中國科學院數學研究所專刊

甲種　　第2號

射影曲線概論

蘇步青

中國科學院數學研究所編輯
中國科學院出版
1954 北京

中國科學院數學研究所專刊
甲種　第2號

射影曲線概論

蘇步青

中國科學院數學研究所編輯
中國科學院出版
1954 北京

中國科學院數學研究所專刊
甲 種　　第2號

射 影 曲 線 概 論

蘇 步 青 著

中 國 科 學 院 出 版
北京(7)文津街3號
藝文書局鑄字印刷廠印刷
上海嘉善路113號
新 華 書 店 發 行

(專) 54013　　1954年8月第一版
自然：057　　1954年8月第一次印刷
(滬) 0001--2,500　　開本：$787 \times 1092 \frac{1}{16}$
字數：274,000　　印張：$16\frac{3}{4}$

定價：道林本 40,000元
　　　報紙本 25,000元

本書內容介紹

本書主要是彙集著者在一九三七年以後四年間的研究結果而成，在一九四二年曾經一度用英文寫成現在的方式．除了最後一段略加修改而外，本文內容一概未予變動，僅在書後附載的參考文獻目錄中，把當時倘在排印中的部分論文補上出版刊物的名稱和時期；又選拔了以後在這方面的發展上起了作用的一些文獻，尤其是我國數學家的著作，附在一起，以供讀者參考之用．

全書內容分成六章． 在第一章敍述平面曲線論，其中包括方德植和張素誠的射影法線作圖以及熊全治的曲線接觸不變式研究．第二章平曲線奇點研究與應用是本書的最主要部分，一方面可表奇點的射影理論的建立爲本書中整體一貫的理論打下基礎，另一方面，奇點論本身有很大的發展，特別指出張素誠的非可表奇點的研究．可表奇點論首先在普通空間曲線論的創設(第三章)有其應用，始終使用幾何的方法進行討論，是其特點． 其次，應用這理論到二曲線的接觸不變式 (第四章)． 爲了具體表述可表奇點論的廣泛應用，特在第五章建立起四維空間曲線的射影微分幾何學． 最後在第六章敍述一系列的射影協變法曲線的存在，它們在高維空間的射影曲線概論中佔據決定性的地位；本章還包括曲線的算術不變式和賽格勒定理的拓廣．

目　　錄

射影曲線概論

緒 言

1. 在 n 維射影空間 S_n 以研究曲線在直射或直射和逆射之下的不變性質爲目標的射影微分幾何，遠在 1878 年對於平面的部分且在 1880 年對於普通空間的部分爲阿爾芳所討論；他利用了非齊次坐標的冪級數展開．伯爾佐拉里(1897)雖然把阿爾芳的方法推廣到高維空間曲線的研究，但是在平面和普通空間裏射影曲線論的系統的開展，無可懷疑地應歸功於維爾清斯基；1906 年他在其著書[1]的主要篇幅裏貢獻了微分方程的方法．1916 年福比尼曾經運用分析方法，就是微分形式法[2]，以論射影微分幾何，而且後來（1922，1924，1926）山尼亞採取它的修正方式而建立了平面和普通空間的曲線論[3]．　此地值得提到的是山尼亞的方法儘管完全流於形式的，也可應用到高維空間的射影曲線論；這是拉伐倍[4] 所發展的．

意大利幾何學家旁匹阿尼在 1926 年開始研究曲線，而且一直到 1937 年獲得了普通空間幾何的許多重要概念[5]．　他的貢獻中有平曲線在其奇點的射影微分幾何、兩條平曲線的接觸理論和空間的兩曲線的相交不變式；這些不僅本身包含着很基本的而深奧的結果，而且在曲線論和曲面論起了很大的作用．

活動標形法原來是達爾部所創設的，後來嘉當[6]發揚了這方法而收到了成效．蟹谷乘養[7]沿用這觀念於曲線論，最近達到普通空間和高維空間曲線的射影理論．

---

1) E. J. Wilczynski, Projective differential geometry of curves and ruled surfaces. 來比錫 (1906). 以下引用做 Wilczynski, P.D.G.

2) 參考 G. Fubini—E. Čech, Geometria proiettiva differenziale, 共二卷。報樂尼亞 (1924). 以下引用做福比尼—捷克，G.P.D.

3) G. Sannia, [1], [2]. 方括弧中的數字係指本論文末尾所附的文獻目錄中的論文而言。

4) V. Hlavatý, [1], [2], [3].

