下討論中，以討論圖形理論中極簡單之問題爲主，其所以如此取材，係圖一方面提供使用圖形方法，可從事分析之一種印象，而另方面則表示如何用此方法，以突破某些問題．所幸，不需介紹太多的數學計算．

目　錄

第一章　何謂圖形？

1.1　隊際競賽

假定汝之學校橄欖球隊，屬於某些其他校隊聯盟；稱汝隊爲 A，而他隊爲 B，C，D，E 及 F；且假定共有六隊，該季數週過後，某些球隊，將相互比賽．例如

A 對 C,D,F
B 對 C,E,F
C 對 A,B
D 對 A,E,F
E 對 B,D,F
F 對 A,B,D,E

欲明示此等情勢，可用幾何圖解爲之．各隊可用一點，或一小圓代表，而兩如此之點，能以直綫連通，以示曾進行球賽之球隊，則完成上表球賽之情況，示如圖 1.1.1.

如圖 1.1.1 所繪之圖象，稱爲圖形．包含之某些點 A，B，C，D，E，F，稱爲頂點（Vertices），及連通諸頂點之綫段，如 AC，EB 等，稱爲圖形之邊（edges）．

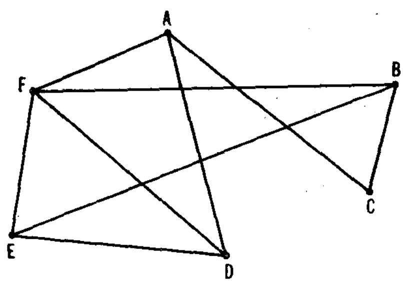

圖 1·1·1

由圖 1.1.1 得知，可能發生圖形之邊，相交而無交點爲頂點情事；此種麻煩，種因於所繪圖形在平面內之事實；因此，示以邊爲相互經過空間之綫，其表示更爲適當；但於任何情況，標示諸頂，須特別小心，以防混淆．

於除際比賽中，任何已進行之賽局集合，可如所述方式，繪爲一圖．反之，如有某圖，卽，包含點或頂．由綫段或邊連接之一圖象，則能解釋爲如斯比賽之圖解．玆以圖 1.1.2 所繪之圖示之，該圖可釋爲八隊間比賽圖解；A 曾與 B，E，D 賽，而 B 曾與 A，F，G，C 賽，如此類推．

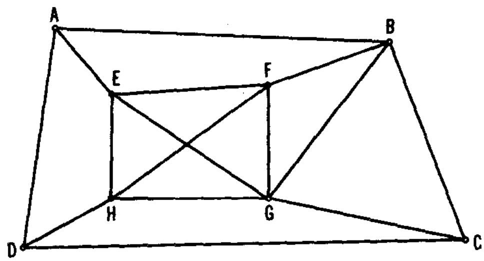

圖 1·1·2

習題1.1

1. 繪汝橄欖球隊或棒球隊．於中季賽程圖．
2. 書出圖 1.1.2 中，圖示賽程全表．
3. 圖 1.1.1 及圖 1.1.2 中，各有多少頂與邊？

1.2　虛圖及全圖

有某種特殊圖形，於圖形理論方面，產生許多用處，此際且認圖形，解釋爲隊際比賽之圖上記錄；球季開始以前，並無比賽進行，圖中無邊．由是，圖僅包含隔離之頂點，卽無邊相連之頂點，此種圖形，稱爲虛（ Null ）圖．於圖 1.2.1 中，曾繪出 1，2，3，4 及 5 隊或頂點之此種圖形．此等虛圖，常用符號 O_1，O_2，O_3，如此類推示之，如是，通常 O_n 爲 n 頂而無邊之虛圖．

其次，進於另端．當球季已過．且假定每隊曾與其他各隊，恰賽一次，則於賽程圖上，各對頂點，由一邊相連，如斯之圖稱爲全（ Complete ）圖（有時曰自然（ Universal ）圖）．圖 1.2.2 顯示對 n = 1，2，3，4

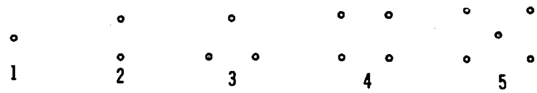

圖 1·2·1

,5 頂之全圖．而以U_1，U_2，U_3，U_4，U_5，分別表示此等全圖．如是，通常U_n 包含 n 頂，而諸邊連接所有諸成對頂點．能繪成n 邊，及所有對角綫之一多角形．

