壳体結构文汇

第一册

壳体結构文汇編輯組

建筑工程出版社

壳体結構文汇

第一册

壳体結構文汇編輯組

建筑工程出版社出版
·1959·

內容提要

本文彙的目的在及时地介紹一些国外（包括苏联、人民民主国家和一些資本主义国家）比較重要的壳体結構新發展的文献資料，涉及范圍主要是与土木建筑有关的部分，也可能旁及其他方面。今后打算長期分冊彙編出版。

本冊內容有：壳体結構理論分析中統一符号的初步建議，应用变分法来解边界問題，彈性壳体平衡的数学理論，德国"圓柱形壳体"一書的摘要介紹和补充說明，穹隆型矩形壳体的成形和計算研究共五篇。

讀者对象主要系土木結構工程师和科学研究工作者。

壳体結構文汇編輯組：張有齡（組長）

張維　張秋波

薛振东　龙馭球

壳体結构文汇

壳体結构文匯編輯組

編輯：黎鏜　設計：徐毓茹

1959年1月第1版　1959年1月第1次印刷　2,000冊

850×1168・$^{1}/_{32}$・161千字・印張 6$^{13}/_{16}$・定价(10)1.15元

成都印制厂印刷・新华書店發行・書号：1004

建筑工程出版社出版（北京市西郊百万庄）

（北京市書刊出版業营業許可証出字第052号）

目　录

序　言

壳体結構是近三十余年来得到巨大發展的一种結構形式。它符合航空工程、土木工程、机械工程等各方面对于自重輕、跨度大、省材料的結構物所提出的要求。二次世界大战以后壳体結構的应用范圍更加扩大。在苏联、人民民主国家和許多資本主义国家中，壳体理論、壳体結構的構造，以及壳体的施工方法近年来都不断地有新的創造。壳体結構在我国应用的历史虽然还很短，但从过去的几年来看，工程师們已开始注意这种結構，并对有些設計順利地采用了这种优越的結構形式。我国社会主义建設第一个五年計划已胜利地超額完成。可以預料，在規模比第一个五年計划更加宏偉的第二个五年計划中，广泛地推广各种壳体結構，將給我們的經济建設帶来很大的好处，节省不少資金。这正是中国共产党第八次代表大会向基本建設所提出的要求。

本文彙的刊行，就是要配合国家建設委員会和科学工作委員会关于科学研究計划中的壳体結構这一中心問題，及时地向工程技术人員介紹一些国外比較重要的有关壳体結構新發展的文献資料。由于篇幅和人力所限，我們不准备將原文全部翻譯，而是由执笔人摘要介紹，并且采取不定期的出版形式。涉及的范圍主要是与土木建筑有关的壳体文献，一部分旁及其它資料。文献的来源將包括苏联、人民民主国家以及一些資本主义国家的杂誌和出版物。

本文彙在籌备期間，得到国家建設委員会科学工作局的大力支持，因此我們应当在这里向他們表示謝忱。編輯的工作是由張有龄、張秋波、薛振东、龙馭球四位先生担任。

我們希望并且相信这个文彙出版后能得到全体工程界同志的支持和批評。

清华大学　張　維

对壳体結構理論分析中統一符号的初步建議

張有齡

本文彙系針对壳体結構研究方面所需要的資料介紹与交流，并打算今后長期地分册彙編出版。但这門技术的范圍很广，各国的成就有所不同，也沿不同方向在进展中，因此符号的統一应用，就形成这个文彙的一个迫切需要。全盤的符号太多，不可能一次罗列齐全。現在这里初步建議由笛卡兒座标开其端，以后逐漸將其他数学方法如張量、矢量、矩陣等符号补充起来，使我国在这門学术写作上及研讀上有一定的公众認識，应当是件有益的事情。

壳体类型方面，也是本着由簡而繁的步驟进行討論的。

为了配合通用的彈性力学符号，建議 x,y,z 三軸成立循环的位置。为了与板的变位相适应，建議 z 軸向下，因而使 x,y,z 軸的循环逆时針方向。对單位矢量言，也就采用了 $\underline{i}$，$\underline{j}$，$\underline{k}$ 的符号。

面的垂直綫建議采用 N，而不用 ν，因为后者用来表示柏松比，而 N 对英文的 normal 更易領会。此处用大 N 不用小 n 是为了保留作为三个方向余弦:

$\cos N_x = l$，$\cos N_y = m$，$\cos N_z = n$ 之用。

圖 1 示軸对称荷載的壳，子午圈量自一个固定竪面的水平角应为 φ，而由竪軸量起的角定为 θ，因此在子午圈剖面圖中，用到的角常是 θ，而非 φ。配合这角的边界値尽量采用 α、ψ 等符号。

应力符号采用

$$\left.\begin{aligned} &N_{xx} = N_x, \\ &N_{yy} = N_y, \\ &S = N_{xy} = N_{yx}, \quad A = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

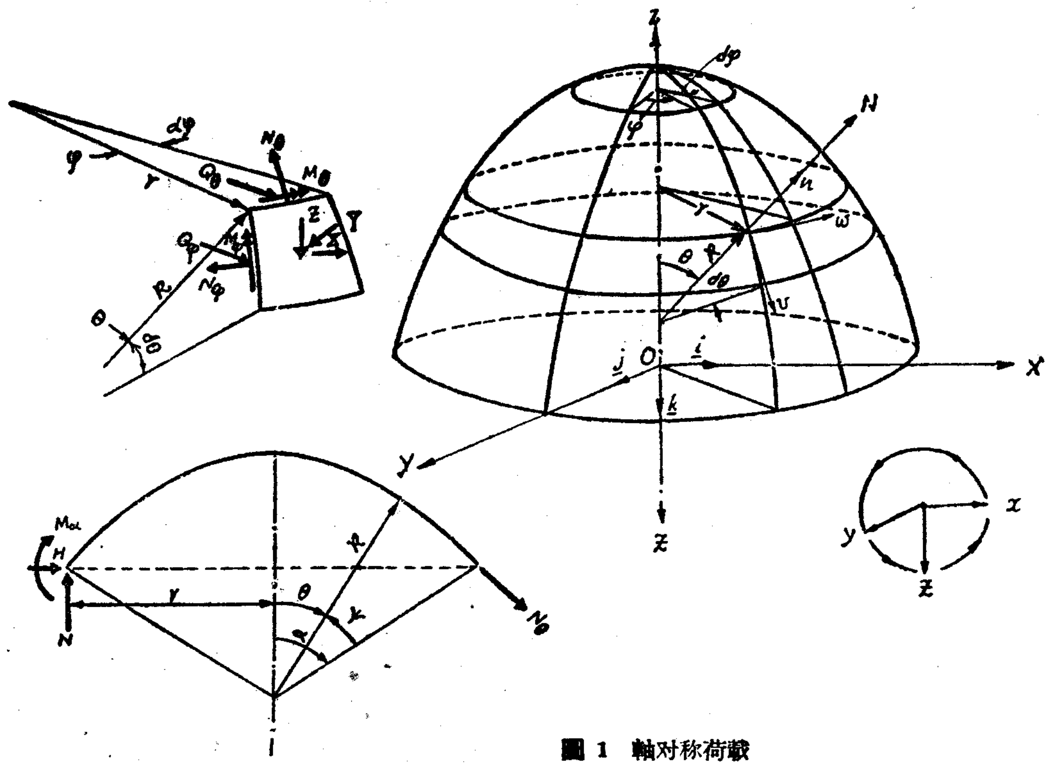


圖 1　軸对称荷載

都是根据下式的原则

$$N_{\text{位置，方向}}。$$

剪应力必需表示出位置和方向，所以必需用双字。而垂应力的位置与方向是用同一字母来表示的，因而簡写一个字母就够了，并且可以借此来区别垂应力和剪应力。横剪力用 Q。

弯矩符号同上。

$$\left.\begin{aligned} &M_{xx}=M_x, \\ &M_{\varphi\varphi}=M_\varphi, \\ &H=M_{x\varphi}=M_{\varphi x}, \quad D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu)}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