5) 參照福比尼·捷克，G.P.D. 卷二附錄 II 或 E. Bompiani, [5].

6) É. Cartan, La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continues et les espaces généralisés, 巴黎 (1935).

7) J. Kanitani (蟹谷乘養), [1].

2. 在 S_n 討論一曲線的射影微分幾何之際，所遭遇的困難是爲量度微分幾何所沒有的、對於後者很容易添附一個固有的標形到曲線的各點上去；例如，在普通空間的場合得着佛勒納的三面體．在射影的場地上自然是非利用射影齊次坐標不可的；可是一個射影參考系統（在 S_n 就是基本 $(n+1)$ 面體和單位點）的確定決不是很簡單而迅速的．所以射影地附屬於曲線的一點及其近傍的這些參考原素如點、直線、平面等等的研究引起相當複雜的情况．不但如此，一個量度不變式與曲線的某一階爲止的近傍有關係，而在射影的場合，如果我們要取盡一切的射影不變式的話，那麼這個階數比量度的場合必須大大地提高．另一複雜性是發生在齊次坐標的比例因子的確定，因爲我們必須以一種固有的而且不變的方式來決定這因子的緣故．許多幾何學家所導入於曲線上的各點的種種參考系統或多或少是有些不自然的，從而爲解釋那裏獲得的射影不變式的幾何意義，需要到的概念就不得不比基本幾何形式中的四原素的交叉比要複雜得多了．推究其原因，或許是剛才所說的那些情况吧．

3. 關於普通空間的曲線論，旁匹阿尼[8] 把所論的曲線從山尼亞點射影且把問題歸到兩條平曲線間的射影不變式理論，藉以克服困難．他的方法確是可注意的，但是間接的，並且關於射影的參考系統的幾何確定方法，竟未提到片言隻語．甚至於前面提到的蟹谷乘養的工作裏面，合同標形的構造是爲了要使曲線的展開化成一個指定的標準方式的必要推論，因而不是單純幾何的．很明顯的，在高維空間的問題將變成更細緻的；並且關於射影空間 S_n $(n>3)$ 的曲線性質業已闡明者尙寥寥無幾[9]．因此，希望添附某些標形到一條曲線的各點使得不僅構造的方法必須是幾何的，而且按照這樣獲得的標形還可以一律使用交叉比來做曲線的所有射影不變式的解釋．

爲了企圖應用具有變曲點的平曲線的旁匹阿尼密切形[10] 到普通空間曲線論上去，著者曾經發見一曲線在正常點的一條協變的三次撓曲線的存在[11]；這三次撓曲線乃是建立新的射影曲線論的重要原素[12]．這事實引起了擴充旁匹阿尼密

---

8) 福比尼·捷克 G.P.D., 681 頁．

9) 蟹谷乘養, [2]. 還可參照 G. Tzitzéica, Introduction à la géométrie différentielle projective des courbes. Mémorial des sciences math., 47 集, 巴黎 (1931), 共 60 頁．

10) Bompiani, [1].

11) 蘇步青, [1], [4].

12) 蘇步青, [5].

切形概念到一平曲線的高階奇點去的觀念[13]，而從此創造在 S_n $(n>3)$ 的曲線的射影微分幾何[14]．我們已經建立起四維空間的射影曲線概論[15]，作爲新方法的說明．詳細情況可參照本論文的第五章．

4．本論文分成六章．第一章是關於平曲線的理論．必須指出，這裏包含着一連串爲普通理論所未提到的重要補充，且藉此明白解說如何運用冪級數展開來求射影不變式的概念．爲後文的討論方便上，在這裏介紹旁匹阿尼的兩平曲線的接觸理論和最近關於曲線射影法線的簡潔定義．

第二章是關於平曲線的某種奇點的研究．著者推廣了旁匹阿尼所用的方法，而且定義了階數 m $(\geqslant 3)$ 的可表示奇點作爲變曲點的擴充．在本論文裏到處利用這個概念．從曲線概論來說，或許沒有討論其他場合，就是一平曲線的不可表示奇點的必要，但是爲理論的嚴密性和完備性着想，著者得到優先權來發表張素誠的有趣的結果．還有對空間曲線的切線面的一些旁匹阿尼的定理和其補充等的應用，作爲本章的結束．

