Transactions of
K. C. Wong Education Foundation
Supported Lectures

王宽诚教育基金会

学术讲座汇编

主编　钱伟长

·4·
1992

王宽诚教育基金会编辑出版

1133

王宽诚教育基金会

学 术 讲 座 汇 编

（第 4 集）

主编：钱伟长

王宽诚教育基金会编辑出版

为促进国内外学术交流
免费赠送有关单位

王宽诚教育基金会《学术讲座汇编》　第4集　1992年

编辑出版：王宽诚教育基金会
印　　刷：上海市印刷三厂
发　　行：王宽诚教育基金会上海学务办事处
（非卖品）　（上海市延长路149号上海工业大学内，邮政编码：200072）
开本787×1092　1/16　印张14　字数：320000
1992年2月第1版　1992年2月第1次印刷　印数1—1050册

谨以此书纪念本会创建人、故董事会主席王宽诚先生

王宽诚教育基金会

王宽诚教育基金会简介

王宽诚先生(1907～1986)为香港知名爱国人士，热心祖国教育事业，生前为故乡宁波的教育事业做出积极贡献。1985年独力捐巨资创建王宽诚教育基金会，其宗旨在于为国家培养高级科技人才，为祖国四个现代化效力。

王宽诚先生在世时聘请海内外知名学者担任基金会考选委员会和学务委员会委员，共商大计，确定采用“送出去”和“请进来”的方针，为国家培育各科专门人才，并为提高国内和港澳高等院校的教学水平，资助学术界人士互访，用以促进中外文化交流。在此方针指导下，1985、1986两年，基金会在国家教委支持下，选派学生85名前往英、美、加拿大和西德、瑞士、澳大利亚各国攻读博士学位，并计划资助国内学者赴港澳讲学，资助港澳学者到国内讲学，资助美国学者来国内讲学。正当基金会事业初具规模，蓬勃发展之时，王宽诚先生一病不起，于1986年年底逝世。这是基金会的重大损失，共事同仁，无不深切怀念，不胜惋惜。

王宽诚教育基金会在新任董事会主席张二铭先生和安子介、方善桂、胡百全、李福树等董事的主持下，继承王宽诚先生为国家培育人才的遗愿，继续努力，除按计划执行外，并开发与英国学术机构合作的新项目。王宽诚教育基金会过去和现在的工作态度一贯以王宽诚先生所倡导的“公正”二字为守则，谅今后基金会亦将秉此行事，奉行不辍。借此王宽诚教育基金会《学术讲座汇编》出版之际，特简明介绍如上。

钱　伟　长

一九八九年十二月

HWC/16/07

前　言

王宽诚教育基金会是由已故全国政协常委、香港著名工商企业家王宽诚先生（1907～1986）出于爱国热忱，出资一亿美元于1985年在香港注册登记创立的。

1987年，基金会开设“学术讲座”项目，此项目由当时的全国政协常委、现任全国政协副主席、著名科学家、中国科学院学部委员、上海工业大学校长、王宽诚教育基金会贷款留学生考选委员会主任委员兼学务委员会主任委员钱伟长教授主持，由钱伟长教授亲自起草设立“学术讲座”的规定，资助国内学者前往香港、澳门讲学，资助美国学者和港澳学者前来国内讲学，用以促进中外学术交流，提高内地及港澳高等院校的教学质量。

本汇编收集的文章，均系各地学者在“学术讲座”活动中的讲稿。文章作者中，有年逾八旬的学术界硕彦，亦有由王宽诚教育基金会考选委员会委员推荐的学者和后起之秀。文章内容有科学技术，有历史文化，有经济专论，有文学，有宗教和中国古籍研究。本汇编涉及的学术领域颇为广泛，而每篇文章都有一定的深度和广度，分期分册以《王宽诚教育基金会学术讲座汇编》的名义出版，并无偿分送港澳和国内部分高等院校、科研机构和图书馆，以广流传。

