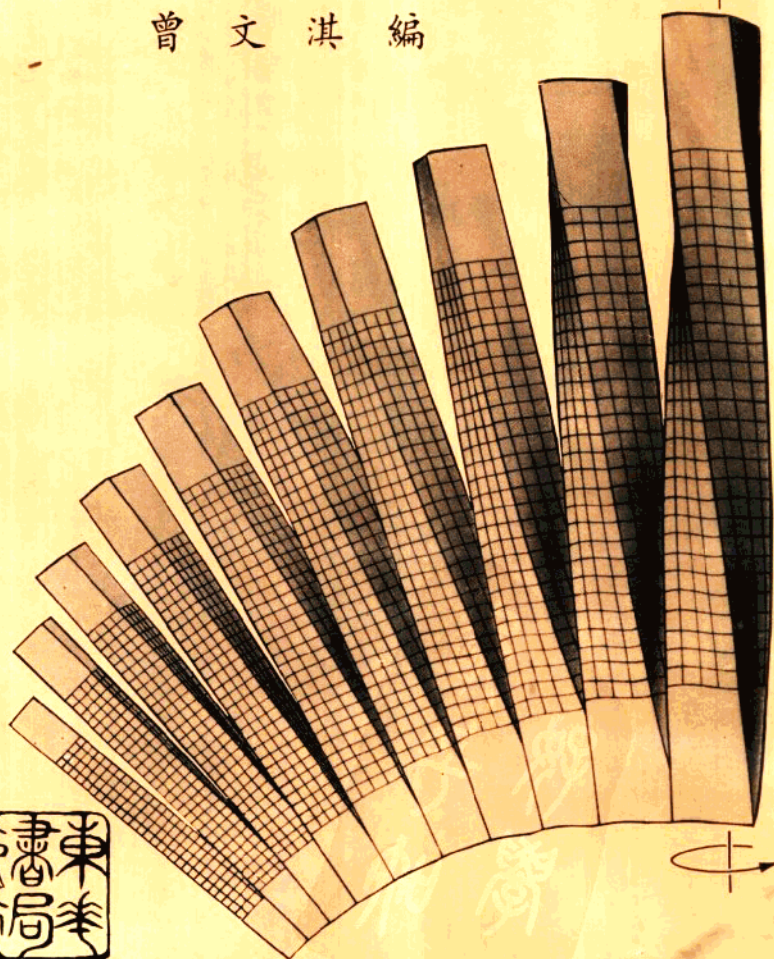


Beer and Johnston

材料力学精要

《下冊》

曾文淇編



PDG

TE 301
Z 22

材料力學精要

下 冊

編 者

曾 文 淇

東華書局印行



版權所有・翻印必究

中華民國七十四年四月初版

大專
用書 材料力學精要 (全二冊)

下冊定價 新臺幣貳佰元整

(外埠酌加運費滙費)

編者	曾文淇
發行人	卓鑫森
出版者	臺灣東華書局股份有限公司 臺北市博愛路一〇五號 郵撥：00064813
印刷者	合興印刷廠

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號
(74027)

前 言

材料力學是一門很基本，很重要的基礎工程科學。一般而言；其名稱爲 Strength of Materials 之類的較偏重於各種固體力學相關的應用，其下游課程如高等材料力學、應用彈性力學、結構設計、塑性設計、應用板殼力學等研究所實用課程，若名稱爲 Mechanics of Solids 或 Solid Mechanics 之類的則屬於偏重理論，用向量或張量 (tensor) 來敘述物體受力的分析，著重於物體靜力平衡、動態平衡、能量守恆等原理的推論而較不注重應用，其下游課程如高等固體力學、聯體力學 Continuum Mechanics、彈性力學、塑性力學、黏彈性力學 Viscoelasticity、板殼理論 Theory of plate and shell、破壞力學 Fracture Mechanics 等研究所課程。