在第三章詳細敍述普通空間曲線的射影微分幾何的新研究方法．應用一平曲線在其一變曲點的旁匹阿尼密切形，就得着曲線在一正常點的一個附屬四面體，使與這曲線在同點的切線上的一點相互對應．第一類和第二類射影弧素以及曲率形式都很自然地被導引進來了．按照法式展開的伴隨法四面體可以使用某些交叉比來做山尼亞的兩個射影曲率的解釋．

爲說明旁匹阿尼密切形的其他應用，在第四章對於兩空間曲線的相交論重新予以創設．許多重要概念都從新列入於理論且與完整曲面論和非完整曲面論雙方都有了聯繫．

四維空間的射影曲線概論是第五章的內容；這可以說是僅亞於普通空間曲線論的簡潔機構．著者採取了第三章裏所用的順序；至於直紋面的完全理論，雖然可以從本章的理論容易建立起來，但是全部從略．

最後，第六章包含一連串的定理，作爲普通空間的一些已證結果的擴充．龍斯基式的計算法是我們的工具；如果沒有這個方法的發見，那麼一切計算將變成複雜無比，而會阻礙研究的發展了．

---

13) 蘇步青，[7]，[9]．
14) 蘇步青，[10]，[11]．
15) 蘇步青，[6]．

第　一　章

平　曲　線　論[1)]

§1.　附屬三角形

設 $P(x)$ 是解析的平曲線 C 的一個正常點，$P_1(x_1)$ 是 C 在 P 的切線 t 上而不合於 P 的一點，且最後 P_2 (x_2) 是 t 外的一點；那麼平面上任何一點 $M(z)$ 的射影齊次坐標可以寫成：

$$z^i = \xi_0 x^i + \xi_1 x_1^i + \xi_2 x_2^i \qquad (i=1, 2, 3) \tag{1}$$

或簡寫之，

$$z = \xi_0 x + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2, \tag{1'}$$

但 ξ_0, ξ_1, ξ_2 是 M 關於三角形 $(P P_1 P_2)$ 和單位點 $x + x_1 + x_2$ 的局部坐標．若依據

$$\xi = \frac{\xi_1}{\xi_0}, \qquad \eta = \frac{\xi_2}{\xi_0} \tag{2}$$

導入非齊次坐標 ξ, η，且假定 M 是在 C 上而且無限接近於 P 的一點，那麼 C 在 P 的近傍的展開應該是

$$\eta = a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + a_4 \xi^4 + a_5 \xi^5 + a_6 \xi^6 + (7),$$

式中 (n) 表示關於 ξ 的次數 $\geqslant n$ 的項的全部．

係數 a_2 不等於零，否則切線 t 與 C 在點 P 要有至少二階的接觸．由於 P_2 的各坐標 x_2^i 除了一個比例因子外才能決定，我們可以適當選擇這因子使得 $a_2=\frac{1}{2}$，但 P 和 P_1 的坐標是任意指定的．這樣一來，C 的展開變成

---

1) 本章的內容早已見於 1937 年浙江大學第一學期的講義，更參閱方德植，[1]．

$$\eta = \frac{1}{2}\xi^2 + a_3\xi^3 + a_4\xi^4 + a_5\xi^5 + a_6\xi^6 + (7). \tag{3}$$

當然，最後的展開與參考系統有關．對於單位點的更改，要保留這展開的同一形狀，那只限於

$$\rho\xi_0 = \xi_0, \quad \rho\xi_1 = \alpha\xi_1, \quad \rho\xi_2 = \alpha^2\xi_2; \tag{4}$$

於是變換後的方程是：

$$\bar{\eta} = \frac{1}{2}\bar{\xi}^2 + \bar{a}_3\bar{\xi}^3 + \bar{a}_4\bar{\xi}^4 + \bar{a}_5\bar{\xi}^5 + \bar{a}_6\bar{\xi}^6 + (7),$$

但

$$a_k = \alpha^{k-2}\bar{a}_k \qquad (k=3, 4, \cdots). \tag{5}$$

三角形 $\{PP_1P_2\}$ 的可能位置有 ∞^3；從其中可以挑出 ∞^1 個使得系中的各三角形的邊 P_1P_2 和 C 的密切二次曲線 C_2 相切．顯而易見，系中的三角形是決定於點 P_1 的，且因而記它做 $T(P_1)$．稱這些為 C 在 P 的附屬三角形．