王宽诚教育基金会除资助“学术讲座”学者进行学术交流之外，在钱伟长教授主持的项目下，还资助由国内有关高等院校推荐的学者前往欧美亚澳参加国际学术会议，出访的学者均向所出席的会议提交论文，这些论文亦颇有水平，本汇编亦将其收入，以供参考。

王宽诚教育基金会学务委员会

凡　例

（一）编排次序

本书所收集的王宽诚教育基金会学术讲座的讲稿及由王宽诚教育基金会资助学者赴欧美亚澳参加国际学术会议的论文均按照收到文稿日期先后编排刊列，不分类别。

（二）分期分册出版并作简明介绍

因文稿较多，为求便于携带，有利阅读与检索，故分期分册出版，每册约 150 页至 200 页不等。为便于读者查考，每篇学术讲座的讲稿均注明作者姓名、学位、职务、讲学日期、地点、访问院校名称。国内及港澳学者到欧、美、澳及亚洲的国家和地区参加国际学术会议的论文均注明学者姓名、参加会议的名称、时间、地点和推荐的单位。上述两类文章均注明由王宽诚教育基金会资助字样。

（三）文字种类

本书为学术性文章汇编，均以学术讲座学者之讲稿原稿或参加国际学术会议学者向会议提交的论文原稿文字为准，即原讲稿或论文是中文的，即以中文刊出，原讲稿或论文是外文的，仍以外文刊出。

编后记

本书前三集出版后，分赠国内外各地图书馆及高等院校和科研机构，引起广泛注意。先后收到国内各有关院校、各省、市、地区图书馆暨港、澳、欧、美各国大学来信，迭有好评。表示愿意今后和我们保持联系，希望继续赠阅。不少单位反映，认为内容很好，专业性强，有一定深度和广度，学术水平很高，对学校的教学与科研有一定的参考价值。

我们受到国内外有关院校及各地图书馆来函鼓励，倍感亲切，益觉力薄，诚恐失误。若有失当之处，尚请海内外广大读者批评指正。

本书内容广泛，科技方面涉及的领域尤多，均赖中国大百科全书出版社上海分社原副编审陈荣乐教授总揽编辑、校对及安排印刷任务，对中外文的复校工作尤为认真，辛劳可佩。市印刷三厂职工在排印工作中不避严寒酷暑，为扩大中外文化交流做出积极的贡献。上海工业大学上下一心多方支持，使本书发行工作得以顺利进行，谨此一并志谢！

本书1990年第2集中第149页张栻卒年应为1180，第152页李焘生年应为1115，特此更正。

王宽诚教育基金会学务委员会

一九九二年二月

王宽诚教育基金会学术讲座汇编

第四集

目 录

王宽诚教育基金会
《学术讲座汇编》第 4 集，1～15（1992）.

一般旋转壳在轴对称变形下的复变量方程

钱 伟 长*

摘 要

本文在 Love-Kirchhoff 的假定下，求得了一般旋转壳在轴对称变形下的复变量方程。当旋转壳是圆截面环壳时，这些方程简化为 F. Tölke(1938)[3]，R. A. Clark(1950)[4] 和 B. B. Новожилов(1951)[5] 的方程。当平均半径 $\bar{R}$ 比环截面半径 $\bar{a}$ 大得很多时，求得了细环壳的复变量方程，当这个细环壳的截面是圆形时，简化作为作者(1979)[6] 的圆截面的细环壳复变量方程，我们列出了椭圆截面的细环壳复变量方程。当椭圆截面近似于圆截面时，该方程在形式上和圆细环壳方程基本相同。

一、引 论

在 H. Reissner(1912)[1] 和 E. Meissner(1915)[2] 的轴对称壳理论的基础上，F. Tölke(1938)[3]，R. A. Clark(1950)[4]，B. B. Новожилов(1951)[5] 曾把圆环壳方程式简化为一个复变量的方程。它们的复变量虽都略有不同，但作者已证明都有明确关系(1979)[6]，这种复变量化的过程只适用于子午线上的曲率半径是常数的轴对称壳，如圆球壳和圆环壳等。对于子午线曲率半径不是常数的壳，这种复变量化并不适用。本文利用 Love-Kirchhoff 假定的近似条件，证明不是常数曲率半径的轴对称壳的 Reissner-Meissner 方程，同样可以复变量化。

