

中国土木工程学会 计算机应用学会年会论文集

3

中国土木工程学会计算机应用学会 编

冶金工业出版社

**中国土木工程学会
计算机应用学会年会
论文集
3**

中国土木工程学会计算机应用学会 编

冶金工业出版社

中国土木工程学会
计算机应用学会年会
论文集

3

中国土木工程学会计算机应用学会 编

*

冶金工业出版社出版发行

《北京北河沿大街高银院北巷35号》

新华书店总店科技发行所经销

冶金工业出版社印刷厂印刷

*

787 × 1092 1/16 印张 9 1/4 字数 215 千字

1989年8月第一版 1989年8月第一次印刷

印数00,001~3,000册

ISBN 7-5024-0454-6

TU · 21 定价6.50元

参加中国土木工程学会

计算机应用学会

第三届学术交流会的理事名单

刘鹤年	王建瑶	赵超燮	陈际明	缪兆杰	孙焕纯
何玉敖	孙扬德	周长怀	陈国藩	魏文郎	林立岩
王金海	潘士勸	江欢成	韩作贵	朱伯芳	周乾文
刘效尧	李炳威	徐宜祥	叶啸虎	杜瑞明	

前 言

中国土木工程学会计算机应用学会自1981年成立以来，曾先后召开了三届全国性的学术交流年会：第一届，1981年12月于昆明；

第二届，1984年于宁波；

第三届，1987年9月于屯溪。

参加第三届年会的有国内设计、施工、科研、教学等方面的代表共150余人。中国土木工程学会副理事长程庆国、学术工作委员会徐渭到会指导。会议就工程数值分析、专家系统、设计CAD等专题进行了广泛的学术交流，共征集论文217篇，除已选若干篇编入1988年土木工程学会第四届年会论文集及1988年8月温哥华第三届国际土木工程计算机应用会议论文集外，现特将其中具有一定代表性的论文共16篇汇编成这本《中国土木工程学会计算机应用学会年会论文集（3）》，以反映当前土木工程领域计算机应用技术水平及成就之一斑。

本届学术年会得到交通部公路规划设计院王建瑶总工程师、安徽省公路局刘效尧总工程师及有关同志的热忱支持，论文集的编辑出版又得到冶金工业部建筑研究总院和冶金工业出版社有关人员的支持与协助，谨致谢意。

中国土木工程学会计算机应用学会

1988年8月

目 录

厚板薄板通用的新型广义协调矩形元.....	龙驭球 赵俊卿 (1)
岩土-钢筋混凝土非线性有限元分析	吕大川 吴兰成 (11)
钢筋混凝土构件受弯、剪、扭复合作用开裂后的全过程计算.....	李建中 谢幼藩 (21)
映射无限元在工程中的应用.....	燕柳斌 (30)
位移函数在直角坐标下二次完备的平面等参非协调元.....	焦兆平 (38)
几种收敛加速法在直接/迭代法中的应用	瞿国祥 (43)
薄板壳的几何非线性分析.....	魏钢 赵超燮 (49)
开挖工程非线性有限元计算程序.....	胡 成 (59)
固液耦联振动的非线性分析.....	沙德松 孙焕纯 赵金成 邓康 (68)
构架式基础动力分析.....	李忠献 (79)
钢结构设计专家系统的系统设计及实现.....	林少培 郭秀玲 管 齐 (90)
施工项目管理的专家系统问题.....	黄金枝 郭秀玲 周国强 束继兴 (99)
公路线形的计算机辅助设计.....	刘效尧 (110)
CAAD 软件包研制简介.....	吴宝霖 (114)
计算机自动优化设计在铁路桥梁标准设计中的应用.....	陈国藩 李文虎 刘钊 (121)
复杂尾水系统调压室涌波计算的电算方法	
——并联尾水系统非恒定流计算.....	王效东 (128)

厚板薄板通用的新型广义协调矩形元

龙取球 赵俊卿

(清华大学)

〔摘要〕本文对文献〔1〕关于广义协调元的作法加以修改。引入常内力和线性内力下的广义协调条件，导出具有十二个自由度的厚板薄板都通用的新型广义协调矩形元GCⅠ-R12。在薄板单元基础上引入剪切变形的影响而不增加单元自由度。此单元在薄板极限情况不出现剪切自锁现象，可通用于厚板和薄板弯曲问题。由于满足常内力下的广义协调条件，因而能够通过分片检验，保证收敛于精确解，数值例题表明本单元具有好的精度。这种新方法是一个位移型单元，因此可按常规作法进行推导和实施。