密切二次曲線 C_2 關於附屬三角形 $T(P_1)$ 的方程應當是：

$$\xi^2 - 2\eta = 0; \tag{6}$$

所以兩係數 a_3 和 a_4 都化為零，於是展開 (3) 化成形式：

$$\eta = \frac{1}{2}\xi^2 + a_5\xi^5 + a_6\xi^6 + (7). \tag{I}$$

這展開與三角形 $T(P_1)$ 有關，且在單位點的變更下，

$$\xi = \alpha\bar{\xi}, \qquad \eta = \alpha^2\bar{\eta}, \tag{II}$$

各係數應當受着下列變換：

$$\bar{a}_k = \alpha^{k-2}a_k \qquad (k=5, 6, \cdots). \tag{7}$$

現在來研究當附屬三角形 $T(P_1)$ 被調換做另一個 $T(\bar{P}_1)$ 的時候，展開 (I) 應當受着怎樣的變動．為這個目的，設 $\bar{P}_1$ 的坐標是

$$\bar{P}_1(\beta, 1, 0); \tag{8}$$

那麼點 $\bar{P}_2$（就是從 $\bar{P}_1$ 引密切二次曲線 C_2 的第二切線的切點）的坐標是

$$\bar{P}_2\left(\frac{1}{2}\beta^2, \beta, 1\right). \tag{9}$$

由此可見，當 $T(P_1)$ 變換到 $T(\bar{P}_1)$、但保留（I）的形狀的時候，這類的最普遍變換必須是（II）和下面一個的乘積：

$$\xi = \frac{\bar{\xi}+\beta\bar{\eta}}{1+\beta\bar{\xi}+\frac{1}{2}\beta^2\bar{\eta}}, \qquad \eta = \frac{\bar{\eta}}{1+\beta\bar{\xi}+\frac{1}{2}\beta^2\bar{\eta}}. \tag{III}$$

經過最後變換之後，展開（I）被變換爲

$$\bar{\eta} = \frac{1}{2}\bar{\xi}^2 + \bar{a}_5\bar{\xi}^5 + \bar{a}_6\bar{\xi}^6 + (7); \tag{10}$$

我們容易證明：

$$\bar{a}_5 = a_5.$$

這就是說，展開（I）中的係數 a_5 在變換（III）之下是不變的，把這個量記做 θ_3，那就得着：

$$\eta = \frac{1}{2}\xi^2 + \theta_3\xi^5 + a_6\xi^6 + (7). \tag{I'}$$

若 $\bar{\theta}_3$ 是 θ_3 在（II）之下的變換，那麼從（7）獲得

$$\bar{\theta}_3 = \alpha^3\theta_3. \tag{11}$$

注意 1. 若在 P $\theta_3 = 0$，則曲線 C 與其密切二次曲線 C_2 有超度密切且點 P 是 C 的六切點．這時的展開變成形式[2]：

$$\eta = \frac{1}{2}\xi^2 + a_6\xi^6 + (7).$$

注意 2. 若 C 的方程是 $y = y(x)$，則

$$\theta_3 = \frac{1}{1080\,y'''^3}\left(9\,y''^2\,y^{V} - 45\,y'''\,y^{IV} + 40\,y'''^3\right), \tag{12}$$

但 y'', y''', $\cdots$ 表示導數．

2) Lane, [1].

事實上，取曲線上的點 (x, y) 做原點 O，那麼

$$y = y'x + \frac{1}{2}y''x^2 + \cdots + \frac{1}{5!}y^V x^5 + (6),$$

式中 x 的各乘冪的係數是在 O 取值的．置

$$Y = \frac{1}{y''}(y - y'x)$$

且運用變換

$$x = \frac{\xi}{1+\alpha_1\xi+\alpha_2\eta}, \quad Y = \frac{\eta}{1+\alpha_1\xi+\alpha_2\eta};$$

我們可以把展開化爲形式 $(1')$．經簡單計算之後得着各係數的數值

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}\frac{y''}{y'}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{18y''^2}(3y''y^{IV} - 4y'''^2),$$