作为特例，我们研究了椭圆截面的圆环壳的复变量方程，并研究了这种壳的细环壳近似方程，以及近似圆形的椭圆截面圆环壳复变量方程。所有这些壳在研究波纹管的变形刚度中都是很有用的。

这里证明近似圆形的椭圆截面圆环壳复变量方程和圆截面的圆环壳的方程完全相似。后者业已详细研究过(钱伟长1979[6]1980[7])，所以，其求解过程在本文中略去了。

二、旋转壳在轴对称载荷下的平衡方程

让我们取旋转壳中面坐标 φ 和 θ。有关线元为(图 1)

$$ds^2=r_1^2d\varphi^2+r^2d\theta^2 \tag{2.1}$$

其中 r 为 A 点的水平半径。而且有

* 作者钱伟长教授，是国际知名的科学家，现任中国科学院学部委员、上海工业大学校长、美国《应用数学进展》、《工程科学国际月刊》编委、波兰科学院院士、英国《薄壁结构》、荷兰《有限元法在设计和分析中的应用》编委、上海市应用数学和力学研究所所长。于1989年1月由王宽诚教育基金会资助，在香港大学讲学时所作学术报告。

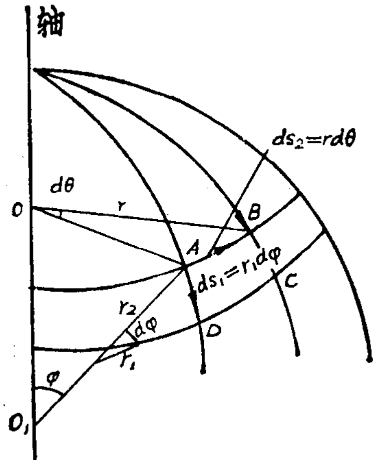

图 1　旋转壳的中面坐标

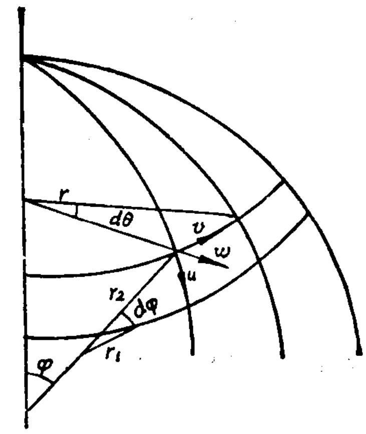

图 2　旋转壳的变形位移

$$ds_2=\widehat{AB}=rd\theta \tag{2.2}$$

r_1为 A 点的子午线半径，也是 A 点的主曲率半径之一。

$$ds_1=\widehat{AD}=r_1d\varphi \tag{2.3}$$

r_2 为 A 点的另一主曲率半径，而且

$$r_2=\frac{r}{\sin\varphi} \tag{2.4}$$

通过几何关系，很易证明

$$\frac{dr}{d\varphi}=r_2\cos\varphi,\qquad \frac{dr_2}{d\varphi}=(r_1-r_2)\mathrm{ctg}\varphi \tag{2.5}$$

称 A 点的位移分量为$(u,\ v,\ w)$，见图 2；对于轴对称变形(没有扭转)而言，有

$$v=0,\ u=u(\varphi),\qquad w=w(\varphi) \tag{2.6}$$

$u,\ v,\ w$ 都以顺 $\varphi,\ \theta,\ r$ 增长的方向为正。于是应变位移关系可以写成

$$e_\varphi=\frac{1}{r_1}\left(\frac{du}{d\varphi}+w\right),\qquad e_\theta=\frac{1}{r_2}(u\ \mathrm{ctg}\varphi+w),\qquad \tau_{\varphi\theta}=0 \tag{2.7}$$

曲率变化和位移的关系为

$$k_\varphi=\frac{1}{r_1}\frac{d\chi}{d\varphi},\qquad k_\theta=\frac{\chi}{r_2}\mathrm{ctg}\varphi,\qquad k_{\varphi\theta}=0 \tag{2.8}$$