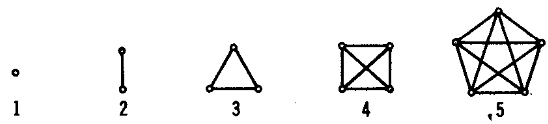

圖 1·2·2

當已繪成某圖形，如圖 1.1.1 中之圖形G時，常能於相同之頂增加消失之邊，即對應於尙待實施之賽程，以成全圖．於圖 1.2.3 中，即對圖 1.1.1 之圖形G作此（尙未舉行之賽程，同虛綫示之．）．

亦能單獨畫出，包含未賽之程，將來比賽，於圖形G情況，此結果繪如圖 1.2.4 中圖形．

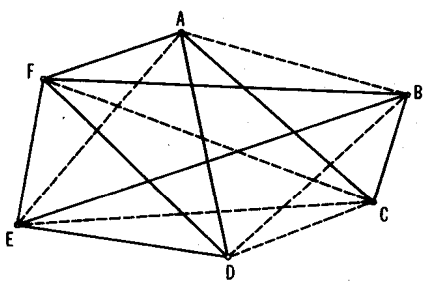

圖 1·2·3

於圖 1.2.4 中之新圖，稱爲圖 1.1.1 中圖形G之補充（ Complement ），習慣上常以$\overline{G}$示之．如取$\overline{G}$之補充，乃同至G；合併G及$\overline{G}$兩圖形中之諸邊，遂成連通諸頂點之全圖．

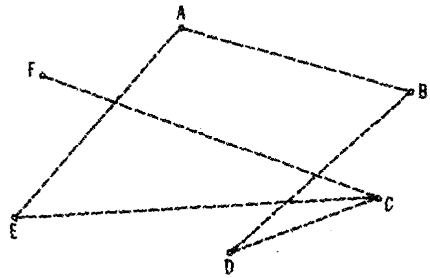

圖 1·2·4

習題1.2

1. 繪圖 1.1.2 中圖形之補充.
2. 以邊數 n 表示全圖 U_n 中之邊數.

1.3 同構圖形

注意於繪製圖 1.1.1 中圖形時，有許多自由行動.

第一，無諸邊爲直綫之需要，任何種類之曲綫，均可如前，連接相同頂點. 例如，能用以下形狀之圖形，表示圖 1.1.1中圖形.

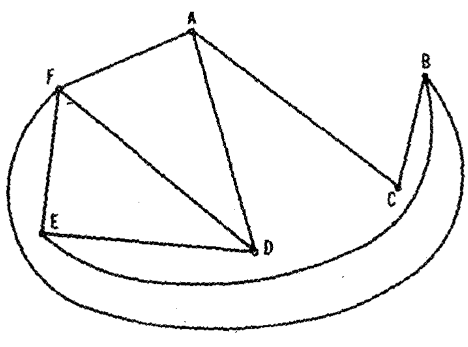

圖 1·3·1

第二，可於平面中隨意位置，佈置諸頂. 例如圖 1.1.1 中圖形，其諸頂

佈置，能繪如圖 1.3.2 所示．

如考慮圖 1.1.1，圖 1.3.1 及圖 1.3.2 中三圖形，爲比賽賽程圖形，均包含各隊相互與賽之相同資料；即爲於意義上之相同圖形．此遂引致，可曰通常稱爲 G_1, 及 G_2 之兩圖形，如有相同部位之映像，乃爲同構（Isomorphic）．換言之，如 G_1 及 G_2 爲同構，必有相同數目之頂點（B_2, C_1），亦由一邊連通，反之亦然．依此定義圖 1.1.1，圖 1.3.1，及圖 1.3.2 中三圖形，爲同構的（即有相同結構），雖其畫法及形式，可能相殊．（同構一詞，常用於數學；源於希臘字"Iso"，（相同）及"Morphe"（形狀或形式）.