本書原著者 Bear 與 Johnston 兩氏連貫了兩個不同目標的寫作趨勢，把理論與應用連貫在一起，交替性的敘述固體材料元件受外力作用所產生之變形量及反作用力，並討論了材料元件因要對抗外力而在內部形成對抗性的應力分佈。因此若能充分明瞭本書各章節之內容，當具有足夠的基礎來從事研究所的兩類課程。

本書在編排上按材料元件樑柱區分，依次序詳細討論了樑、柱體受單獨軸向力、單獨扭力、單獨側向力，及受合併之軸向力、扭力、側向力之作用的現象，對應力與應變在彈性範圍內或在塑性範圍所相異之現象亦有明確的申論。

解答部份經多位學者專家，精心爲學生作題時有一藍本可尋；是否解答正確而且方法精簡。

目 次

第七章	樑及圓軸的強度設計	1 ~ 169 頁
	習題解答	7
第八章	積分法求樑撓度	170 ~ 349 頁
	習題解答	195
第九章	矩面法	350 ~ 520 頁
	習題解答	362
第十章	能量法	521 ~ 709 頁
	習題解答	540
第十一章	柱	710 ~ 860 頁
	習題解答	725

第七章 樑及圓軸的強度設計

§ 7.1 概 述

要使樑在已知載重之作用下不會損壞，則必需要選用樑之材料，截面形狀，跨度等。

樑的縱向（ x 方向）正交應力 σ_x 受彎曲力矩 M 的影響，最大 σ_x 產生在最大 M 截面

$$\sigma_m = \frac{|M|_{\max} \cdot c}{I}$$

剪應力 τ_{xy} 在中性軸處最大

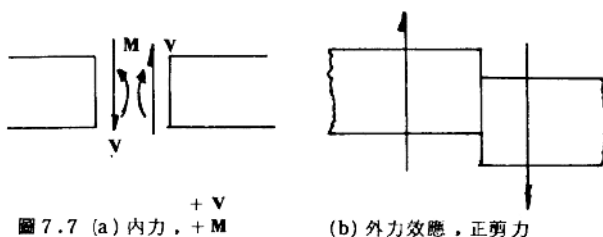
$$\tau_m = \frac{|V|_{\max} \cdot Q}{I_t}$$

因此 $|M|_{\max}$ 及 $|V|_{\max}$ 要先求出來。

§ 7.2 剪力及彎曲力矩圖

若能把剪力 V 及彎曲力矩 M 以 x 函數表示出來並畫出，則可看出 $|V|_{\max}$ 與 $|M|_{\max}$ 以供設計之用。

正剪力與正彎曲力矩之規定，如圖 7.7 所示。



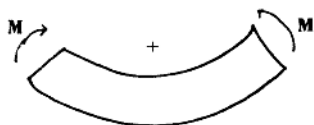
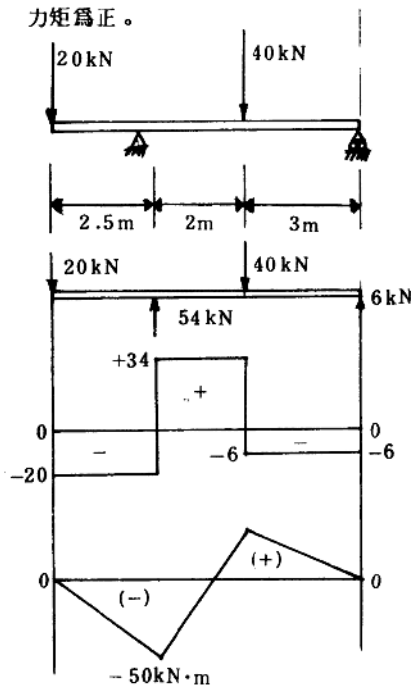