其中　χ 代表子午线的切线在弯曲变形时的转角

$$\chi=\frac{1}{r_1}\left(\frac{dw}{d\varphi}-u\right) \tag{2.9}$$

$e_\varphi,\ e_\theta,\ \tau_{\varphi\theta}$ 为中面拉伸应变分量，$k_\varphi,\ k_\theta,\ k_{\varphi\theta}$ 为中面的曲率变化。

薄膜力 $N_\varphi,\ N_\theta,\ N_{\varphi\theta}$ 和弯矩 $M_\varphi,\ M_\theta,\ M_{\varphi\theta}$ 可以写成

$$N_\varphi=B(e_\varphi+\nu e_\theta),\qquad N_\theta=B(e_\theta+\nu e_\varphi),\qquad N_{\varphi\theta}=0 \tag{2.10}$$

$$M_\varphi=-D(k_\varphi+\nu k_\theta),\qquad M_\theta=-D(k_\theta+\nu k_\varphi),\qquad M_{\varphi\theta}=0 \tag{2.11}$$

其中 B 为壳的薄膜抗拉刚度，D 为壳的抗弯刚度

$$B=\frac{hE}{1-\nu^2},\qquad D=\frac{h^3E}{12(1-\nu^2)}\tag{2.12}$$

以上各式中，h 为壳的厚度，E 为杨氏模量，ν 为泊桑比。

现在让我们研究壳元的平衡方程：图 3(a) 是用来研究全圆环壳元的轴向力平衡的。图 3(b) 是用来研究半圆环壳元 $ABCD$ 的水平力的平衡的。最后，我们将用半圆环壳元 $ABCD$的剪力和弯矩研究力矩平衡方程(见图3(c))。