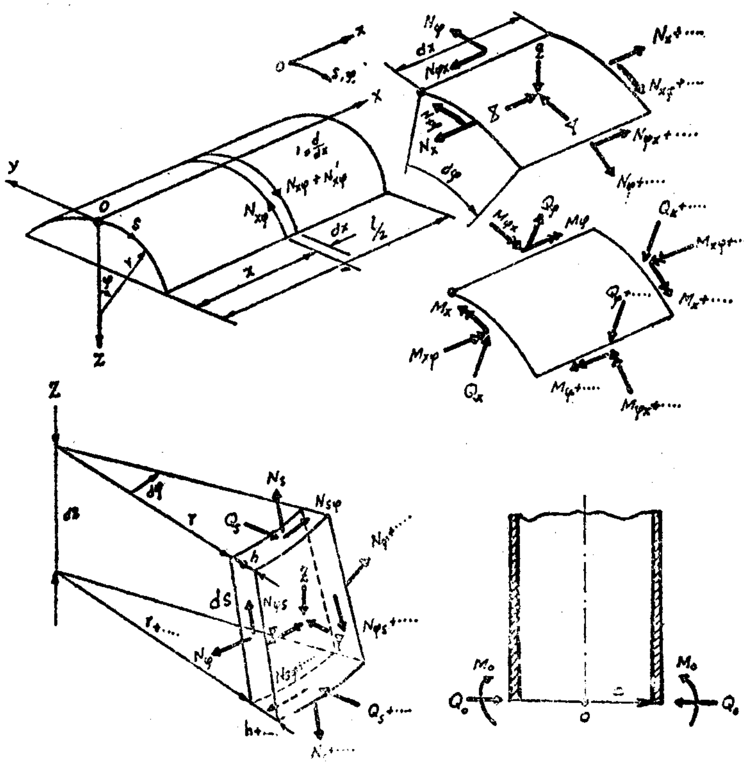
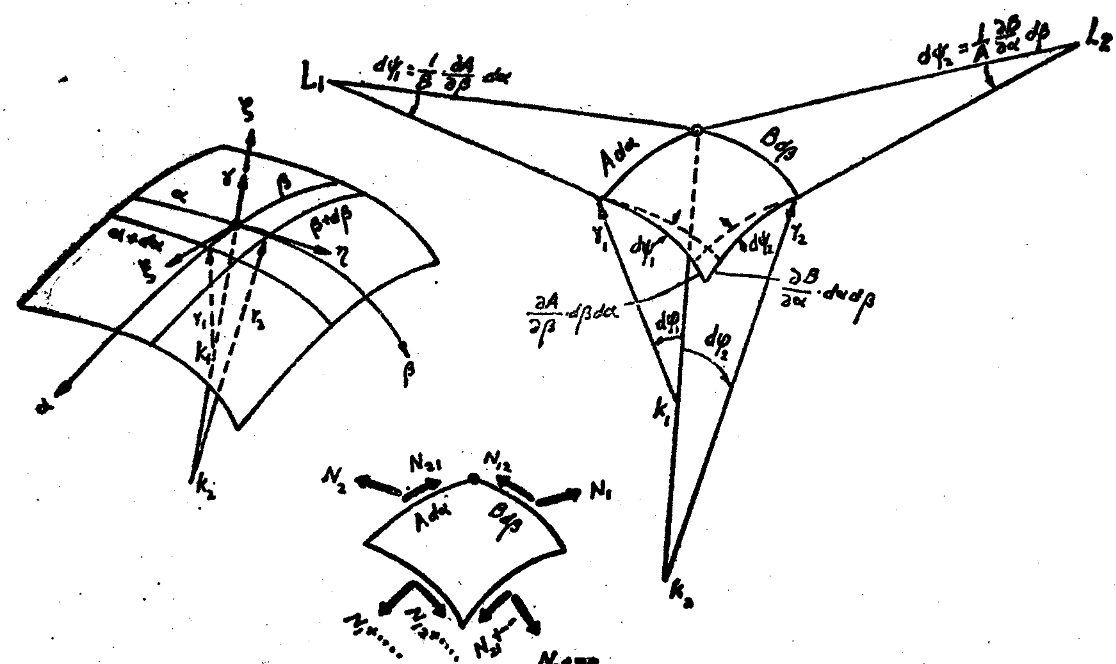


图 2 柱形壳



L1
$d\psi_1 = \frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta} d\alpha$
L2
$d\psi_2 = \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha} d\beta$
$A d\alpha$
$B d\beta$
$\frac{\partial A}{\partial \beta} \cdot d\beta d\alpha$
$\frac{\partial B}{\partial \alpha} \cdot d\alpha d\beta$
$d\varphi_1$
$d\varphi_2$
K_1
K_2
α
β
$\alpha + d\alpha$
$\beta + d\beta$
ξ
η
ζ
N_1
N_2
N_{12}
N_{21}

圖 3 曲綫座标

其中 $M_{x\varphi}=M_{\varphi x}$ 是指的扭矩，在圖中用双箭头矢量表示。

圖 2 示柱形壳的建議符号。

微分符号

$$' = \frac{d}{dx}, \qquad \cdot = \frac{d}{Rd\varphi},$$

边界数值常用右脚下的小圓圈来表示，如圖中的

$$Q_0、M_0 \cdots\cdots。$$

曲綫座标用 α、β、γ，相当的变位是 ξ、η、ζ，曲度半徑用 R（平面問題用 r），曲度用 $k=\frac{1}{R}$，曲率則用 $\varkappa$，如圖 3，壳厚用 h。其中 $A=A(\alpha,\beta)$，$B=B(\alpha,\beta)$ 是壳中和面形的二次系数。

薄壁結構常可簡化为平面問題，因此它的分析法逐漸引用到壳体及鋼結構的計算中。建議把苏、德的符号統一起来，采用的平面是 xy 面，因此与紙垂直的是 z 軸，慣矩一律采用苏、德符号 J。

薄壳符号应与薄板符号相互統一，如圖 4 中所示扁壳，建議均可采用苏联符号。如采用曲綫座标时

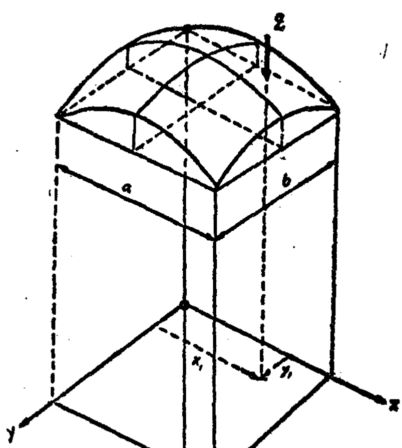


圖 4 扁壳

$$Q_1=D\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\varkappa_1+\varkappa_2), \qquad Q_2=D\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}(\varkappa_1+\varkappa_2)$$

$$ds^2=A^2d\alpha^2+B^2d\beta^2, \quad -(\varkappa_2+\varkappa_2)=\nabla^2 w$$

其中拉普拉斯算符是

$$\nabla^2=\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right], \tag{3}$$

故 $$Q_1=-D\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\cdot\nabla^2 w,\ Q_2=-D\frac{1}{B}\cdot\frac{\partial}{\partial\beta}\cdot\nabla^2 w \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{又}\quad (K_1N_1+K_2N_2)+D\nabla^4 w-z=0,\\&\text{其中}\quad K_1N_1+K_2N_2=\nabla_K^2\varphi,\\&\nabla_K^2=\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}K_2\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{B}K_1\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right]。\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

又 $$\theta=\varepsilon_1+\varepsilon_2=\frac{1-\nu}{Eh}(N_1+N_2)=\frac{1-\nu}{Eh}\nabla^2\varphi$$

$$\nabla^2\theta-(1-\nu)\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}K\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{B}K\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right]=0$$

即可簡化为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{Eh}\nabla^4\varphi-D_K^2 w=0,\\&\nabla_K^2\varphi+D\nabla^4 w-z=0,\\&\text{其中对变曲率面}\\&\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2},\quad \nabla_K^2=\frac{\partial}{\partial\alpha}K_2\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}K_1\frac{\partial}{\partial\beta},\\&\text{对恆曲率面}\quad \nabla_K^2=K_2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+K_1\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}。\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

以卡門符号为准，我們有以下的形变、角变公式：

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_1=\frac{\partial u}{\partial\alpha}+K_1 w+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)^2,\\&\varepsilon_2=\frac{\partial \nu}{\partial\beta}+K_2 w+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)^2,\\&\gamma_{12}=\frac{\partial u}{\partial\beta}+\frac{\partial \nu}{\partial\alpha}-2tw+\frac{\partial w}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial w}{\partial\beta}。\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

其中 $$K_1=\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2},\quad K_2=\frac{\partial^2 F}{\partial\beta^2},$$

$$t=\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial\beta},\quad F=F(\alpha,\beta).$$

因而可以得出幷协方程

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial \beta^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial \alpha^2}-\frac{\partial \gamma_{12}}{\partial \alpha \partial \beta}-K_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}-K_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}-$$

$$-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}\right)^2=0$$

$$\varepsilon_1=\frac{1}{Eh}(N_1-\nu N_2), \quad \varepsilon_2=\frac{1}{Eh}(N_2-\nu N_1), \quad \gamma_{12}=$$

$$=\frac{2(H\nu)}{Eh} N_{12},$$

$$\frac{\partial^2 N_{12}}{\partial \alpha \partial \beta}=-\frac{\partial^2 N_1}{\partial \alpha^2}=-\frac{\partial^2 N_2}{\partial \beta^2}$$

故 $$\frac{1}{Eh} \nabla^4 \varphi-K_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}-K_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}\right)^2=0 \tag{8}$$

以 N_1^0，N_2^0，N_{12}^0 为薄膜应力

$$Z=N_1^0 \varkappa_1+N_2^0 \varkappa_2+2 N_{12}^0 \varkappa_{12}=N_1^0 \frac{\partial^2 w}{\partial^2 \alpha}+N_2^0 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}+2 N_{12}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta},$$

乃得

$$\left.\begin{aligned}
&\left(K_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}+K_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2}\right)=D L(\varphi, w) \nabla^2 w+Z, \\
&\text{其中 } L(\varphi, w)=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}-2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} \cdot \\
&\qquad \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}。
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

符拉索夫的写法为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{Eh} \nabla^2 \varphi+K_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2}+K_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}-2t \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}+\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \cdot \\
&\qquad \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}\right)^2=0, \\
&D \nabla^4 w-K_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2}-K_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}+2t \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta}-L(\varphi, w)-Z=0。
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

当圆柱形壳：$K_1=0$，$K_2=\frac{1}{r}$，

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{Eh}\nabla^4\varphi - r\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}=0,\\&r\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}+D\nabla^4 w - r^4 Z=0。\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

另取　$w=\nabla^4\Phi,\ \varphi=rEh\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2},$

则　$\nabla^8\Phi+\dfrac{1-\nu^2}{C^2}\cdot\dfrac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^4}-\dfrac{r^4}{D}Z=0,\quad C^2=\dfrac{h^2}{12r^2}$　(12)

从而得到

$$\left.\begin{aligned}&N_1=\frac{Eh}{r}\cdot\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^2\partial\beta^2},\\&N_2=\frac{Eh}{r}\cdot\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^4},\\&N_{12}=-\frac{Eh}{r}\cdot\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^3\partial\beta},\\&M_1=\frac{D}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\nu\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)\nabla^4\Phi,\\&M_2=\frac{D}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+\nu\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\right)\nabla^4\Phi,\\&M_{12}=-\frac{D(1-\nu)}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\cdot\nabla^4\Phi,\\&Q_1^*=-\frac{D}{r^3}\left[\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3}{\partial\alpha\partial\beta^2}\right]\nabla^4\Phi,\\&Q_2^*=-\frac{D}{r^3}\left[\frac{\partial^3}{\partial\beta^3}+(2-\nu)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2\partial\beta}\right]\nabla^4\Phi。\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

其中 Q^* 是包括扭矩影响的横剪力。

如果是板，就形成

$$\left.\begin{aligned}&\frac{D}{h}\cdot\nabla^4 w=L(w,\Phi)+\frac{q}{h},\\&\frac{1}{E}\nabla^4\Phi=-\frac{1}{2}L(w,\Phi),\\&\text{其中 } L(w,\Phi)=\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-2\frac{\partial w^2}{\partial x\partial y}\cdot\\&\qquad\cdot\frac{\partial\Phi^2}{\partial x\partial y}。\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

如不考虑大撓度問題，即板具有一定的勁度，而不受縱力影响

$$\left.\begin{aligned}&\Phi=0,\\&D\nabla^4 w=q,\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

就是熟知的薄板平衡方程。

高斯曲率建議用 $\Gamma=\varkappa_1\varkappa_2$

能量符号用:

U——总能量

V——应变功能

W——外力功能

π——位能

T——动能

有关的拉格郎茫力学方程是:

$$\int_{t_0}^{t_1}(\pi-T)dt=\int_{t_0}^{t_1}(V-W-T)dt=-\int_{t_0}^{t_1}Ldt=\text{最小。} \quad (16)$$

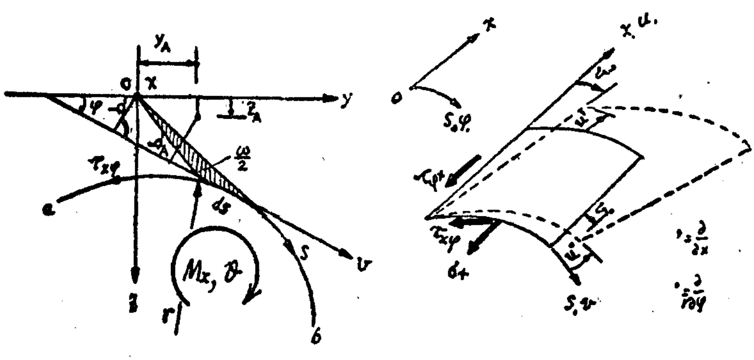


圖 5 薄壳的平面問題

圖 5 示薄壳的平面問題，这里与苏、德所采用的符号稍有出入，因为我們已經取 x 为柱形壳的縱軸，故剖切平面应在 yz 面內，同时用 v 表示切向的变位，也符合 y 軸的标准。应当說明：S、θ 与 M_x 均以順时針向为正；$\tau_{x\varphi}$ 是与变位平衡的反力，因此

它是逆时針向的。

以 ω 定名为扭曲，如上建議列表如下，其中与受弯符号併列，使讀者随时想到共軛梁的意义，而兩者都是以 x 軸为縱軸的，故 $' = \frac{\partial}{\partial x}$。这样来做就有可能不發生符号的冲突。

受弯符号、公式及边界条件		單　位	受扭符号、公式及边界条件		單　位
弯矩荷載	q_y	kg/m	扭矩荷載	m_x	kg/m
剪力	Q_y	kg	扭矩	M_x'	kgm
弯曲力矩	M_y	kgm	扭曲力矩	M_ω	kgm^2
弯曲慣矩	J_y	m^4	扭曲慣矩	J_ω	m^6
弯曲勁度	EJ_y	kgm^2	扭曲勁度	EJ_ω	kgm^4
中和軸的距離	y	m	扭曲	ω	m^2
截面一次力矩	S_y	m^3	扇面一次力矩	S_ω	m^4
位移	η	m	轉角	θ	
角变	η'		扭率	θ'	m^{-1}

$$Q_y = -M_y' \qquad ' = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$q_y = Q_y' = -M_y''$$

$$M_y = -EJ_y\eta''$$

$$\sigma_y = \frac{M_y}{J_y} \cdot y\partial y$$

$$\tau_{y\varphi} = \frac{Q_y}{J_y} \cdot S_y$$

$$M_x = -M_\omega' \qquad ' = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$m_x = M_x' = -M_\omega''$$

$$M_\omega = -EJ_\omega\theta''$$

$$\sigma_x = \frac{M_\omega}{J_\omega} \cdot \omega\partial x$$

$$\tau_{x\varphi} = \frac{M_z}{J_\omega} \cdot S_\omega$$

$Q_y = M_y = 0$	自　由	$M_x = M_\omega = 0$
$M_y = \eta = 0$	簡　支	$M_\omega = \theta = 0$
$\eta = \eta' = 0$	固　定	$\theta = \theta' = 0$

最后把巳应用符号的意义罗列如次:

N_x、N_y——軸向力

$S = N_{xy} = N_{yx}$——剪力

M_x、M_y——弯矩

$H = M_{xy} = -M_{yx}$——扭矩

Q——横剪力

ν——柏松比

$A = \dfrac{Eh}{1-\nu^2}$——板壳强度

$D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$——板壳劲度

$X、Y、Z$——相当于 $x、y、z$ 軸向的荷載

$\underline{i}、\underline{j}、\underline{k}$——單位矢量相当于 $x、y、z$ 軸向的分量

$\alpha、\beta、\gamma$——曲綫座标

$\xi、\eta、\zeta$——相当于 $\alpha、\beta、\gamma$ 軸向的位移

N——垂直綫方向

$\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial\beta^2}$——拉普拉斯算符

$\Delta = \dfrac{1-\nu}{Eh}\nabla^2\varphi$——平面問題中的应变和

$w = \nabla^4\Phi$——竪位移

$L(\varphi, w) = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2}\cdot\dfrac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} - 2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta}\dfrac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}\cdot\dfrac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}$——$\varphi, w$ 二阶乘积算符

$\varepsilon_x、\varepsilon_y$——軸向应变

γ_{xy}——剪应变

$k_x、k_y$——弯曲度

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_x &= \frac{1}{r_x'} - \frac{1}{r_x} \\ \varkappa_y &= \frac{1}{r_y'} - \frac{1}{r_y} \end{aligned}\right\}\text{弯曲率}$$

k_{xy}——扭曲度

$\varkappa_{xy} = \dfrac{1}{r_{xy}'} - \dfrac{1}{r_{xy}}$——扭曲率

$\Gamma = \varkappa_1, \varkappa_2$——高斯曲率

r——曲率半徑

a——圓半徑

h——壳厚

$c^2=\dfrac{h^2}{12r^2}$——無維壳常数

u、v、w——相当于 x、y、z 軸向的位移

θ、α——由 z 軸量起的子午圈內角

ψ——由支点量起的子午圈內角

U——总位能

V——应变功能

W——外力功能

π——位能

T——动能