圖 7.7 (c) 正彎曲力矩

原則：①作用在樑上的外力（載重及反作用力）使在 C 點之剪力如圖 7.7 (b) 所示者為正剪力。

②作用在樑上之外力使樑之 C 點如圖 7.7 (c) 般彎曲則 C 點之彎曲力矩為正。

例題：



分離體圖

V 圖

M 圖

§ 7.3 載重，剪力及彎曲力矩間之關係

設 $w(x)$ 為載重分佈如圖 7.12 所示， V 是剪力， M 是彎曲力矩，彼此間的關係是

$$\frac{dV}{dx} = -w \quad (7.3)$$

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (7.5)$$

與積分關係

$$\begin{aligned} V_D - V_C &= - \int_{x_C}^{x_D} w(x) dx \\ &= - \left[\text{載重曲線在 } C \text{ 及 } D \text{ 間之面積} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_D - M_C &= \int_{x_C}^{x_D} V dx \\ &= \left[\text{剪力曲線在 } C \text{ 及 } D \text{ 間之面積} \right] \end{aligned}$$

由載重 w 與 V, M 之關係，可建立起剪力及彎曲力矩圖。圖由剪力圖可得 $V_{\max}$ ，由彎曲力矩圖可得 $M_{\max}$ ，可得其相對應之 $\sigma_{\max}$ 及 $\tau_{\max}$ 以供設計之用。

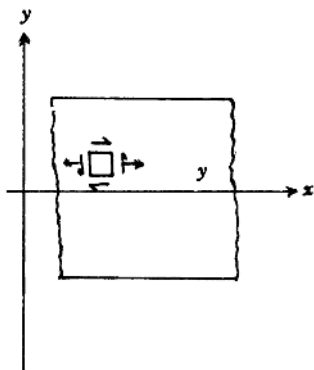
§ 7.4 樑中主應力

樑之截面，如圖 7.16 所示，

$$\sigma_x = -\frac{My}{I}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{VQ}{It}$$

在樑內之主應力應該都比在樑表面之 $\sigma_m = |M|c/I$ 小，但是在受載重（尤其是集中載重）很近之處及有截面積突然改變之處則可能會有大於 σ_m 之處，因為在這種特殊情況有應力集



中之現象產生。

以懸臂樑自由端受集中載重 P 之情況 (圖 7.18),

$$\sigma_x = 3 \frac{P}{A} \frac{xy}{c^2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2} \frac{P}{A} \left(1 - \frac{y^2}{c^2} \right)$$

在 $x=2c$ 及 $x=8c$ 兩個截面處之 $\sigma_{\max}/\sigma_m$ 與 $\sigma_{\min}/\sigma_m$ 值均小於 1 而在 $y=\pm c$ 時其值等於 1 (見圖 7.19 之表) 可證明在一般正常狀況下 σ_x , τ_{xy} 之分佈情況。

§ 7.5 稜體樑之設計

樑之設計要考慮為最經濟之設計, 即選用以同樣材料製成之樑時要選用單位長度重量最輕者, 也就是其截面積最小者。

設計步驟如下:

①根據材料性質表或設計規範, 選用材料之 σ_{all} 及 τ_{all} 值, 或視實際需要之安全係數 $S.F.$ 去除 σ_U 及 τ_U 來得到 σ_{all} 及 τ_{all} 值, 且設 σ_{all} 之抗拉值與抗壓值相等。

②求得 $|V|_{\max}$ 及 $|M|_{\max}$, 或畫出剪力圖與彎曲力矩圖。

③截面模數 $S = \frac{I}{c}$, 由 $\sigma_m = \frac{|M|_{\max} c}{I}$ 及 $\sigma_m = \sigma_{all}$ 得

$$S_{min} = \frac{|M|_{\max}}{\sigma_{all}} \quad (7.11)$$

④選用樑之截面模數 $S > S_{min}$ 者, 並選用單位長度之重量最小者。

⑤校核剪應力要求, $\tau_m = \frac{|V|_{\max} Q}{I t}$

⑥就 S -樑及 W -樑而言, 要特別校核在樑腹與凸緣相接處之 $\sigma_{\max}$, 此 $\sigma_{\max}$ 不得大於 σ_{all} 。