(A)力矩平衡方程(图3(c))。

半圆环壳元受四条边界上的分布剪力和弯矩的力矩作用。

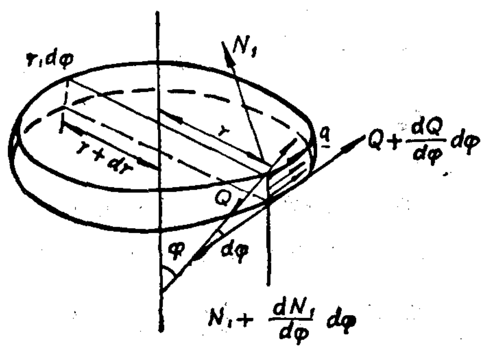

图3(a) 力的轴向平衡

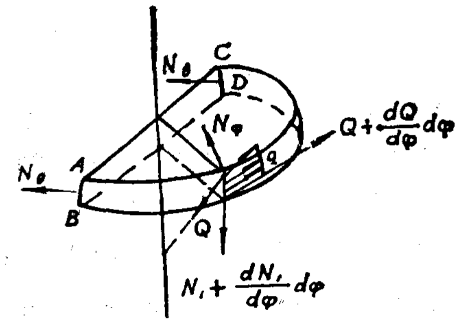

图3(b) 力的水平面内平衡

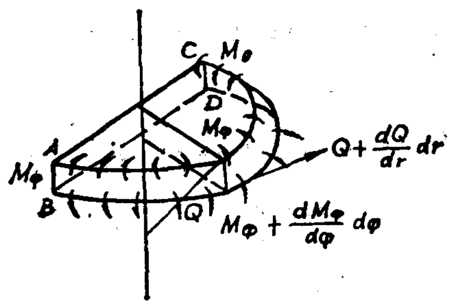

图3(c) 力矩和剪力的平衡

$\widehat{AC}$ 边界上受分布力矩 M_φ 作用，其合力矩为 $2rM_\varphi$，$\widehat{BD}$ 边界上受分布力矩 $M_\varphi+\frac{dM_\varphi}{d\varphi}d\varphi$ 作用，其合力矩和 $\widehat{AC}$ 上的合力矩方向相反，为 $-2rM_\varphi-2\frac{d}{d\varphi}(rM_\varphi)d\varphi$。在 $\widehat{AB}$ 和 $\widehat{CD}$ 边界上，有分布力矩 M_θ 作用，各有合力矩 $M_\theta r_1d\varphi$，它们的轴向分量方向相反，互相对消，但其环面上的分量方向相同，合为一起等于 $2M_\theta r_1\cos\varphi d\varphi$，指向和 $\widehat{AC}$ 上的合力矩 $2rM_\varphi$ 相同。最后，$\widehat{AC}$ 上的分布剪力 Q 和 $\widehat{BD}$ 上的分布剪力 $Q+\frac{dQ}{d\varphi}d\varphi$ 对圆环形成一个分布力矩 $Qr_1d\varphi$，这个分布力矩在半圆环上积分后，得合力矩 $2Qr_1rd\varphi$。把这些合力矩加在一起，平衡条件要求其总和为零。从此给出。

$$\frac{d}{d\varphi}(rM_\varphi)-r_1M_\theta\cos\varphi-r_1rQ=0\tag{2.13}$$

把(2.8)式中的k_φ，k_θ代入(2.11)式，我们求得用χ表示的弯矩。

$$M_\varphi=-D\left(\frac{1}{r_1}\frac{d\chi}{d\rho}+\nu\frac{\chi}{r_2}\mathrm{ctg}\varphi\right),\qquad M_\theta=-D\left(\frac{\chi}{r_2}\mathrm{ctg}\varphi+\nu\frac{1}{r_1}\frac{d\chi}{d\rho}\right)\tag{2.14}$$

把(2.14)代入(2.13)，得

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{r}{r_1}\frac{d\chi}{d\varphi}\right)-\frac{r_1}{r}\cos^2\varphi\chi-\nu\sin\varphi\chi+\frac{1}{D}r_1rQ=0\tag{2.15}$$

如果引进一个新的变量

$$\Phi=\frac{r}{\sin\varphi}Q\tag{2.16}$$

则(2.15)可以进一步简化为

$$\frac{1}{\sin\varphi}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{r}{r_1}\frac{d\chi}{d\rho}\right)-\frac{r_1}{r}\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\chi-\nu\chi+\frac{1}{D}r_1\Phi=0\tag{2.17}$$

这是平衡方程(2.13)化为χ和Φ表达式中的第一式。

(B)薄膜应力和剪力的平衡方程(图3(a)，(b))

考虑全圆环的轴向力的平衡，轴向力有下列五种：(1)在$\varphi=\varphi$的边界上的分布剪力Q的轴向合力$2\pi rQ\cos\varphi$，(2)在$\varphi=\varphi$的边界上的分布薄膜力N_φ的轴向合力$-2\pi rN_\varphi\sin\varphi$，(3)在$\varphi+d\varphi$的边界上的分布剪力$Q+\frac{dQ}{d\varphi}d\varphi$的轴向合力$-2\pi rQ\cos\varphi-2\pi\frac{d}{d\varphi}(rQ\cos\varphi)d\rho$，(4)在$\varphi+d\varphi$的边界上的分布薄膜力的轴向合力$+2\pi rN_\varphi\sin\varphi+2\pi\frac{d}{d\varphi}(rN_\varphi\sin\varphi)$，(5)环壳元上所受载荷$q$的轴向合力$-2\pi rr_1q\cos\varphi d\rho$。

其平衡条件给出

$$\frac{d}{d\rho}(N_\varphi r\sin\varphi-Qr\cos\varphi)-qr_1r\cos\varphi=0\tag{2.18}$$

其中　$q=q(\varphi)$。(2.18)可以积分一次，得

$$N_\varphi=Q\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}+\frac{1}{r\sin\varphi}\int_{\varphi_A}^{\varphi}qrr_1\cos\varphi d\varphi+\frac{P_Ar_A}{r\sin\varphi}\tag{2.19}$$

