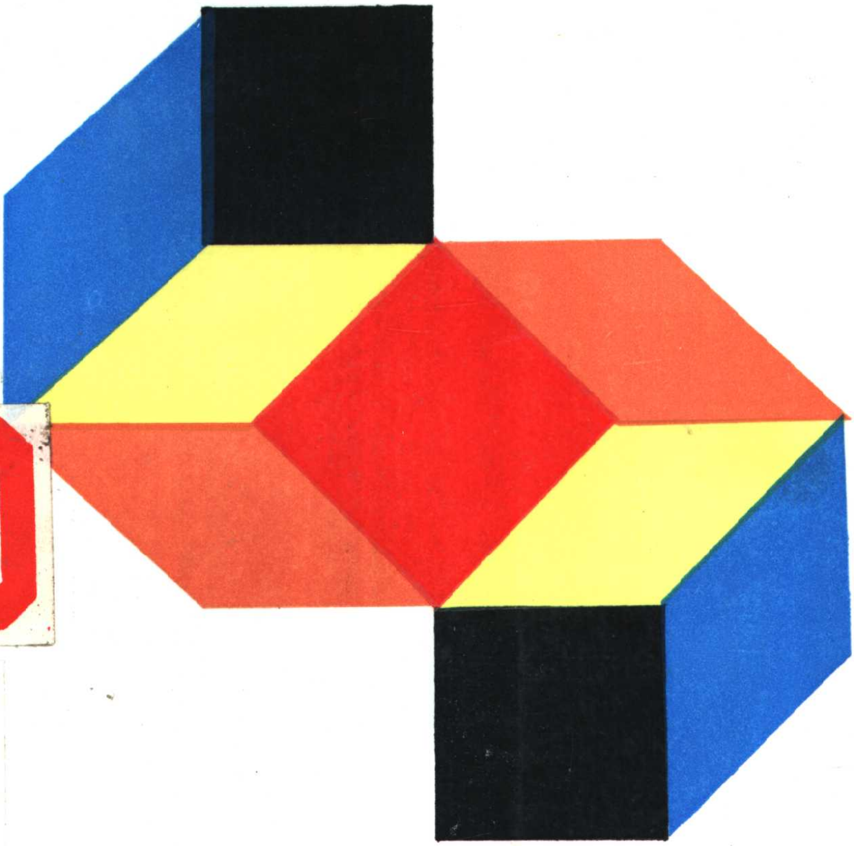
数学小丛书
智慧之花
(3)

乘电梯·翻硬币·游迷宫·下象棋

丁石孙 主编



北京大学出版社

数学小丛书——智慧之花

（3）

乘电梯·翻硬币·游迷宫·下象棋

丁石孙　主编

北京大学出版社

新登字(京)159号

数学小丛书——智慧之花

(3)

乘电梯·翻硬币·游迷宫·下象棋

丁石孙　主编

责任编辑：刘　勇

*

北京大学出版社出版发行

(北京大学校内)

北京大学印刷厂印刷

新华书店经售

*

787×1092毫米　32开本　9.5印张　210千字

1993年6月第一版　1993年6月第一次印刷

印数：0001—4,000册

ISBN 7-301-02085-6/O·314

定价：5.50元

内容提要

本书是北京大学《数学小丛书——智慧之花》的第三本。内容为精选的20个饶有趣味的数学问题。选材生动、有趣，贴近生活，旨在激发中学生和大学生学习数学的兴趣，开拓思想，启迪智慧，使学生得到引人入胜的思维训练。

经常乘电梯的人，等到的电梯是上行的还是下行的可能性是否相同？一摞硬币（正面朝上），按一定规则翻面，直到这摞硬币中的每一个又都是正面朝上为止，共需做多少次翻面？在一个$n\times n$的棋盘中放入n个王，使每行、每列都只有一个，且两两不能相互攻击，有多少种放置方法？怎样按最佳路线游历迷宫？如何用初等数学解决“几何极值问题”？本书对这些并不陌生的问题给出了巧妙、新颖、富有思想、与众不同的回答。为适应数学竞赛学生的需要，本书给出了第32届国际数学奥林匹克竞赛试题与解答。

本书可作为高中学生，中学数学教师和一、二年级大学生的课外读物，对有志参加数学竞赛的学生也有很好的指导意义。本书还可供数学爱好者阅读。

《数学小丛书——智慧之花》编委会

写在前面的话

在一个人所受的基础教育中，数学一直是占着一个特殊地位的，它占用的时间可以说是最多的。也许因为这已是历史上长期以来形成的事实，所以很少有人去作说明，即使有的学生并不喜欢数学，也鼓不起勇气去问个为什么。

数学由于其特殊的形式，给人的印象常常是：一批口诀，一堆公式以及一串定理，但它们在解决生活及其它学科的问题时又是很有用的，于是多数人就硬着头皮按老师教的学下去。这样的理解至多对了一半，因为数学还有另一个方面的重要作用，这就是通过对数学知识的介绍，对数学问题的解决，教会人们一种重要的分析问题，解决问题的思想方法。简单地讲，数学要教会人如何进行逻辑推理，如何进行正确的抽象思维，如何在纷繁的事物中抓住主要的联系，并如何使用明确的概念，等等。

要正确发挥数学课程的教育功能，除去需要教师与学生的积极努力以外，也还需要找到适当的辅助材料和恰当的方法。我们选编这套《数学小丛书——智慧之花》就是为了从这个方面为数学老师（主要是中学的老师）和大学生提供一点帮助，有一部分也可以用作中学生的课外读物。

我们并不认为目前的数学教学大纲的内容太少，太浅，因而要增加或加深教学内容。我们更不想给学生增加习题量以应付考试。恰恰相反，我们认为再向这个方向发展将会造

成极大的危害．通过我们选择的这些小文章，我们希望能帮助读者对数学有更全面的了解，使大家发现数学不只是“定义、定理、公式、证明”的刻板叙述，而是生动活泼、引人入胜的思维训练．在这里，读者可以看到如何对各种各样的问题进行精细的分析，又如何逐步把复杂的问题理出头绪，最后给出清晰的答案．总之，我们希望通过千姿百态的分析与讨论帮助读者了解什么是大家应该从数学学习中学到的思想方法．

我们的目标是这样，但能否达到还有待于实践的检验．读者读过这些书之后的印象与收获将作出评判．我们希望大家多提批评意见，帮助我们不断改进我们的工作．

丁石孙

1989年2月

出版说明

现代数学，这个最令人惊叹的智力创造，已经使人类心灵的眼光越过无限的时间，使人类心灵的手延伸到了无边无际的空间。

——N.M.Butler

数学方法渗透进并支配着一切自然科学的“理论”分支。在现代经验科学中，它已越来越成为衡量成就的主要标准。

——J.von Neumann

参与开发一般智力——不是为了今后某一职业的特定需要，应看成是数学教育的基本目标。

——F.Reidt

别把数学想象得那么困难和艰涩，并认为它排斥常识，数学仅仅是常识的一种微妙的形式。

——L.Kelvin

这些著名学者的话表达了我们出版《数学小丛书——智慧之花》的想法和努力的目标。

本丛书的主要对象是：中学数学教师、数学各专业的低年级大学生、部分高中学生以及数学爱好者。所选内容力求生动、有趣，在开始阶段以翻译为主，一年2—3册。

我们希望本丛书能为活跃与推动中学与大学低年级的数学教学、提高中学教师和大学生的数学素质、更好地沟通中

学数学与大学数学以及普及数学知识，做一点有益的工作。

我们水平有限，希望大家多提意见，为了让我们的小花开放得绚丽多姿而共同努力！

《数学小丛书——智慧之花》编委会

1989年2月

目　录

电梯、火车及地铁①

A.Wuffle

以下3个疑难问题的数学处理是相同的。

问题1 经常乘电梯的人有这样的体会：除非是在楼的底层或顶层，否则你等来的第一部电梯的运行方向差不多总是与你希望去的方向相反(参见[1,p.10—11])。但是，下面的说法似乎也在理：要下去必须先上来，因此，等到的电梯是上行的还是下行的可能性应该是相同的。那么，这两者为什么可能都是对的呢？②

问题2 一个纽约人有两个好朋友，一个住在市中心，另一个住在郊区。他和这两个朋友都很好。因此，当他想去看望他们时，他总是登上在地铁车站赶上的第一列地铁，而不管它是去市中心的还是去郊区的。到两个方向去的地铁班次是一样多的。虽然他无意对这两个好朋友厚此薄彼，但结果是，他去一个朋友处的次数远远超过去另一个朋友处的次数。为什么会这样呢(参见[2])？

问题3([1,p.59—60]) 在美国中西部的一个小镇上住着一位退休的铁路工程师W.Johnson。他工作了大半辈子的

① The pure theory of elevators, *Math. Magazine*, Vol.55, 1 (1982), 30—37.