§ 7.6 等強度樑

如果樑的每一個截面的 S 值都剛好滿足 $\sigma_m = M/S$, 且 $\sigma_m = \sigma_{all}$, 則

此截面隨 x 方向而隨其彎曲力矩 M 之大小增大或縮小者，依這種要求而設計出來的樑稱為等強度樑。

如圖 7.24 所示，簡支樑在中央受集中載重 P ，在中央處所受之彎曲力矩最大 $M = \frac{1}{4}PL$ ，在兩端點處則 M 較小，因此若以中央截面之標準來設計，對兩端之截面而言是太不經濟。因此可如圖 7.25 之安排，在中央區附近之截面積較大， S 值也較大。

§ 7.7 傳動圓軸之設計

在圓軸中之橫向載重產生之剪應力通常比由扭矩產生者小很多，可是因橫向載重而產生之正交應力却很大，如圖 7.28 及 7.29 所示，應力態畫成莫爾圓，得

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \sqrt{\left(\frac{Mc}{2I}\right)^2 + \left(\frac{Tc}{J}\right)^2} \\ &= \frac{c}{J} \sqrt{M^2 + T^2}\end{aligned}\quad (7.23)$$

當 $\tau_{\max} = \tau_{\text{all}}$ 時，
$$\frac{J}{c} = \frac{\sqrt{(M^2 + T^2)_{\max}}}{\tau_{\text{all}}}$$

且圓軸之 $J = \frac{\pi}{2}c^4$ ，或者可設計中空圓軸之外半徑 c_2

$$\frac{J}{c} = \frac{\frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4)}{c_2}$$

§ 7.8 作用載重下之應力

垂直應力 σ_y 之變化是由樑之上表面與載重相接觸者一直變化到下表面，如圖 7.32 及 7.33 所示， σ_y 在樑之中性面之值

$$\sigma_y = -w - \frac{1}{2} \frac{\Delta V}{\Delta x}$$

當 $\Delta x \rightarrow 0$ ， $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{dV}{dx}$ ，而 $\frac{dV}{dx} = -w$ ，因此

$$\sigma_y = -\frac{1}{2}w$$

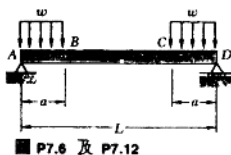
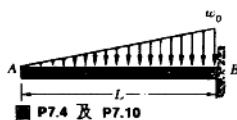
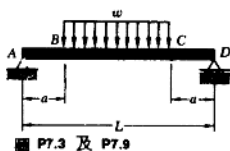
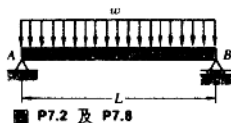
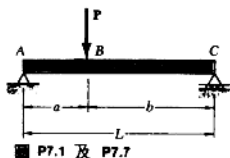
在工程實用上， σ_y 與 σ_x 之比較值很小，對一任意點之極大應力 σ_{max} 之影響亦甚小，例如均勻載重之簡支樑（圖 7.35），最大 σ_y 值 $(\sigma_y)_m$ 與最大 σ_x 值 $(\sigma_x)_m$

$$\frac{(\sigma_y)_m}{(\sigma_x)_m} = \frac{4}{3} \frac{c^2}{x(L-x)}$$

以集中載重 P 而言，在實用上要以承載板置於受力之樑面，使得載重分散並避免在載重 P 之下方受很大的 σ_y ，典型的沿一承載集中力之窄長矩形樑之中性面上應力 σ_x ， σ_y ，及 τ_{xy} 變化如圖 7.38 所示。

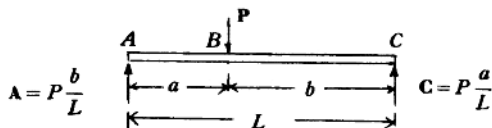
第七章 習題解答

7.1 至 7.6 畫出圖示之梁及載重的剪力及彎曲力矩圖。



7.7 至 7.12 試求圖示之梁及載重的剪力及彎曲力矩曲線之方程式。(取 A 點為原點)

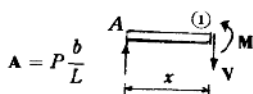
解 7.1 及 7.7:



由 A 到 B

$$+\uparrow \sum F_y = 0 : V = P \frac{b}{L}$$

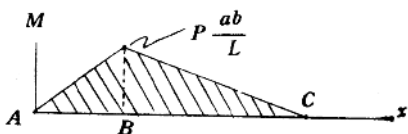
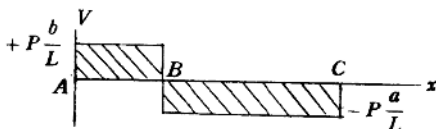
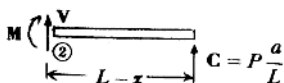
$$+\circlearrowleft \sum M_1 = 0 : M = +P \frac{b}{L} x$$



由 B 到 C :

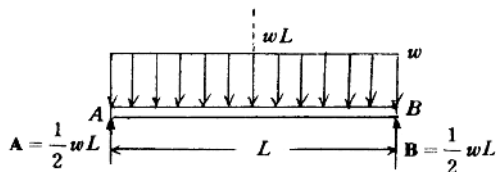
$$+\uparrow \sum F_y = 0 : V = -P \frac{a}{L}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_2 = 0 : M = +P \frac{a}{L} (L - x)$$



$$M_B = P \frac{ab}{L}$$

解 7.2 及 7.8:

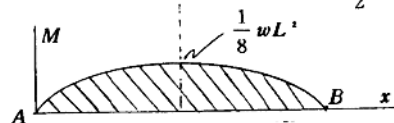
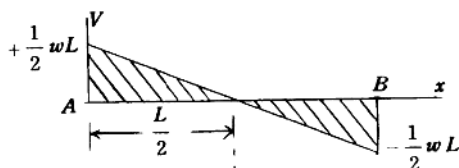
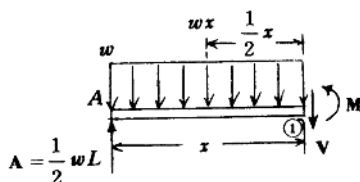


$$+\uparrow \sum F_y = 0 : \frac{1}{2} wL - wx - V = 0 \quad V = \frac{1}{2} wL - wx$$

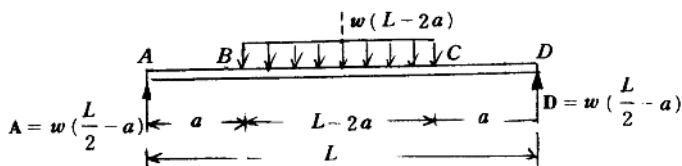
$$+\circlearrowleft \sum M_1 = 0 : M - \frac{1}{2}wLx + wx\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$M = \frac{1}{2}wLx - \frac{1}{2}wx^2$$

$$M_{\max} = \frac{1}{8}wL^2$$



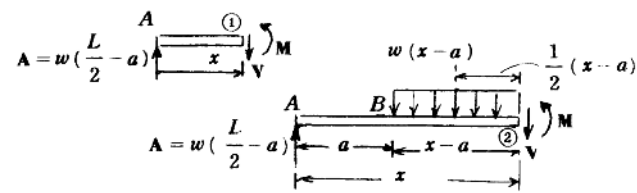
解 7.3 及 7.9:



由 A 到 B

$$+\uparrow \sum F_v = 0 : V = w\left(\frac{L}{2} - a\right)$$

$$+\circlearrowleft \sum M_1 = 0 : M = w\left(\frac{L}{2} - a\right)x$$



$$A = w \left(\frac{L}{2} - a \right)$$

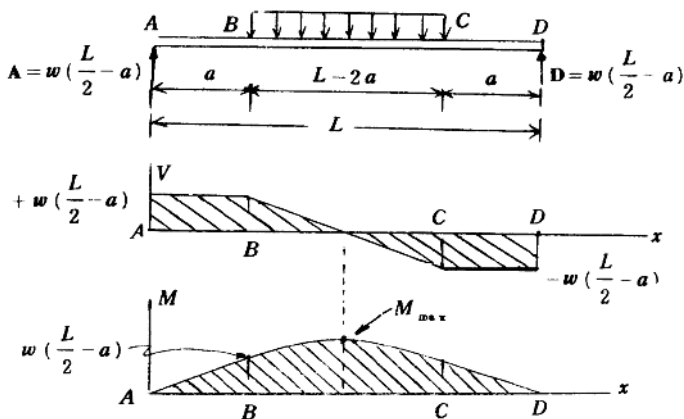
$$+ \uparrow \sum F_v = 0 : w \left(\frac{L}{2} - a \right) - w(x - a) - V = 0$$