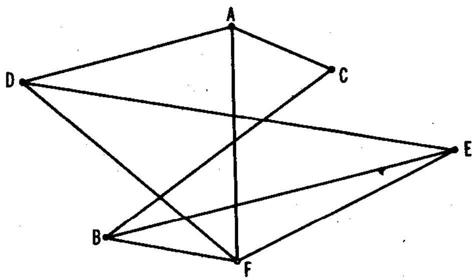

圖 1·3·2

人們常面臨決定兩圖形是否同構之問題．常有明顯理由，爲何此不能爲其情況．例如圖 1.3.3 中兩圖形，因無相同數目之頂點，而不能爲同構．圖 1.3.4 中圖形，亦不能同構，因其無同數之邊也．

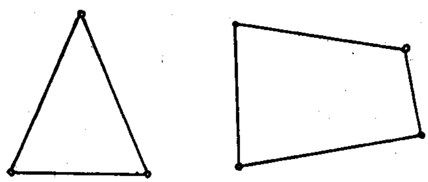

圖 1·3·3

需要略爲精細之推理，以顯示圖 1.3.5 中之兩圖形，爲非同構，然能觀悉，於第一圖形，有八連接邊之一序列（諸邊有一共頂）

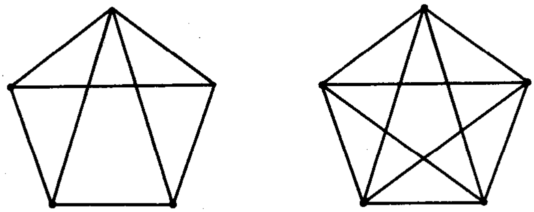

圖 1.3.4

（1，2），（2，3），（3，4），（4，8），（8，7），（7，6)
（6，5），（5，1）
回至原來頂點，而於第二圖形中，則無此序列．換言之，不論如何爲第二圖頂點命名，仍將不能由一邊連接成對之頂於一圖形，以對應於他圖，由一邊連接成對之點．（驗證之！）

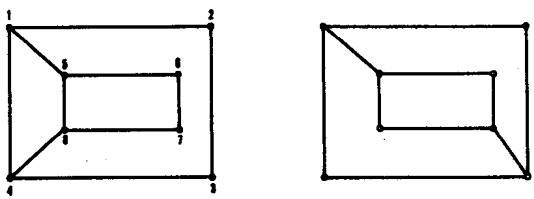

圖 1.3.5

當無明顯途徑，以證明兩圖形非同構時，很難決定是否可指出頂角，以使能於兩圖形間，得其同構性．例如，圖 1.3.6 中提出之圖形，實係同構的．

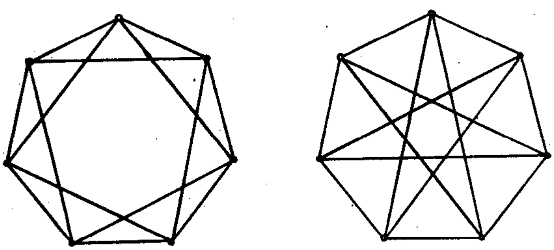

圖 1.3.6

習題 1.3

1.　証明圖 1.1.1，圖 1.1.2及圖 1.2.4　中圖形，非互相同構的。
2.　爲何圖 1.3.5 中圖形，不能同構？提出另外理由．
3.　於圖 1.3.6 中兩圖形，指出頂點，如是其同構性變爲顯著．

1.4　平面圖形

對許多目的而言．並不計較圖形如何畫法；即，同構圖形因所予資料相同．遂認其一樣．當然，此爲原始圖形，解釋爲除際比賽記錄之情況，然而，一如即將指陳，有以圖形能於特別方式畫出爲重之宗旨．玆比較圖 1.1.1 及圖 1.3.1 中同構圖形．於第一圖中，諸邊於圖形非頂之點，有五次相交，反之，於圖 1.3.1，則僅於頂尖相交．

所繪圖形，除頂點外，能別無其邊相交或相共之點，乃謂之平面圖形 (Planar graph)．由是於圖 1.1.1 中，因存在於如圖 1.3.1 中之平面表示，而爲平面的．

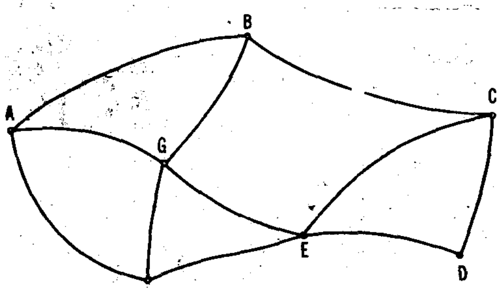

圖 1-4-1

平面圖形，可解釋爲各道路交叉點，或村落間連接綫之道路圖．例如，圖 1.4.1 中之圖，表示有七交叉點，A 至 G，有些直接由道路相連，如 (A,G)，(B,C)，(F,E)，如此類推，反之，道路圖，可認其爲一平面圖，同樣城市圖，爲以街道作邊，廣場或街道交叉點爲頂點之平面圖；見圖 1.4.2．

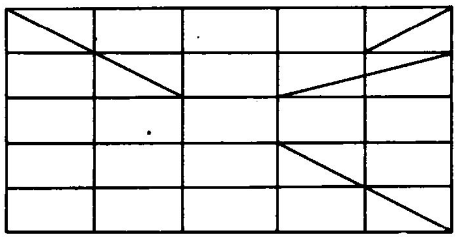

圖1·4·2

現代技術，變更許多事物，使之成爲最新，須知，亦將道路圖看作平面圖之以前簡單概念，予以修正，道路網增加限制接近之通道，如是兩道路交叉之處，不容許相互越過；換言之，圖之諸邊，相交於非道路交叉之處．

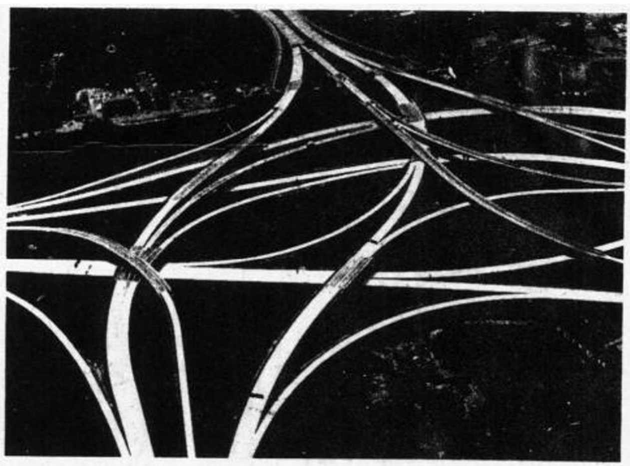

圖1.4·3

習題1.4

1. 由一汽車旅行地圖，繪出所在州區之平面道路圖
2. 對街市圖依樣作爲．

1.5 平面問題

茲將考慮兩種使用圖形解題之實例，於兩情況中，最重要者，爲決定圖形，能否繪於平面中，而無邊之交點，作爲第一解釋，且轉至極古老的難題（有時稱爲利用問題）：

地上建有三屋，且各掘井爲飲，地質及氣候關係，一井或他井常涸。因此，各屋居民，常以須接近三井，以汲其水爲煩。不久，居民 A，B，C 發展一互相不悅之法，決心開闢通往三井 X，Y，Z 之道路，其方式爲往返於井之路綫，避免相互碰面。

於圖 1.5.1 中，可見各屋主，使用自然安排之最直接路綫，以趨各井之圖形。此等路綫或邊，相交於房屋 A，B，C 及井 X，Y，Z 旁之許多點處. 交點數目可減爲單一，而提供路綫之一筆畫法，示於圖 1.5.2.

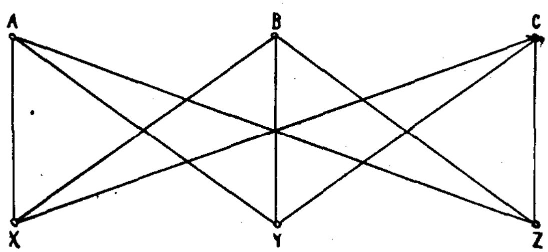

圖 1·5·1

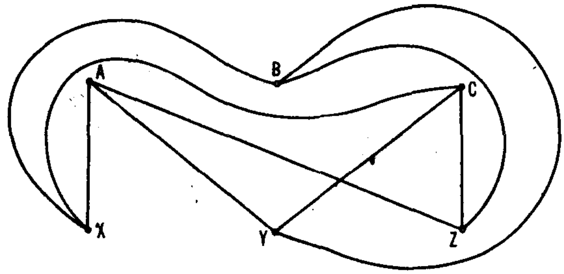

圖 1·5·2