② 这里说的电梯不是现在的程控电梯，而是旧式电梯。

那条铁路线正好穿过这个小镇。Johnson患有失眠症，经常会在夜里的某一个奇数钟点（但不固定）醒来，且再也不能入睡。后来，他找到了治疗失眠症的好方法。每当醒来后，他就沿着小镇上那条寂静的街道步行，一直走到与铁路的交叉点。他站在那儿，若有所思地看着表，一直等到有一列火车开来。火车的吼叫声撕破了宁静的夜空，这一情景使这位老铁路心境舒畅。然后他走回家，很快就能入睡。

过了一段时间后，他意外地发现，他所看到的火车大部分是往东开的，只有很少几列是西行的。这位工程师清楚地知道，这条干线上东行火车与西行火车的次数是一样多的，而且它们的交错也很有规律。开始时，他以为一定是自己记错了。于是备了一个小本子，根据他所看到的第一列火车开去的方向，在本子上分别写上“东”或“西”。过了一周，他发现共记了5个“东”且只有2个“西”。接下来的一个星期的记录也几乎如此。他想，是不是因为自己差不多总是在夜间的同一个钟点醒来，因而总是赶上一列东行的火车呢？

被这一情景所困扰，他决定对问题作一个统计研究，并决定白天也进行观察。为客观计，他请一位朋友替他拟了一个长长的随机时刻表，诸如上午9:35，中午12点，下午3:07等等。他按这些钟点准时赶到铁路交叉处，记下看到的第一列火车的运行方向。出乎意料，记录的结果与原先的差不多：在100列火车中，有75列是往东的，只有25列是朝西开的。失望之余，他打电话给附近的大城市的火车站，询问是否有些西行火车已改线了。但回答说“不是”。这一奇怪现象使这位老铁路如此沮丧以致完全失眠，日渐虚弱。

我们先解决第 1 个疑难问题。设一幢大楼有N层且有r部电梯。为简单计，先考虑特殊情形$r=1$。在任意一个时刻，电梯处在$2(N-1)$种状态中的某一种状态，记这些状态分别为$1\uparrow, 2\uparrow, 2\downarrow, 3\uparrow, 3\downarrow, \cdots, (N-1)\uparrow, (N-1)\downarrow, N\downarrow$，其中的箭头表示电梯停在第$i$层之后接下来的运行方向。当然，在顶层和底层，电梯只有一个方向。假设电梯在每两层楼间运行的时间为t，还假设它在每层楼的固定的停留时间也包括在t内(实际上，为简便计，一般将其忽略)。考虑一个高峰时期，假定电梯在每层楼上都要停。如果你正在第k层楼上等电梯，那么你等来的第一部电梯恰好是上行电梯的概率有多大呢？记之为$P(k\uparrow)$。对于$1<k<N$，等来的电梯是上行的，如果它正处在状态$1\uparrow, 2\uparrow, \cdots, (k-1)\uparrow$之一，或处在状态$2\downarrow, 3\downarrow, \cdots, k\downarrow$之一中。这种状况共有$(k-1)+(k-1)=2k-2$种。不妨假定，所有$2N-2$种状态都是等可能的。因此，当$1<k<N$时有

$$P(k\uparrow)=\frac{2(k-1)}{2(N-1)}=\frac{k-1}{N-1} \tag{1}$$

及

$$P(k\downarrow)=\frac{N-k}{N-1}=1-P(k\uparrow). \tag{2}$$

毫无疑问，$P(1\uparrow)=1$，$P(N\downarrow)=1$。因此，举例说来，如果你在加利福尼亚大学社会科学塔 Irvine 的二层楼上（该塔共有 7 层），当该塔两部电梯中的一部出故障时(这是经常发生的)，你等来的电梯恰好是上行的概率是$\frac{2-1}{7-1}=\frac{1}{6}$。

现在，考虑另一个不同的问题，当然仍与原问题有关。如果你在第k层楼上，则平均需要花多少时间，才能等到第

一部上行电梯呢？考虑下面的一连串状态

$$k\uparrow, (k+1)\uparrow, (k+2)\uparrow, \cdots, (N-1)\uparrow, N\downarrow, (N-1)\downarrow,$$
$$(N-2)\downarrow, (N-3)\downarrow, \cdots, 1\uparrow, 2\uparrow, 3\uparrow, \cdots, (k-1)\uparrow.$$

当然，一共是 $2(N-2)$ 种状态。如果我们是在第 k 层楼上，如果电梯正处在上述状态链中的第一个状态，即 $k\uparrow$，那么我们等到第一部上行电梯的时间或者是 0（正好赶上），或者是 $2(N-2)t$（恰好错过）。不妨设为 $(2N-2)t$；如果电梯正处在第 2 种状态(即 $(k+1)\uparrow$)，则等到上行电梯的时间是 $(2N-3)t$；如果电梯正处在第 j 种状态，则等待的时间是 $(2N-j-1)t$。因此，若假定只有一部电梯，则在第 $k(1<k<N)$ 层上的人，等到一部上行电梯的时间平均值 T_1 由公式

$$T_1 = \sum_{j=1}^{2N-2} \frac{2N-j-1}{2N-2} t \tag{3}$$

给出。由对称性，(3)式可写成

$$T_1 = t \sum_{j=1}^{2N-2} \frac{j}{2N-2}. \tag{4}$$

由熟知的等式 $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$，(4)式可写成

$$T_1 = \frac{(2N-1)(2N-2)t}{2(2N-2)} = \frac{2N-1}{2} t. \tag{5}$$

由上式显然可以看到，不管我们在哪一层上（除了顶层和底层以外），等到一部上行电梯的(平均)时间是常数.同样显然的是，除了在顶层和底层以外，等到一部下行电梯的(平均)时间与等到一部上行电梯的(平均)时间相同。但是，正如前面已经证明的那样，等到的第一部电梯是上行电梯的概率与

在哪一层有关，也与楼共有多少层有关，见(1)和(2).(如果假定你总能及时赶上一部停在你所在楼层的电梯，但不一定开往你想去的方向，则 T_1 应为

$$T_1=\frac{2N-3}{2}t.$$

另外，还可将某些概率考虑进去，例如，错过停在你所在的楼层上且又是你要乘的方向的电梯的概率，进而修改上述公式。但是，本文将不讨论这种复杂情形.)

现在分析第2个疑难问题。类似于上面的讨论可找到问题的症结。假设地铁每小时一班。去市中心的地铁在每小时的第50分到达，而去郊区的地铁正钟点到达。于是很容易看到，这位纽约人去市中心的次数将是去郊区次数的几乎5倍。因为只有在去市中心的地铁刚开走，而去郊区的地铁还未到达的10分钟里他到达车站，才能乘车到郊区去（显然，如果去市中心的地铁在每小时的第30分到达，则他去市中心和郊区的次数会差不多)。另外，无论是去市中心还是去郊区，他等车时间的期望值都是半小时。

第3个疑难问题本质上与第2个疑难问题相同。假定火车按固定的时刻表(不妨设每12小时一趟)分别从2个终点站开出。那个中西部小镇离开西面的火车终点站(洛杉矶)与离开东面的火车站(芝加哥)的距离不等，使得那个老铁路看到的第一列火车是东行的次数远远超过西行的火车。

这3个疑难问题解决后，我们继续来研究一下电梯及等电梯的人。这部分讨论可以看作是对所谓“电梯疯狂”现象的研究，这一名词是由那些总是等不上想去方向的电梯的人创造的。

设 $P_k(U)$ 是一个在第 k 层上的人能乘上一部上行电梯的条件概率，$P_k(D)$ 表示他能乘上一部下行电梯的条件概率。首先假定，除了高峰时间外，大楼的每一层对电梯的需求是相同的，即

$$P_k(U)=\frac{N-k}{N-1}$$

及

$$P_k(D)=\frac{k-1}{N-1}.$$

这种假定对于独家公司占有的大楼并不是不合理的。

对某个在第 k 层上想乘电梯的人，定义失望指标 f_k 为等来的第一部电梯的方向正好与他的愿望相反的概率。当 $0<k<N$ 时有（仍假设只有一部电梯）

$$\begin{aligned} f_k &= P_k(U)P(k\downarrow)+P_k(D)P(k\uparrow) \\ &= \left(\frac{N-k}{N-1}\right)\left(\frac{N-k}{N-1}\right)+\left(\frac{k-1}{N-1}\right)\left(\frac{k-1}{N-1}\right), \end{aligned} \tag{6}$$

$$1<k<N.$$

化简后得

$$f_k=1-\frac{2(N-k)(k-1)}{(N-1)^2}. \tag{7}$$

由(7)式显然可得

$$f_k=f_{N-k+1}.$$

当 $k>N/2$ 时，有 $(N-k)(k-1)>(N-k-1)k$。因此由（7）式容易看到，若 N 是奇数，则当 $k=(N+1)/2$ 时，f_k 取最小值。事实上，在只有一部电梯的大楼里，你若越靠近顶层或底层（除了在顶层或底层外），则你受到"电梯疯狂"现