一、前言

在赖斯纳 (Reissner) 厚板问题中，构造位移型单元的一个主要问题是如何避免剪切自锁现象。文献中已经提出过一些不出现剪切自锁现象的厚板位移型单元方案，通常采用三种作法。第一种作法是在单元自由度中除包含结点挠度和结点转角外，还取结点剪应变作为附加自由度〔2〕、〔3〕。这种作法的缺点是这些附加的剪切自由度使计算工作量增大。第二种作法是把剪切变量看作内部自由度并用凝聚法予以消去〔4〕、〔5〕。这种作法的缺点是往往不能通过任意网格下的分片检验。第三种作法是采用降阶积分方法〔6〕、〔7〕，但应注意防止出现多余的零能模式。

本文根据广义协调元的基本思路，在建立单元刚度矩阵时要求事先满足常内力状态下的广义协调条件。一方面，利用这些广义协调条件可将剪切变量用结点挠度和结点转角来表示，因而既不增加新的自由度，又能避免剪切自锁现象。另一方面，由于事先满足了常内力状态下的广义协调条件，因而保证收敛，能通过分片检验。这样就得到一个自由度很少，厚板和薄板都通用，收敛可靠的位移型单元。单元为矩形，具有十二个自由度。为了与文献〔1〕中基于各边平均位移协调的广义协调元相区别，本文的单元称为第Ⅰ类广义协调元，记为GCⅠ-R12单元。

二、广义协调元的两种方案

在推导厚板弯曲的位移型单元的刚度矩阵时，下列修正的势能泛函应为驻值

$$(6) \quad \Pi_{mp} = U_b + U_s + U_{\partial A_e} = \text{驻值} \quad (1)$$

式中， U_b 、 U_s 分别为单元的弯曲和剪切应变能；

$U_{\partial A_e}$ 为由于单元周边位移不协调而引入的周边附加能量，即

$$U_{\partial A_e} = \oint_{\partial A_e} [M_n(\psi_n - \tilde{\psi}_n) + M_{ns}(\psi_s - \tilde{\psi}_s) - Q_n(W - \tilde{W})] ds \quad (2)$$

式中， W 、 ψ_n 、 ψ_s 分别为单元域内位移场在单元边界 ∂A_e 上的挠度、法向转角和切向转

角;

$\widetilde{W}$, $\widetilde{\psi}_n$, $\widetilde{\psi}_s$ 为单元间公共边界上的公共位移。

$(W - \widetilde{W})$, $(\psi_n - \widetilde{\psi}_n)$, $(\psi_s - \widetilde{\psi}_s)$ 为边界位移的不协调量。

Q_n , M_n , M_{ns} 是拉格朗日 (Lagrange) 乘子, 分别为在单元边界 ∂A_s 上的横剪力、法向弯矩和扭矩。

如果单元域内位移场满足周边协调条件:

$$W = \widetilde{W}, \quad \psi_n = \widetilde{\psi}_n, \quad \psi_s = \widetilde{\psi}_s, \quad (\text{在 } \partial A_s \text{ 上}) \quad (3)$$

则此单元是协调单元。此时, 修正的势能泛函 Π_m 退化为势能泛函 Π_p , 而驻值条件 (式 1) 退化为势能驻值条件:

$$\Pi_p = U_b + U_s = \text{驻值} \quad (4)$$

广义协调元的基本思路是不要求单元域内位移场在单元边界 ∂A_s 上严格地满足周边协调条件 (式 1), 而只要求在网格无限细分, 因而单元的内力及其应变趋于均匀分布的极限情况下单元域内位移场满足如下的广义协调条件:

$$U_{\partial A_s} = \oint_{\partial A_s} [M_n (\psi_n - \widetilde{\psi}_n) + M_{ns} (\psi_s - \widetilde{\psi}_s) - Q_n (W - \widetilde{W})] ds = 0 \quad (5)$$

此时, 驻值条件 (式 1) 即退化为势能驻值条件 (式 4) 的简单形式。

归纳起来, 广义协调元一方面在理论上以修正的势能原理 (式 1) 为基础, 因而保证收敛; 另一方面在实际推导时仍采用势能原理 (式 4) 的简单形式, 因而作法简便。广义协调元所以能达到既收敛又简易的双重目的, 其基本措施是事先要求单元域内位移场满足在常内力状态下的广义协调条件 (式 5)。

广义协调元有两种实施方案:

第一种实施方案采用广义协调条件 (式 5) 的一种强形式^[1]: 设在式 (5) 中的边界力 M_n , M_{ns} , Q_n 均为沿每边均匀分布, 于是由式 (5) 即得到单元每边的平均位移 (平均挠度、平均法向转角、平均切向转角) 彼此协调的条件。这种基于单元各边平均位移彼此协调的广义协调元可称为第 I 类广义协调元, 记为 GC I 单元。

本文采用第二种实施方案, 即直接采用常内力状态下的广义协调条件 (式 5) 作为附加条件。这种事先要求直接满足常内力状态下的广义协调条件的广义协调元可称为第 II 类广义协调元, 记为 GC II 单元。

三、常内力及低阶内力状态下的广义协调条件

考虑厚板弯曲的平衡内力状态, 设横剪力 Q_x , Q_y 和弯矩 M_x , M_y 均为均匀分布, 扭矩 M_{xy} 为线性分布:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \beta_1, \quad M_y = \beta_2 \\ M_{xy} &= \beta_3 + \beta_5 x + \beta_4 y \\ Q_x &= \beta_4, \quad Q_y = \beta_5 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

设 l , m 为单元边界 ∂A_s 的外法线的方向余弦。单元边界力为

$$\left. \begin{aligned} Q_n &= l\beta_4 + m\beta_5 \\ M_n &= l^2\beta_1 + m^2\beta_2 + 2lm(\beta_3 + \beta_5 x + \beta_4 y) \\ M_{ns} &= lm(-\beta_1 + \beta_2) + (l^2 - m^2)(\beta_3 + \beta_5 x + \beta_4 y) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

将式(7)代入广义协调条件(式5), 得

$$\oint_{\partial A_e} \{ [l^2 \beta_1 + m^2 \beta_2 + 2lm(\beta_3 + \beta_5 x + \beta_4 y)] (\psi_s - \tilde{\psi}_s) + [lm(-\beta_1 + \beta_2) + (l^2 - m^2)(\beta_3 + \beta_5 x + \beta_4 y)] (\psi_s - \tilde{\psi}_s) - (l\beta_4 + m\beta_5)(W - \tilde{W}) \} ds = 0 \quad (8)$$

由于 $\beta_1, \dots, \beta_5$ 为独立参数, 因此由式(8)可得到五个广义协调条件如下:

$$\left. \begin{aligned} \oint_{\partial A_e} [l^2 (\psi_n - \tilde{\psi}_n) - lm(\psi_s - \tilde{\psi}_s)] ds &= 0 \\ \oint_{\partial A_e} [m^2 (\psi_n - \tilde{\psi}_n) + lm(\psi_s - \tilde{\psi}_s)] ds &= 0 \\ \oint_{\partial A_e} [2lm(\psi_n - \tilde{\psi}_n) + (l^2 - m^2)(\psi_s - \tilde{\psi}_s)] ds &= 0 \\ \oint_{\partial A_e} [2lm y (\psi_n - \tilde{\psi}_n) + (l^2 - m^2) y (\psi_s - \tilde{\psi}_s) - l(W - \tilde{W})] ds &= 0 \\ \oint_{\partial A_e} [2lm x (\psi_n - \tilde{\psi}_n) + (l^2 - m^2) x (\psi_s - \tilde{\psi}_s) - m(W - \tilde{W})] ds &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

考虑矩形单元(图1), 并设 $\xi = \frac{x}{a}$, $\eta = \frac{y}{b}$ 。此时, 式(9)可写成

$$A_i = B_i \quad (i=1, 2, 3, 4, 5) \quad (10)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \int_{-1}^1 [\psi_x(1, \eta) - \psi_x(-1, \eta)] d\eta \\ A_2 &= \int_{-1}^1 [\psi_y(\xi, 1) - \psi_y(\xi, -1)] d\xi \\ A_3 &= a \int_{-1}^1 [\psi_x(\xi, 1) - \psi_x(\xi, -1)] d\xi \\ &\quad + b \int_{-1}^1 [\psi_y(1, \eta) - \psi_y(-1, \eta)] d\eta \\ A_4 &= \int_{-1}^1 [W(1, \eta) - W(-1, \eta)] d\eta \\ &\quad - a \int_{-1}^1 [\psi_x(\xi, 1) + \psi_x(\xi, -1)] d\xi \\ &\quad - b \int_{-1}^1 \eta [\psi_y(1, \eta) - \psi_y(-1, \eta)] d\eta \\ A_5 &= \int_{-1}^1 [W(\xi, 1) - W(\xi, -1)] d\xi \\ &\quad - b \int_{-1}^1 [\psi_y(1, \eta) + \psi_y(-1, \eta)] d\eta \\ &\quad - a \int_{-1}^1 \xi [\psi_x(\xi, 1) - \psi_x(\xi, -1)] d\xi \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

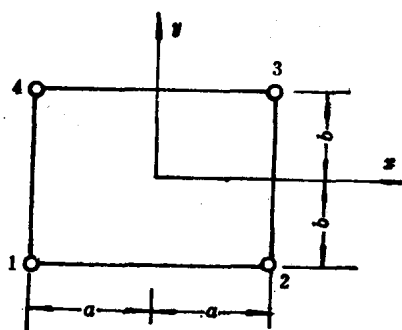


图 1 矩形单元

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \int_{-1}^1 [\tilde{\psi}_{x23} - \tilde{\psi}_{x41}] d\eta \\
 B_2 &= \int_{-1}^1 [\tilde{\psi}_{y34} - \tilde{\psi}_{y12}] d\xi \\
 B_3 &= a \int_{-1}^1 [\tilde{\psi}_{x34} - \tilde{\psi}_{x12}] d\xi + b \int_{-1}^1 [\tilde{\psi}_{y23} - \tilde{\psi}_{y41}] d\eta \\
 B_4 &= \int_{-1}^1 [\tilde{W}_{23} - \tilde{W}_{41}] d\eta - a \int_{-1}^1 [\tilde{\psi}_{x34} + \tilde{\psi}_{x12}] d\xi \\
 &\quad - b \int_{-1}^1 \eta [\tilde{\psi}_{y23} - \tilde{\psi}_{y41}] d\eta \\
 B_5 &= \int_{-1}^1 [\tilde{W}_{34} - \tilde{W}_{12}] d\xi - b \int_{-1}^1 [\tilde{\psi}_{y23} + \tilde{\psi}_{y41}] d\eta \\
 &\quad - a \int_{-1}^1 \xi [\tilde{\psi}_{x34} - \tilde{\psi}_{x12}] d\xi
 \end{aligned} \tag{12}$$

单元域内位移场及剪应变场设为

$$\begin{aligned}
 W(x, y) &= \lambda_1 + \lambda_2 \xi + \lambda_3 \eta + \lambda_4 \xi^2 + \lambda_5 \xi \eta + \lambda_6 \eta^2 + \lambda_7 \xi^3 \\
 &\quad + \lambda_8 \xi^2 \eta + \lambda_9 \xi \eta^2 + \lambda_{10} \eta^3 + \lambda_{11} \xi^3 \eta + \lambda_{12} \xi \eta^3 \\
 \psi_x(x, y) &= \frac{\partial W}{\partial x} - \gamma_x \\
 \psi_y(x, y) &= \frac{\partial W}{\partial y} - \gamma_y \\
 \gamma_x(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 y \\
 \gamma_y(x, y) &= \beta_1 + \beta_2 x
 \end{aligned} \tag{13}$$

式 (13) 中共含 16 个待定参数 $\lambda_1, \dots, \lambda_{12}, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 。

将式 (13) 代入式 (11), 求得 $A_1, \dots, A_5$ 如下:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{8}{a} \lambda_4 \\
 A_2 &= \frac{8}{b} \lambda_6 \\
 A_3 &= 8(\lambda_5 + \lambda_{11} + \lambda_{12}) - 4ab(\alpha_2 + \beta_2) \\
 A_4 &= \frac{-16}{3} \lambda_9 + 4a\alpha_1 \\
 A_5 &= \frac{-16}{3} \lambda_8 + 4b\beta_1
 \end{aligned} \tag{14}$$

矩形单元的十二个结点位移分量组成向量 $\{q\}^e$ ：

$$\{q\}^e = [W_1, \psi_{x1}, \psi_{y1}, W_2, \psi_{x2}, \psi_{y2}, W_3, \psi_{x3}, \psi_{y3}, W_4, \psi_{x4}, \psi_{y4}]^T \quad (15)$$

根据单元的结点位移进行插值，可确定单元各边的边界位移：每边的法向转角 $\tilde{\psi}$ ，根据两端结点值进行线性插值；每边的挠度 $\tilde{W}$ 和切向转角 $\tilde{\psi}$ ，根据两端结点的挠度和切向转角按照厚梁理论确定其分布曲线，其中 $\tilde{W}$ 为三次曲线， $\tilde{\psi}$ 为二次曲线。将这些边界位移的表示式代入式(12)后， $B_1, \dots, B_5$ 可用结点位移表示如下：

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \sum_{i=1}^4 \psi_{xi} \xi_i \\ B_2 &= \sum_{i=1}^4 \psi_{yi} \eta_i \\ B_3 &= (\rho_1 + \rho_2) \sum_{i=1}^4 W_i \xi_i \eta_i + (1 - \rho_1) a \sum_{i=1}^4 \psi_{xi} \eta_i \\ &\quad + (1 - \rho_2) b \sum_{i=1}^4 \psi_{yi} \xi_i \\ B_4 &= (1 - \rho_1) \left(\sum_{i=1}^4 W_i \xi_i - a \sum_{i=1}^4 \psi_{xi} \right) - \frac{2}{3} b \sum_{i=1}^4 \psi_{yi} \xi_i \eta_i \\ B_5 &= (1 - \rho_2) \left(\sum_{i=1}^4 W_i \eta_i - b \sum_{i=1}^4 \psi_{yi} \right) - \frac{2}{3} a \sum_{i=1}^4 \psi_{xi} \xi_i \eta_i \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中

$$\rho_1 = \frac{1}{1 + \frac{2.4}{1 - \mu} \left(\frac{t}{2a} \right)^2}, \quad \rho_2 = \frac{1}{1 + \frac{2.4}{1 - \mu} \left(\frac{t}{2b} \right)^2} \quad (17)$$

将式(14)和式(16)代入式(10)，得

$$\left. \begin{aligned} \frac{8}{a} \lambda_4 &= \sum \psi_{xi} \xi_i \\ \frac{8}{b} \lambda_6 &= \sum \psi_{yi} \eta_i \\ 8(\lambda_5 + \lambda_{11} + \lambda_{12}) - 4ab(\alpha_2 + \beta_2) \\ &= (\rho_1 + \rho_2) \sum W_i \xi_i \eta_i + (1 - \rho_1) a \sum \psi_{xi} \eta_i + (1 - \rho_2) b \sum \psi_{yi} \xi_i \\ \frac{-16}{3} \lambda_9 + 4a\alpha_1 &= (1 - \rho_1) \left(\sum W_i \xi_i - a \sum \psi_{xi} \right) - \frac{2}{3} b \sum \psi_{yi} \xi_i \eta_i \\ \frac{-16}{3} \lambda_8 + 4b\beta_1 &= (1 - \rho_2) \left(\sum W_i \eta_i - b \sum \psi_{yi} \right) - \frac{2}{3} a \sum \psi_{xi} \xi_i \eta_i \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式(18)就是厚板矩形单元在常内力及低阶内力状态下的五个广义协调条件。

四、待定系数 $\{\lambda\}$ ， $\{\alpha\}$ ， $\{\beta\}$ 用 $\{q\}^e$ 表示

为了确定式(13)中的十六个待定系数 $\{\lambda\}$ 、 $\{\alpha\}$ 和 $\{\beta\}$ ，并用单元结点位移 $\{q\}^e$ 表示，需要建立待定系数与 $\{q\}^e$ 之间的关系式。

首先，考虑常内力及低阶内力状态下的广义协调条件(式18)，共得到五个关系式。

其次, 考虑单元结点处的点协调条件:

$$\left. \begin{aligned} W(x_i, y_i) &= W_i \\ \psi_x(x_i, y_i) &= \psi_{xi} \\ \psi_y(x_i, y_i) &= \psi_{yi} \end{aligned} \right\} (i=1, 2, 3, 4) \quad (19)$$

将式 (13) 代入式 (19) 的左边项, 共得到待定系数与 $\{q\}^e$ 之间的十二个关系式。将它们加以线性组合, 可得到如下形式的十二个关系式:

$$\begin{aligned} \Sigma W_i &= 4(\lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_6) & ① \\ \Sigma W_i \xi_i &= 4(\lambda_2 + \lambda_7 + \lambda_9) & ② \\ \Sigma W_i \eta_i &= 4(\lambda_3 + \lambda_8 + \lambda_{10}) & ③ \\ \Sigma W_i \xi_i \eta_i &= 4(\lambda_5 + \lambda_{11} + \lambda_{12}) & ④ \\ \Sigma \psi_{xi} &= \frac{4}{a}(\lambda_2 + 3\lambda_7 + \lambda_9) - 4\alpha_1 & ⑤ \\ \Sigma \psi_{xi} \xi_i &= \frac{8}{a} \lambda_4 & ⑥ \\ \Sigma \psi_{xi} \eta_i &= \frac{4}{a}(\lambda_5 + 3\lambda_{11} + \lambda_{12}) - 4b\alpha_2 & ⑦ \\ \Sigma \psi_{xi} \xi_i \eta_i &= \frac{8}{a} \lambda_8 & ⑧ \\ \Sigma \psi_{yi} &= \frac{4}{b}(\lambda_3 + \lambda_8 + 3\lambda_{10}) - 4\beta_1 & ⑨ \\ \Sigma \psi_{yi} \xi_i &= \frac{4}{b}(\lambda_5 + \lambda_{11} + 3\lambda_{12}) - 4a\beta_2 & ⑩ \\ \Sigma \psi_{yi} \eta_i &= \frac{8}{b} \lambda_6 & ⑪ \\ \Sigma \psi_{yi} \xi_i \eta_i &= \frac{8}{b} \lambda_9 & ⑫ \end{aligned} \quad (20)$$

式 (20) 中的第⑥式和第⑪式与式 (18) 中的前两式相同, 因此在式 (18) 和式 (20) 中总共只有十五个独立方程。为了求解十六个待定系数, 可再设 $\alpha_2 = \beta_2$, 于是根据式 (18) 和式 (20) 可以解出待定系数, 并用结点位移 $\{q\}^e$ 表示如下:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{4} \Sigma W_i - \frac{a}{8} \Sigma \psi_{xi} \xi_i - \frac{b}{8} \Sigma \psi_{yi} \eta_i \\ \lambda_2 &= \frac{2+\rho_1}{8} \Sigma W_i \xi_i - \frac{\rho_1}{8} a \Sigma \psi_{xi} - \frac{1}{8} b \Sigma \psi_{yi} \xi_i \eta_i \\ \lambda_3 &= \frac{2+\rho_2}{8} \Sigma W_i \eta_i - \frac{\rho_2}{8} b \Sigma \psi_{yi} - \frac{1}{8} a \Sigma \psi_{xi} \xi_i \eta_i \\ \lambda_4 &= \frac{a}{8} \Sigma \psi_{xi} \xi_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_5 &= \frac{1}{8} [(2 + \rho_1 + \rho_2) \sum W_i \xi_i \eta_i - \rho_1 a \sum \psi_{xi} \eta_i - \rho_2 b \sum \psi_{yi} \xi_i] \\
\lambda_6 &= \frac{b}{8} \sum \psi_{yi} \eta_i \\
\lambda_7 &= \frac{-\rho_1}{8} (\sum W_i \xi_i - a \sum \psi_{xi}) \\
\lambda_8 &= \frac{a}{8} \sum \psi_{xi} \xi_i \eta_i \\
\lambda_9 &= \frac{b}{8} \sum \psi_{yi} \xi_i \eta_i \\
\lambda_{10} &= \frac{-\rho_2}{8} (\sum W_i \eta_i - b \sum \psi_{yi}) \\
\lambda_{11} &= \frac{-1}{16} [(\rho_1 + \rho_2) \sum W_i \xi_i \eta_i - (1 + \rho_1) a \sum \psi_{xi} \eta_i \\
&\quad + (1 - \rho_2) b \sum \psi_{yi} \xi_i] \\
\lambda_{12} &= \frac{-1}{16} [(\rho_1 + \rho_2) \sum W_i \xi_i \eta_i - (1 + \rho_2) b \sum \psi_{yi} \xi_i \\
&\quad + (1 - \rho_1) a \sum \psi_{xi} \eta_i] \\
\alpha_1 &= \frac{1}{4} (1 - \rho_1) \left(\frac{1}{a} \sum W_i \xi_i - \sum \psi_{xi} \right) \\
\beta_1 &= \frac{1}{4} (1 - \rho_2) \left(\frac{1}{b} \sum W_i \eta_i - \sum \psi_{yi} \right) \\
\alpha_2 = \beta_2 &= \frac{1}{8ab} [(2 - \rho_1 - \rho_2) \sum W_i \xi_i \eta_i - (1 - \rho_1) a \sum \psi_{xi} \eta_i \\
&\quad - (1 - \rho_2) b \sum \psi_{yi} \xi_i]
\end{aligned} \tag{21}$$

式 (21) 就是待定系数 $\{\lambda\}$ 、 $\{\alpha\}$ 和 $\{\beta\}$ 用结点位移 $\{q\}^e$ 表示的算式。

五、单元刚度矩阵

将式 (21) 代入式 (13)，单元域内位移场已用结点位移 $\{q\}^e$ 表示。此后即可按通常作法导出单元刚度矩阵。

剪应变由式 (13) 中的后两式给出，将式 (21) 代入后可写成

$$\{\gamma\} = [\gamma_x \quad \gamma_y]^T = [B_s] \{q\}^e \tag{22}$$

$$\text{其中} \quad [B_s] = [[B_{s1}] \quad [B_{s2}] \quad [B_{s3}] \quad [B_{s4}]] \tag{23}$$

$$[B_{si}] = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \frac{\xi_i}{a} [2(1 - \rho_1) \\ + (2 - \rho_1 - \rho_2) \eta_i \eta] & -(1 - \rho_1) (2 + \eta_i \eta) - \frac{b}{a} (1 - \rho_2) \xi_i \eta \\ \frac{\eta_i}{b} [2(1 - \rho_2) \\ + (2 - \rho_1 - \rho_2) \xi_i \xi] & -\frac{a}{b} (1 - \rho_1) \eta_i \xi - (1 - \rho_2) (2 + \xi_i \xi) \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

曲率和扭率为

$$\{\kappa\} = \left[-\frac{\partial \psi_z}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y} - \left(\frac{\partial \psi_z}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \right]^T \quad (25)$$

将式 (13) 和 (21) 代入式 (25), 得

$$\{\kappa\} = [B_b] \{q\}^* \quad (26)$$

其中

$$[B_b] = [[B_{b1}] [B_{b2}] [B_{b3}] [B_{b4}]] \quad (27)$$

$$[B_{bi}] = \frac{1}{8} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{a^2} \xi_i \xi [2\rho_1 + (\rho_1 + \rho_2) \eta_i \eta] & -\frac{1}{a} [2\xi_i + 6\rho_1 \xi + 2\xi_i \eta_i \eta + 3(1 + \rho_1) \eta_i \xi \eta] & \frac{3b}{a^2} (1 - \rho_2) \xi_i \xi \eta \\ \frac{3}{b^2} \eta_i \eta [2\rho_2 + (\rho_1 + \rho_2) \xi_i \xi] & \frac{3a}{b^2} (1 - \rho_1) \eta_i \xi \eta & -\frac{1}{b} [2\eta_i + 6\rho_2 \eta + 2\xi_i \eta_i \xi + 3(1 + \rho_2) \xi_i \xi \eta] \\ \frac{-1}{ab} (\rho_1 + \rho_2) \xi_i \eta_i (4 - 3\xi^2 - 3\eta^2) & \frac{-\eta_i}{b} [2(1 - 2\rho_1) + 4\xi_i \xi + 3(1 + \rho_1) \xi^2 - 3(1 - \rho_1) \eta^2] & \frac{-\xi_i}{a} [2(1 - 2\rho_2) + 4\eta_i \eta + 3(1 + \rho_2) \eta^2 - 3(1 - \rho_2) \xi^2] \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (28)$$

单元应变能为弯曲和剪切应变能之和:

$$U_e = \frac{1}{2} \iint_{A_e} (\{\kappa\}^T [D] \{\kappa\} + \{\gamma\}^T [C] \{\gamma\}) dA \quad (29)$$

其中

$$[D] = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \quad [C] = \frac{5Gt}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

t 为板厚, μ 为泊松比, E 和 G 为弹性模量。

单元刚度矩阵为

$$[k]^* = ab \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ([B_b]^T [D] [B_b] + [B_s]^T [C] [B_s]) d\xi d\eta \quad (31)$$

考虑板厚 $t \rightarrow 0$ 的极限情况。此时由式 (17) 得 $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 1$ 。代入式 (24), 得 $[B_s] = [0]$ 。而式 (31) 中的 $[k]^*$ 即退化为薄板矩形单元的刚度矩阵^[8], 不出现剪切自锁现象。

六、数值算例

例题1 简支方板(边长为 l) 在均布荷载 q 和中心集中荷载 P 作用下的计算。

中心挠度 W_c 表示为

$$W_c = \alpha \frac{ql^4}{10Et^3} \quad (\text{均布荷载}) \quad W_c = \beta \frac{Pl^2}{10D} \quad (\text{集中荷载, } D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)})$$

挠度系数 α 和 β 的计算结果如表 1 所示。为了比较, 还给出其他有限元和解析解的结果。

表 1 简支方板的中心挠度系数 α 和 β

厚跨比 t/l	挠度系数 α (均布荷载)				挠度系数 β (集中荷载)			
	曹志远 ^[9]	GC II-R12 (本文)	Pryor ^[2]	Rao ^[3]	GC II-R12 (本文)	Pryor ^[2]	Rao ^[3]	
0.01	0.4439	0.4511 (1.6%)	0.4470 (0.7%)	0.4423 (0.3%)		0.1185	0.1173	0.1170
0.10	0.4666	0.4722 (1.2%)	0.4689 (0.5%)	0.4612 (1.2%)	0.4627 (0.8%)	0.1340	0.1350	0.1353
0.15	0.4954	0.5009 (1.1%)	0.4977 (0.5%)	0.4852 (2.1%)	0.4866 (1.8%)	0.1544	0.1579	0.1551
0.20	0.5358	0.5414 (1%)	0.5381 (0.4%)	0.5186 (3.2%)	0.5201 (2.9%)	0.1833	0.1900	0.1801
0.25	0.5877	0.5937 (1%)	0.5900 (0.4%)	0.5617 (4.4%)	0.5631 (4.2%)	0.2204	0.2313	0.2101
0.30	0.6516	0.6576 (0.9%)	0.6536 (0.3%)			0.2658	0.2817	
网格 (1/4板)		4×4	6×6	6×6	2×2	4×4	6×6	6×6
自由度		75	147	245	108	75	147	245

表 2 固支方板的中心挠度系数 α 和 β

厚跨比 t/l	挠度系数 α (均布荷载)			挠度系数 β (集中荷载)	
	曹志远 ^[9]	GC II-R12 (本文)		GC II-R12 (本文)	
0.01	0.1376	0.1427 (3.7%)	0.1403 (2%)	0.0583	0.0573
0.10	0.1637	0.1673 (2.2%)	0.1654 (1%)	0.0745	0.0757
0.15	0.1963	0.1978 (0.8%)	0.1952 (0.6%)	0.0954	0.0990
0.20	0.2366	0.2396 (1.3%)	0.2375 (0.4%)	0.1246	0.1314
0.25	0.2921	0.2927 (0.2%)	0.2895 (0.9%)	0.1619	0.1730
0.30	0.3536	0.3573 (1%)	0.3545 (0.3%)	0.2075	0.2236
网格 (1/4板)		4×4	6×6	4×4	6×6
自由度		75	147	75	147

表1中括号内的数字为有限元解的相对误差(以文献[9]为参考值)。由表1看出,本文GCⅠ-R12单元以最少的自由度得到最好的精度。

例题2 固支方板在均布荷载 q 和中心集中荷载 P 作用下的计算。

固支方板的中心挠度系数 α 和 β 见表2。

七、结语

继文献[1]提出第Ⅰ类广义协调元之后,本文又提出第Ⅱ类广义协调元,同样显示出广义协调元的良好性能。本文提出的GCⅠ-R12单元是一个自由度很少,厚板薄板都通用,简易实用,收敛可靠和高精度的位移型单元。

广义协调元的要点是引入常内力及低阶内力状态下的广义协调条件(式5)。一方面以修正势能原理为理论基础,因而保证收敛;另一方面又只需采用势能原理的简易形式进行推导,因而作法简便。

当板厚 $t \rightarrow 0$ 时,GCⅠ-R12单元自动退化为薄板单元^[8],不出现剪切自锁现象。

算例表明,与已有的一些有限元模型相比,GCⅠ-R12单元以最少的自由度得到最好的精度。

参 考 文 献

- [1] 龙驭球、辛克贵,广义协调元,土木工程学报,20,(1),1987,1—14.
- [2] C.W. Pryor *et al.*, Finite element bending analysis of Reissner plates, *J. Eng. Mech.*, ASCE, 96, 1970, 967—983.
- [3] G. V. Rao *et al.*, A high precision triangular plate bending element for the analysis of thick plates, *Nuc. Eng. Des.*, 30, 1974, 408—412.
- [4] R. W. Clough, C. A. Felippa, A refined quadrilateral element for analysis of plate bending, *Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. Strnct. Mech.*, WPAFB, 1968, p. 399.
- [5] A. J. Fricker, A Simple method for including shear deformations into a thin plate elements, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 23, 1986, 1355—1366.
- [6] T. J. R. Hughes, R. L. Taylor, W. Kanoknukulchai, A simple and efficient finite element for plate bending, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 11, 1977, 1529—1543.
- [7] E. D. L. Pugh, E. Hinton O. C. Zienkiewicz, A Study of quadrilateral plate bending elements with reduced integration, *Int J. Num. Meth. Eng.*, 12, 1978, 1059—1079.
- [8] R. J. Melosh, Basis for derivation of matrices for the direct Stiffness method, *AIAA J.*, 1, (7), 1963.
- [9] 曹志远、杨昇田,厚板动力学理论及其应用,科学出版社,1983.

岩土-钢筋混凝土非线性有限元分析

吕大川

(葛洲坝水电工程学院)

吴兰成

(北京大学)

〔摘要〕本文介绍了岩土-钢筋混凝土非线性有限元分析方法及 RC-86 程序在土木工程中的应用。

该方法同时考虑了岩土及钢筋混凝土两方面的非线性特性。在 RC-86 程序中有五种非线性单元：弹塑性-裂纹三角形单元、层状节理三角形单元、不抗拉三角形单元、二维界面单元、一维杆单元。

弹塑性-裂纹三角形单元随荷载变化有三个阶段（弹性、单向开裂、双向开裂阶段）和八种状态，因此它适用于结构与地基断裂特性的研究。

其它的单元都是岩土和钢筋混凝土非线性有限元分析中的常用单元。

RC-86 是二维增量型弹塑性程序，已初步应用于大型土木工程的应力与稳定分析。分析内容包括坝内孔口、地下隧洞、地下发电厂、大型预应力混凝土结构、大坝等。计算结果与一些模型试验基本一致。

一、引言

大型土木工程结构分析的困难不仅在于无法进行实体试验，而且还由于常面临岩土及钢筋混凝土两方面的复杂性，所以一般的单一模型试验与有限元方法得不到满意的结果。因此，当前的任务就是发展仿真模型试验技术和编制大型综合性程序。

岩土-钢筋混凝土非线性有限元分析方法及目前的 RC-86 程序就是上述任务的阶段成果。

岩土-钢筋混凝土非线性有限元分析方法不是将岩土及钢筋混凝土两类问题简单的叠加在一起，而是采用一种实用的工程分析方法，紧紧抓住土木工程面临的主要问题，其深度超过一些单一的岩土或钢筋混凝土非线性程序，而对次要的问题，则又在满足工程设计精度要求的前提下，作了某些假定与简化。通过分析，认为不能忽视的特性是：结构与岩体的断裂特性，这种特性的研究要求能追踪裂缝随荷载变化的发展；钢筋与混凝土联合受力所依赖的粘结力的非线性特性；结构与岩石基础间界面、岩石与岩石间界面的传力特性；岩体中各种岩石、构造（断层、节理）的非线性特性；钢筋的作用及特性等。认为对大型工程能够作的一些假定与简化是：在材料分类时，将结构与岩体归纳为四种材料、一种界面。四种材料是：完好的混凝土与岩石，带微裂缝的混凝土与层状节理岩石，双向开裂的破碎混凝土与岩石及土壤，钢筋与锚杆等杆件材料。界面则包括上述各种材料的结合面。这一假定的目的在于减少单元类型；在本构关系分析中略去混凝土材料等受压时的复杂应力-应变关系，而突出其受拉特性；在强度准则选择时略去工程人员难以提供参数的