於是證明 (12)．

§2. 基本三角形

現在假設曲線 C 上的一點 P 的坐標 x 都是一參數 u 的函數．坐標 $x' = \dfrac{dx}{du}$ 定義了 C 在 P 的切線 t 上的一點，稱爲導來點；取它做點 $P_1(x_1)$，於是得着對應的三角形 $T(P_1)$．這稱爲基本三角形．容易看出，點 P_1 的位置於是三角形 $T(P_1)$ 的確定與參數的變更

$$\bar{u} = f(u) \tag{13}$$

是無關的．可是，如果更改比例因子，就是

$$\bar{x} = \lambda x, \tag{14}$$

那麼它們要受着變換．事實上，導來點 P_1 被變換爲 $\bar{P}_1$：

$$\bar{x}_1 = \frac{d\bar{x}}{du} = \lambda(x_1 + \beta x),$$

但

$$\beta = \frac{\lambda'}{\lambda}.$$

因此，其餘頂點 $\bar{P}_2$ 應當合於依 (9) 所定的點 P_2．

若同時運用兩變換（13）和（14），那麼 P_1 的變換後的點是

$$\bar{x}_1 = \frac{\lambda}{f'}(x_1 + \beta x), \qquad \left(\beta = \frac{\lambda'}{\lambda}\right). \tag{15}$$

所以關於基本三角形 $T(P_1)$ 的變換亦是（II）和（III）的乘積，只須記憶住這時（II）裏面的量 α 應當採取數值

$$\alpha = \frac{1}{f'} = \frac{du}{d\bar{u}}. \tag{16}$$

這樣一來，由於量 θ_3 關於（III）是不變的，我們只須求出關於（II）的變換後的量 $\bar{\theta}_3$ 就夠了．參照（11）的結果：

$$\bar{\theta}_3\, d\bar{u}^3 = \theta_3\, du^3. \tag{17}$$

所以微分式 $d\sigma = \sqrt[3]{\theta_3}\, du$ 是曲線的不變式．我們將稱它爲曲線在點 P 的射影弧素且予以幾何解釋如次：

設 $Q\ (u+du)$ 是曲線 C 上接近於 $P(u)$ 的一點且設 Q_1, Q_2, Q_3 順次是 C 在 Q 的切線和任何基本三角形 $T(P_1)$ 的三邊 PP_1, PP_2, P_1P_2 的交點．若 D 表示交叉比 $(Q_2 Q_3, Q_1 Q)$，那麼 $D - \frac{1}{2}$ 是一個三階的微小且它的主要部分除了一常數因子外等於射影弧素的立方．

事實上，設 Q 關於 C 在 P 的基本三角形 $T(P_1)$ 的局部坐標是 ξ, η；那麼

$$\xi = du + \cdots$$

且 η 是依（I′）所決定的．C 在 Q 的切線上的一點具有下列坐標：

$$X = \xi + \rho, \qquad Y = \eta + \rho\frac{d\eta}{d\xi},$$

於是 Q_1, Q_2, Q_3 的橫標是

$$X_1 = \xi - \frac{\eta}{\dfrac{d\eta}{d\xi}}, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = \infty.$$

所以

$$D = (Q_2 Q_3, Q_1 Q) = 1 - \frac{\eta}{\xi\dfrac{d\eta}{d\xi}} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\theta_3\xi^3 + (4)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\theta_3\,du^3+(4),$$

就是所欲證明的[3].

現在轉入 P, P_1, P_2 的導來點的研究. 各點的坐標可以寫成 x, x_1 和 x_2 的線形式.在所論的場合,

$$\left.\begin{aligned} x' &= x_1,\\ x_1' &= A_1 x + B_1 x_1 + C_1 x_2,\\ x_2' &= A_2 x + B_2 x_1 + C_2 x_2, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

式中各係數是決定於展開 (I′) 和行將建立的不動條件的.

假定關於 $T(P_1)$ 具有非齊次坐標 (ξ, η) 的一點是固定在平面上的,那麼應當成立

$$(x+\xi x_1+\eta x_2)'=\lambda(x+\xi x_1+\eta x_2).$$

按照 (18) 計算最後方程的左邊,便得着關於 x 的一方程; 從這方程和關於 y 的類似方程容易導出下列條件:

$$\begin{aligned} \lambda &= A_1\xi + A_2\eta,\\ \xi' &= -1 - B_1\xi - B_2\eta + \lambda\xi,\\ \eta' &= -C_1\xi - C_2\eta + \lambda\eta. \end{aligned}$$

從 λ 的消去和 (I′) 的代入,便得着方程

$$\xi' = -1 - B_1\xi + \left(A_1 - \frac{1}{2}B_2\right)\xi^2 + \frac{1}{2}A_2\xi^3 + B_2\theta_3\xi^5 + (6), \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \eta' = -C_1\xi - \frac{1}{2}C_2\xi^2 + \frac{1}{2}A_1\xi^3 + \frac{1}{4}A_2\xi^4 - C_2\theta_3\xi^5&\\ + (A_1\theta_3 - C_2 a_6)\xi^6 + (7).& \end{aligned} \tag{20}$$

另一方面,從 (I′) 和 (19) 又可計算 η'; 其結果如次:

$$\eta' = -\xi - B_1\xi^2 + \left(A_1 - \frac{1}{2}B_2\right)\xi^3 + \left(\frac{1}{2}A_2 - 5\theta_3\right)\xi^4$$

---

[3] 關於其他解釋參閱 Wilczynski, [1]; Bompiani, [3]; Terracini, [1]; 方德植, [1].

$$+(\theta_3'-5B_1\theta_3-6a_6)\xi^5+\left\{a_6'-6B_1a_6+5\theta_3A_1\right.$$

$$\left.-\frac{7}{2}B_2\theta_3-7a_7\right\}\xi^6+(7).$$

把最後方程與（20）做比較，獲得：

$$C_1=1,\quad C_2=2B_1,\quad A_1=B_2,\quad A_2=20\theta_3,\quad 6a_6=\theta_3'-3B_1\theta_3,$$

$$7a_7=-4B_1a_6+a_6'+\frac{1}{2}A_1\theta_3.$$

置 $B_1=h$, $A_1=k$, 就可改寫方程（18）：

$$\left.\begin{aligned}x'&=x_1,\\x_1'&=kx+hx_1+x_2,\\x_2'&=20\theta_3x+kx_1+2hx_2\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{IV})$$

和

$$a_6=\frac{1}{6}(\theta_3'-3h\theta_3),\quad a_7=\frac{1}{7}a_6'-\frac{4}{7}ha_6+\frac{1}{14}k\theta_3.\qquad(21)$$

因此，我們獲得曲線 C 關於點 P 的一個基本三角形 $T(P_1)$ 的展開：

$$\eta=\frac{1}{2}\xi^2+\theta_3\xi^5+\frac{1}{6}(\theta_3'-3h\theta_3)\xi^6+a_7\xi^7+(8).\qquad(\mathrm{I}'')$$

在以上的討論裏，參數 u 以及比例因子 λ 的選擇仍舊是任意的．此地我們將敍述關於 u 和 λ 的某一標準化方法：這並不是曲線固有的，但對於許多問題的研究頗有用處．

為這個目的，取（15）和 $\bar{x}_2$ 的對應方程：

$$\bar{x}_2=\frac{\lambda}{f'^2}\left\{\frac{1}{2}\beta^2x+\beta x_1+x_2\right\}.\qquad(22)$$

由於

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{x}_1}{du}&=\bar{k}\bar{x}+\bar{h}\bar{x}_1+\bar{x}_2\\&=\lambda\left\{\left(\bar{k}+\frac{\beta}{f'}\bar{h}+\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{f'^2}\right)x+\frac{1}{f'}\left(\bar{h}+\frac{\beta}{f'}\right)x_1+\frac{1}{f'^2}x_2\right\},\end{aligned}$$

所以

$$\left.\begin{aligned} \bar{h} &= \frac{1}{f'}\left(h - \frac{f''}{f'} + \beta\right), \\ \bar{k} &= \frac{1}{f'^2}\left(k - \beta h + \beta' - \frac{1}{2}\beta^2\right). \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

這表示了時常可以選擇兩函數 $f = f(u)$ 和 $\lambda = \lambda(u)$，使得

$$\bar{h} = 0, \quad \bar{k} = 0.$$

充要條件是

$$\beta = \frac{f''}{f'} - h, \quad k - \beta h - \frac{1}{2}\beta^2 + \beta' = 0.$$

從此得着 f 的微分方程

$$\{f, u\} + k + \frac{1}{2}h^2 - h' = 0. \tag{24}$$

但

$$\{f, u\} = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$$

表示 $f(u)$ 關於 u 的雪瓦茲導數．如置

$$v = \frac{f''}{f'},$$

於是

$$\frac{f'''}{f'} = v' + v^2,$$

則得着 v 的利卡蒂方程：

$$v' - \frac{1}{2}v^2 + k + \frac{1}{2}h^2 - h' = 0.$$

任 $u = u_0$ 任意指定 $f(u)$，$f'(u)$，$f''(u)$ 的數值，就可決定（24）的一般解．特別當決定在 $u = u_0$ 的關係

$$\frac{f''}{f'} = h$$

的時候，在 $u = u_0$ 得 $\beta = 0$．這就是說，可以不更改 C 在一點的基本三角形而時常使 $\bar{h}, \bar{k}$ 都化爲零．