$$V = w \left(\frac{L}{2} - x \right)$$

$$+ \curvearrowright \sum M_2 = 0 : -w \left(\frac{L}{2} - a \right) x + w(x - a) \cdot \frac{1}{2}(x - a) + M = 0$$

$$M = w \left(\frac{L}{2} - a \right) x - \frac{1}{2} w (x - a)^2 \quad (1)$$

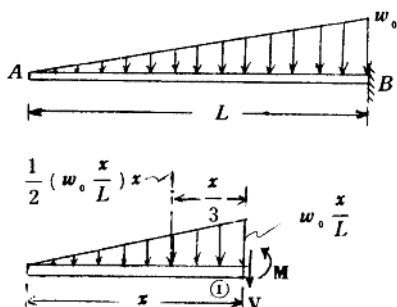
梁及負荷均對稱於中心線



$M_{\max}$ 在 $x = \frac{L}{2}$: 將 $x = \frac{L}{2}$ 代入 (1)

$$M_{\max} = w \left(\frac{L}{2} - a \right) \frac{L}{2} - \frac{w}{2} \left(\frac{L}{2} - a \right)^2 = w \left(\frac{L^2}{8} - \frac{a^2}{2} \right)$$

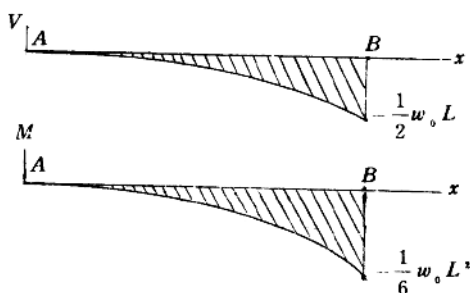
解 7.4 及 7.10:



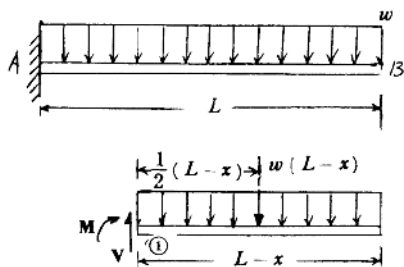
$$+ \uparrow \sum F_y = 0 : -\frac{1}{2} w_0 \frac{x^2}{L} - V = 0 \quad V = -\frac{1}{2} \frac{w_0}{L} x^2$$

$$+ \curvearrowright \sum M_1 = 0 : + \left(\frac{1}{2} w_0 \frac{x^2}{L} \right) \frac{x}{3} + M = 0$$

$$M = -\frac{1}{6} \frac{w_0}{L} x^3$$



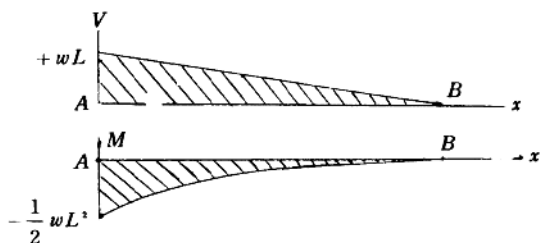
解 7.5 及 7.11:



$$+ \uparrow \sum F_y = 0 : \quad V - w(L-x) = 0 \quad V = w(L-x)$$

$$+ \curvearrowright \sum M_1 = 0 : \quad -M - w(L-x) \frac{1}{2}(L-x) = 0$$

$$M = -\frac{1}{2}w(L-x)^2$$



解 7.6 及 7.12:

