塑性

A. A. 伊留申 著

建筑工程出版社

塑　性

王振常 譯

建筑工程出版社出版

·1958·

內容提要 本書闡明弹塑性变形的基本定律、小彈塑性变形理論的基本方程式、塑性理論的最簡单問題、平板和壳体的平衡和稳定性、衝体的压入和不可压縮塑性物体的承重能力，以及塑性的动力問題。

本書可供工程师、科学工作者及研究生参考之用。

原本說明

書　名	ПЛАСТИЧНОСТЬ
著　者	А. А. Ильюшин
出版者	Государственное издательство технико-теоретической литературы
出版地点及年份	Москва-1948

塑　　性

王振常　譯

*

建筑工程出版社出版（北京市阜成門外大街）

（北京市書刊出版業營業許可証出字第052號）

公私合营西四印刷厂印刷·新華書店發行

書號 770　200千字　850×1168 1/32　印張 13 1/8

1956年9月第1版　1956年9月第1次印刷

印數：(平)1—2,060册 (精)1—1,220册　定價 (10) (平)2.00元 (精)2.40元

目　錄

序　　言

本書闡明塑性变形力学三个部分中的一个——弹塑性变形理論。金屬在彈性极限以外的三个基本力学特性：应力与变形之間关系的非綫性、在变形过程中的硬化和加荷与卸荷定律的区别——在这个理論中得到了反映。

在其中幷不考虑时間在金屬的力学特性上的影响、蠕变、松弛、疲劳、强度与速度的关系和在高速度、高压力下的流动；它們組成塑性理論的两个另外独立的部分，但是，与第一部分紧密地联系。

将要讀这本書的工程师有权要求提出幷且解决問題，或最低限度有根据地解釋当物体塑性变形时，可以用金屬的上述三个特性說明的所有那些力学现象。

理論家有权期望在数学上严格地和明晰地提出塑性理論問題，幷且証明在其中所采取定律的实驗根据。

著者在塑性理論现时的情况下尽可能力求滿足上述的要求。同时，他是根据自己的研究，这显然允許把很多零星的理論表现在統一的塑性理論中。

著者对于莫斯科大学材料試驗室同事Ю.А.茨僦巴克和И.М.丘梟掘依在选擇和編排材料时的帮助表示感謝；他也感謝О.К.伊留申的关怀和同情。

A.A.伊留申

第一章　彈塑性变形的基本定律

第一节　前　言

固体在作用于其上的外力影响下改变形状，并且在取消外力后获得固定的或暂时的残余(塑性)变形的能力称为塑性。塑性变形的基本特性就是，在物体中所产生的应力和变形之間不存在互相单值的关系，即按已知应力不能求得变形，反之，按已知变形也不能求得应力。

不应認为只是某些特殊材料并且只是在充分大的变形时才具有塑性的特性；一切实际的固体在任何变形时都或多或少地具有这些特性。当然，在某些条件下，可以忽略物体的塑性，像在弹性理論中所作的那样。

将处于一定条件下的实际物体理想化，就是只保留其基本力学特性而忽略次要力学特性，向来是力学进步的基础；只要回忆在动力学中的絕对刚体、在空气-流体动力学中的理想液体和气体、在建筑力学中的理想弹性物体等等的作用就够了。但是根据这些理論的計算和結論，只要不超出理想化可能性成立的經驗范围以外，将是正确的。例如，設有鋼梁，弹性极限等于2000公斤/公分^2，放在二支座上而处于荷重1公吨的作用下，該荷重在梁中引起最大弯曲应力1000公斤/公分^2，而使其下垂1公厘。通常認为，用弹性理論或材料力学的方法計算这样的梁，无論对最大应力或者对挠度值，都得到足够精确的結果(誤差可能只是百分之几)。但是在荷重作用后，經过1年、5年和30年后，梁的挠度和应力将怎样呢？弹性理論給出不变的回答：1公厘和1000公斤/公分^2。但是从簡单的推論已經很明显，經过几年后，挠度将比原来的大若干倍，而最大应力将減少百分之十。此处发生了理論与經驗的分歧，

因为虎克定律所并未估計到的非常微小的塑性变形，随着时間不断增长而完全改变了梁軸原始的弯曲形状，并且也改变了横截面中的应力分布。从塑性理論观点看来，应力和变形随时間过程这样的重新分布是后效和松弛的結果。这些屬性特别强烈地表現在当高温时的材料中；它們有一个总的名称：蠕变。用杜嘉米尔-紐曼的热弹性方程式說明的物体的初始弹性状态，由于蠕变，在很短的时間間隔內已在本質上改变了，因而实际上对工程师很少趣味。

我們曾举过例子，当塑性变形非常小而未被虎克定律所考慮时，由于荷重作用的延續，使物体的应力状态发生非常重要的变化。可以举出，由于随时間变化的荷重的大量周期循环，物体应力状态的变化以至于破坏，在結果上相类似的例子。这样的塑性特性现象称为疲劳。与內摩擦力有关的或与滯后现象有关的物体自由弹性振动的消灭，也是虎克定律不精确和材料的塑性特性表现的結果。但是在荷重作用的一般时間延續下，一般变形速度下，一般振动循环次数下和正常温度下[1]，固体可以足够精确地認为是弹性的，直到在其中所产生的应力和变形不超过一定的数値时为止。在应力和变形高于这些极限的区域中，固体即有或大或小的塑性变形；可以从加荷、或者采用純力学作用（压力）、或者采用加热，来达到相当大的塑性变形。因此应当与其說弹性或塑性物体，不如說固体的弹性或塑性状态。这些概念与通用的不同，例如，与以上引入的塑性定义不同，这些概念是完全确定的而且严格的。

当物体在每一种温度下，应力与变形之間，与时間无关地，存在着互相单值关系时，这样的状态称为固体的弹性状态。这个关系通常是綫性的而且是用虎克定律表示的。

当在已給温度下，应力和变形之間的联系在每一已給瞬时內成为互相单值时，则这样的固体状态称为塑性的，假設其全部（或者至少是一个）以前发生的应力和变形状态以及相当的温度值是已知；否则这个联系是不确定的。

---

[1] 所有這些一般値和正常値只可以從經驗確定。

第二节　試件在承受拉伸压縮时所表現的塑性特性

我們在最簡单的拉伸压縮柱形試件的例中，考慮基本的塑性現象。为了确定起见，我們假設，試件的材料在質量上具有像鋼、鋁、銅、鎳和其他金屬那样的弹塑性特性，而且直到試驗开始前，它是各向同性的，并且对拉伸和压縮有相同的屈服极限。此处我們用 σ 表示在試件中的拉伸应力，而用 e 表示单位伸长。

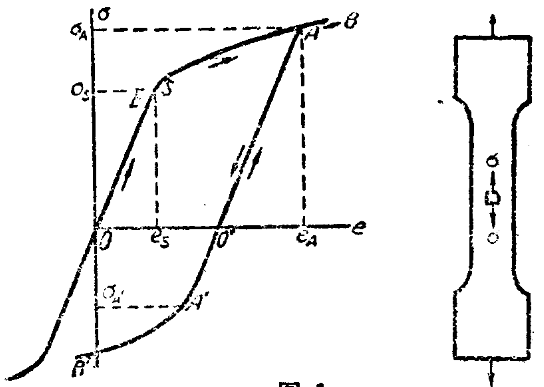

图 1

拉伸图的非綫性，假若在通常的拉力試驗机上以常速度拉伸試件，則可以求得 σ 和 e 的关系图綫，称为拉伸图(图 1)。到某极限应力 σ_e 之前，称为弹性极限，試件呈現弹性特性，就是，假若在任意 $\sigma<\sigma_e$ 时，停止試件的拉伸而开始卸荷，則卸荷图与原来直綫 OE 重合。試件的弹性状态用虎克定律說明：$\sigma=E_e$。在受拉时，試件的直径将与单位伸长按比例地減小，并且波桑系数 ν 将是常量。在弹性极限內試件材料密度的相对变化将等于 $(1-2\nu)e$，就是与伸长成正比。对于鋼，当应力約为2000公斤/公分²时，試件体积內相对变化約为0.04%。

繼續拉伸的試驗，当应力高于弹性极限时，我們即发現 $\sigma-e$ 綫有相当大的弯曲，使得当变形从弹性极限 $\frac{\sigma_e}{E}$ 变化到 $(2\sim3)\frac{\sigma_e}{E}$ 时，$\sigma-e$ 綫切綫傾斜角的正切从量 $\frac{d\sigma}{de}=E$ 变化到为弹性模量 E 十分之

一的值，或者是甚至等于零。在后一情形下，即說，材料有屈服阶段，而相当的应力值称为屈服极限σ_s。材料常常沒有屈服阶段，而曲綫切綫的角系数$\frac{d\sigma}{de}$随变形的增大而单調地减小❶。在大多数情形下，除去$\frac{d\sigma}{de}$迅速变化的小区段外，全部的图可以用包含两个直綫綫段的折綫形式的图代替，这时在直綫$\sigma=Ee$发生轉折处的应力σ_s可称为屈服极限。当$\sigma>\sigma_s$时，在这样的图上$\frac{d\sigma}{de}=E''$也将是常量，称为硬化模量。对鋼說来，硬化模量是杨氏模量的1/10～1/50。有时还引入塑性模量的概念$E'=\frac{\sigma}{e}$。对所有的已知材料，$E\geqslant E'\geqslant E''\geqslant 0$。

在屈服极限之外繼續拉伸試件，于是伴随着变形，应力即单調地增加，而且在$\sigma-e$图上可能有$\frac{d\sigma}{de}$少許增加，但是不能达到E值，然后单調地减少，漸趋近于某常数值的綫段。在某应力值$\sigma=\sigma_b$时，試件发生破坏，因而σ_b称为材料的强度极限或者暂时强度。假若在比較小的变形时，試件即发生破坏并且在此之前并未形成显著的頸縮，則說材料是脆的。否則，材料就称为塑性材料。虽然金屬可以得到很大的变形，能达到5～20～100%的程度或更大，而其密度变化只是很小(約为百分之几)。因此，显然"波桑系数"在材料的弹性极限以外，随着变形的增大相当迅速地增加，趋近于最大值0.5。

速度的影响。在試驗机上通常有約为每分鐘0.01～1%($\frac{de}{dt}\approx 10^{-6}\sim 10^{-2}$ 1/秒)的拉压速度。因为速度变化范围相当大，于是估計拉伸速度在拉伸图的形式上的影响就非常重要了。首先我們注意，甚至是在更宽得多的变形速度变化間隔中，物体的弹性特性仍保持不变。只要提到，杨氏模量和波桑系数，一方面靜力确定的，也就是在拉力試驗机上，另一方面动力确定的——用确定振动頻率和弹性波傳播速度的方法——实际上是相同的，就够了。很明

❶ 這時代替屈服極限，我們規定某條件的比例極限σ_p像$\frac{d\sigma}{de}=0.5E$時的應力。

驗，在弹性极限之外，在上述速度范围之內（而对鋼說来甚至在相当大的速度范围內），拉伸图实际上与速度无关，因此可以比較在不同試驗机上所得到的图。普郎都（Прандтль）在1928年提議金屬屈服极限对变形速度$\frac{de}{dt}=\dot{e}$以下的对数关系：

$$\sigma=\sigma_0+\sigma_1\ln\frac{\dot{e}}{\dot{e}_0},$$

其中σ和σ_0——相当于速度$\dot{e}$和$\dot{e}_0$的屈服极限，而σ_1——对每一种金屬是常数并且与σ_0比較非常小的应力，約为σ_0的1%。假設关心微小的速度变化范围，使得$|\dot{e}-\dot{e}_0|<|\dot{e}_0|$——速度在屈服极限上的影响，可以用非常簡单的綫性关系估計，像我們在关于拉伸稳定性問題的研究上所作的一样：

$$\sigma=2k+3\mu\dot{e}。$$

我們发现这个公式与普郎都公式相同，假若利用泰勒級数的分解并且令

$$2k=\sigma_0-\sigma_1\text{和}3\mu=\frac{\sigma_1}{\dot{e}_0}。$$

对鋼說来，当速度变形約为10^{-3}1/秒时，μ值約为0.2～0.4公斤·秒/公分^2，拉伸速度愈大，則拉伸图愈高，但是升高是非常不足道的，我們已說过，在相当大的速度变化范围內可以忽略它。

在弹性极限外的卸荷和重复荷重。假若在图上某一点A，就是在应力值σ_A时（图1）停止繼續拉伸試件而进行卸荷，于是在卸荷过程中应力和变形的关系图綫将是平行于原来弹性綫段OE的直綫AO'，而且当在試件上完全取消軸向力时，它的单位伸长在图的比例尺中等于綫段OO'。在完全卸去荷重时，試件仍然保留的伸长称为相当于应力σ_A的残余变形或塑性变形。我們看到，残余伸长e_{pA}等于相当于应力σ_A的全部伸长e_A与弹性伸长$\frac{\sigma_A}{E}$之差。

在完全卸去荷重时試件的状态（在图1上用O'点說明），可以取为好像是它的新自然状态。假設試件重新承受拉伸，就是进行重复荷重，于是图綫开始沿說明卸荷过程的那条綫$O'A$走。事实上，对每一种金屬，杨氏模量都是完全稳定的常数，与从該金屬制造

試件的方法无关；在确定E时，通常我們甚至不关心——金屬預先是否曾經过鐓鍛或延伸，是否用压榨或延輾制成，也就是它是各向异性与否，有任何残余变形与否；在所有这些情形中，金屬的杨氏系数，在充分准确程度下，就是同一个。因而卸荷的直綫AO'与重复荷重的直綫$O'A$相重合就是完全自然的了。因为在重复荷重时，直綫$O'A$确定$\sigma-e$的关系包括到点A，于是可以断言，卸荷和重复荷重是純弹性过程。既然，应力σ_A比原来的弹性极限σ_e大，因而我們看出，随着試件塑性变形的增大，弹性极限即升高。材料发生硬化或加工硬化，因此上述的现象称为**硬化或加工硬化**。我們看到，曲綫$\sigma-e$的傾斜角愈大，則这个效果将愈大。

繼續重复加荷过程超过点A，我們看到，$\sigma-e$图綫与曲綫綫段AB重合，該AB曲綫是假若以常速度[1]連續不断地拉伸試件所得到的，就是，試件好像沒有經过卸荷似的。

点A是在拉伸图上完全任意的点，因此可以認为在曲綫$\sigma-e$上的一切应力σ对应于由两部分組成的变形：塑性或残余变形e_p及弹性变形$e_e=\frac{\sigma}{E}$；这样：

$$e=e_p+e_e。$$

因此变形e称为完全的、总的或弹塑性变形。由于弹性变形部分e_e的存在，除了$\sigma-e$图面积的变形功的量W，也就是

$$W=\int_0^e \sigma de$$

之外，我們提到关于变形位能W_e，这是可以用卸荷的方法解放出来的：

$$W_e=\frac{\sigma^2}{2E}=\frac{1}{2}Ee_e^2。$$

由于硬化的存在，塑性变形e_p愈大，則位能W_e就愈大。

巴烏辛格（Баушингер）效果。以上我們只考虑这样的卸荷过程，即減少作用应力到零时（点O'）就停止。以作用相反符号应力

[1] 由于蠕化和松弛，這个規則可能有微小的偏差

的方法从拉伸轉到压縮来繼續这个过程是有趣味的。实际上，这需要新的試驗，因为在拉伸时所取試件的长度在压縮时即失去稳定性。通常从拉伸試件中割取短柱形試件，使承受压縮。但是它的試驗結果可以画在以前的图中（图1），并且进行推論就好像試件仍然是同一个。

在試件上作用相反符号的应力，在我們的情形下就是压縮，首先引起弹性的压縮变形，而且应力和变形間的联系确定为直綫 $O'A'$ 的形式，該綫是直綫 AO' 的延长綫。此后当在試件中到达压应力 $\sigma_{A'}$时，它就获得第二次的塑性变形，而其过程将按照大致平行于AB的曲綫$A'B'$走，而且新弹性极限点A'将对应于应力 $\sigma_{A'}$，其模比σ_A值小，而常常也比第一次加荷重时求得的拉伸屈服极限 σ_s 小。于是，在加工硬化的試件上作用超出弹性极限之外的相反符号的应力，就引起材料的解除硬化；新弹性极限降低。这个现象是巴烏辛格詳細研究的，即以他的名字命名。

松弛、后效、蠕变。我們以常速度重作拉伸試件的試驗，并且在到达$\sigma-e$图上的M点时，迅速地停止加荷，以后保持变形为常数（图2a）。应力σ_M开始减少，最初是迅速地，以后愈来愈慢漸近地趋向于值$\sigma_M'<\sigma_M$。当变形不改变时，这种随时間过程而自己减少內应力的过程称为松弛。松弛现象的特征在图2$б$中用类型MM'的曲綫表示。为了以数学說明松弛现象，馬克斯維尔（Максвелл）曾提議以下的关系式：

$$\frac{d\sigma}{dt}=E\frac{de}{dt}-\frac{\sigma}{T},$$

式中 t——时間，e——从O'点計算的变形，而T——常数，与温度有关，称为松弛时間。当$e=$常数时，我們有随时間过程应力变化的规律：

$$\sigma=\sigma_M\exp\left(-\frac{t}{T}\right),$$

这对金屬，对鋼也是一样，是不被試驗証实的。在正常温度下，由于松弛现象，应力的降低是微不足道的。假若在任意瞬时，停止松

弛过程并且以常速度繼續試件的拉伸，則应力迅速地到达 σ_M 值，以后 $\sigma-e$ 曲綫的行程将好像是試驗在 M 点处并未曾停止一样。

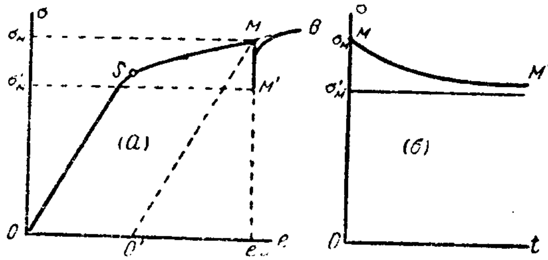

图 2

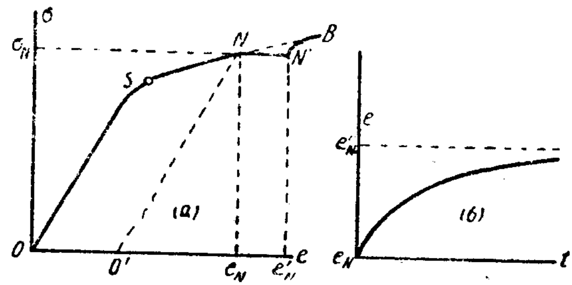

图 3

我們現在考慮另一个試驗：在說明以常速度拉伸的$\sigma-e$图中某一点N上，迅速地停止荷重的改变，并且保持应力为常数(图3a)。发现变形e_N将不是常数，而当尚未达到最后值 e'_N 之前，变形开始增加首先迅速地，然后愈来愈慢。变形随时間增加的特征表示于图3б中。在常应力时，經过一个时期变形自己增大的过程称为后效。从馬克斯維尔公式，当 $\sigma=$常数时，我們有 $\dot{e}=$常数，当鋼在正常温度下也不符合試驗。但是，例如，对于鉛，无論松弛或后效，在正常温度下，都是用馬克斯維尔公式在本質上正确地反映的。

假設从点 N' 起以比后效过程速度大的常速度重新繼續試件的拉伸过程，則应力迅速地增加到在拉伸曲綫上用不停止变形过程的方法所求得的相当于变形$e_{N'}$的值。对鋼說来，后效和松弛的效果在正常温度下是很小的。

铅的后效和松弛在正常温度下是很重要的，与此相似，鋼的后效和松弛在500°C 程度的高温时具有重大意义。在高温时，金屬的后效、松弛和其他一切力学特性的变化，有时統称为蠕变。作为比馬克斯維尔公式更正确地說明蠕变过程的公式例子或者是对数定律，它在本質上是从以上介紹的普郎都公式得来的：

$$\frac{de}{dt}-\frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt}=\varepsilon_0 e^{\frac{\sigma}{\sigma_0}},$$

式中 e——从O'点計算的变形，而σ_0，ε_0，E——与温度有关的常数，或者是那戴的双曲正弦定律：

$$\frac{de}{dt}-\frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt}=2\varepsilon_0\,\mathrm{sh}\frac{\sigma}{\sigma_0}。$$

从拉伸試驗得到的結論。在試件的簡单拉伸时，在材料中所发现的以上已列举出的现象說明塑性变形过程复杂到何种程度。我們还沒有考慮那些塑性现象，如疲劳、陈化、恢复以及其他。大部分所說的效果还沒有被充分研究，因此当然在目前不存在一般的塑性理論，来計算当任意已給荷重时在复杂形式的物体中的应力和变形，照顧到所有这些效果。例如，甚至在原来是弹性应力情况下都不存在令人相当滿意的金屬蠕变理論，虽然在这一方面有大量的著作；在复杂应力状态时，巴烏辛格效果完全沒有被研究过；不存在任何金屬疲劳理論，假若不算在計算最簡单机械零件时所采用的那些半經驗公式。

既然本書的目的是說明在正常或固定温度时金屬的塑性变形理論，而且，依靠縮減理論应用的范围来构成塑性定律，使它們可用試驗来充分检查和証实，因为只有在这种情形下，从理論得到的結論才有实际意义，所以在第一节中所有考虑过的物体特性中，我們只保留那些从我們的观点上看，不仅当簡单拉伸时而且在物体的复杂应力状态时都是徹底查明的那些特性。以下即屬于这样的特性之列。

1） 在按比例增加外力时应力和变形的非綫性关系，或者适用于所考虑的試件，在以某速度拉伸时 $\sigma-e$ 图的曲綫性。用拉伸

图所建立的 $\sigma-e$ 关系，将写为下列形式：

$$\sigma=\Phi(e)=Ee[1-\omega(e)],$$

而且函数Φ 具有以下特性：

$$E\geqslant\frac{1}{e}\Phi(e)\geqslant\frac{d\Phi}{de}\geqslant 0,$$

就是，一般說来，材料具有硬化。假若曲綫$\Phi(e)$允許在足够精确程度下以有轉折点坐标 σ_s 的折綫 $e_s=\frac{1}{E}\sigma_s$ 和硬化模量 E'' 代替，则函数 ω 的解析表达式是这样：

$$\omega=0,\quad e\leqslant e_s;$$

$$\omega=\lambda\left(1-\frac{e_s}{e}\right),\quad e\geqslant e_s;$$

这时参变数 λ 有表达式

$$\lambda=\frac{E-E''}{E}。$$

2） 卸荷和重复加荷过程的弹性。假設在应力 $\sigma=\sigma^*$ 和变形 $e=e^*$时开始卸荷，则现时的应力 σ 和变形 e 用虎克定律确定或者为微分形式：

$$d\sigma=Ede,$$

或者为形式：

$$\sigma-\sigma^*=E(e-e^*),$$

或者，最后，借助于塑性变形 e_p：

$$\sigma=E(e-e_p),$$

$$e_p=e^*-\frac{\sigma^*}{E}。$$

这时我們将假設，在卸荷过程中永远不产生与巴烏辛格效果有关的派生塑性变形，因而由于重复加荷，只要应力一达到初始的σ^*值时，则关系式$\sigma=\Phi(e)$即重新生效。我們将忽略松弛和后效现象，因为它們很少改变上述事实❶。

❶ 關于在簡單試驗中塑性現象更詳細的知識載于專門文獻中。

我們轉到研究物体的复杂应力和变形状态。

第三节　物体的应力状态

假設我們所考慮的物体在直角坐标系統 x, y, z 中有某一方位。假若在它每一点的有任意方位的微分面上，应力是确定的，則其在应力状态即是已知的。經过物体的任意点 (x, y, z) 作平行于坐标平面的三个平面，并且用足够接近于点 (x, y, z) 的一个傾斜平面与它們相交，我們即得物体的元素为四面体形式。相当于前三平面的面，我們称为基本微分面，第四个面，我們称为斜微分面（图4）。所考慮的元素与物体的相互作用是在面上用应力实现的。在理想液体情形下在面上的应力是垂直于微分面的压力。对坚固可变形物体，一般說来，它們是不垂直于微分面的向量。

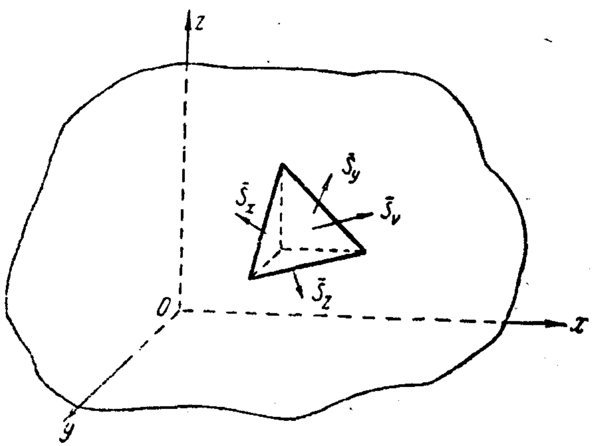

图 4

我們用 S_x 表示法綫与 x 軸重合的微分面上的应力向量，而用 S_y、S_z 分别表示其他二基本面上的应力向量，将其中每一个都沿 x、y、z 軸分解，我們得：

$$S_x = X_x i + Y_x j + Z_x k,$$
$$S_y = X_y i + Y_y j + Z_y k,$$
$$S_z = X_z i + Y_z j + Z_z k,$$