其中　P_Ar_A为积分常数。设r_A为旋转壳端面$\varphi=\varphi_A$处的水平面半径。在该处N_φ和Q的值分别为$N_{\varphi A}$和Q_A，而且

$$P_A=N_{\varphi A}\sin\varphi_A-Q_A\cos\varphi_A\tag{2.20}$$

它是作用在φ_A端面上的每单位弧长上的轴向拉力。

最后考虑半圆环壳(图3(b))在N_φ，N_θ，Q，q作用下的水平面内的力的平衡。(1)在$\widehat{AB}$和$\widehat{CD}$上各有N_θ的合力$N_\theta r_1d\rho$。指向图左方，合起来等于$2N_\theta r_1d\rho$。(2)$\widehat{AC}$上N_φ和Q的水平分量的和等于$N_\varphi\cos\varphi+Q\sin\varphi$，指向轴通过的圆心，其合力为$2r(N_\varphi\cos\varphi+Q\sin\varphi)$，指向图左方，(3)$\widehat{BD}$上的合力为$-2(N_\varphi\cos\varphi+Q\sin\varphi)r-2\frac{d}{d\varphi}[r(N_\varphi\cos\varphi+Q\sin\varphi)]$，指向图右，(4)$ABCD$表面上的载荷$q(\varphi)$的水平合力，指向图右，它是$-2qrr_1\sin\varphi d\varphi$。它的平衡条件为

$$N_\theta r_1-\frac{d}{d\rho}(N_\varphi r\cos\varphi+Qr\sin\varphi)-qrr_1\sin\varphi=0\tag{2.21}$$

把(2.19)中的 N_φ 代入，简化得

$$N_\theta=\frac{1}{r_1}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{rQ}{\sin\varphi}\right)-\frac{1}{r_1\sin^2\varphi}\int_{\varphi_A}^{\varphi}qrr_1\cos\varphi d\varphi+\frac{qr}{\sin\varphi}-\frac{P_A r_A}{r_1\sin^2\varphi} \tag{2.22}$$

(2.19)，(2.22)是两个用 $Q(r)$ 来表示 N_θ，和 N_φ 的表示式。在实际上，它们是力的平衡方程。N_φ 和 N_θ 不是独立的，它们满足一定的协调条件。如果把(2.19)(2.22)中的 N_φ，N_θ 代入这种协调条件，即得另一个用 Q，χ 来表示的协调方程，如果用(2.16)把 Q 换为 Φ 表示，这就是另一个 Φ 和 χ 的方程式，亦称协调方程。

三、旋转壳在轴对称变形下的协调方程

我们从(2.7)式，有

$$\frac{d}{d\varphi}(re_\theta)=\frac{d}{d\varphi}(u\cos\varphi+v\sin\varphi)=r_1\chi\sin\varphi+r_1e_\varphi\cos\varphi \tag{3.1}$$

但是，从(2.10)，有

$$e_\theta=\frac{1}{Eh}(N_\theta-\nu N_\varphi),\qquad e_\varphi=\frac{1}{Eh}(N_\varphi-\nu N_\theta) \tag{3.2}$$

把(3.2)代入(3.1)，得

$$\frac{d}{d\varphi}[r(N_\theta-\nu N_\varphi)]=r_1Eh\chi\sin\varphi+r_1\cos\varphi(N_\varphi-\nu N_\theta) \tag{3.3}$$

把(2.19)和(2.22)中的 N_φ，N_θ 代入(3.3)，简化后得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{r}{r_1}\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)-\cos^2\varphi\frac{r_1}{r}\Phi+\nu\sin\varphi\Phi-Ehr_1\sin\varphi\chi+\frac{d}{d\varphi}\left[\frac{qr^2}{\sin\varphi}\right]\\&\quad-\frac{qr^2\cos\varphi}{\sin^2\varphi}-[P_Ar_A+\int_{\varphi_A}^{\varphi}qrr_1\cos\varphi dp]\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{r}{r_1\sin^2\varphi}\right)+\frac{r_1}{r}\mathrm{ctg}\varphi\right]=0\end{aligned} \tag{3.4}$$

这是 Φ 和 χ 的协调方程。(2.17)和(3.4)为决定 Φ 和 χ 的两个基本方程。

让我们引进无量纲的子午线的曲率半径 $\xi_1(\varphi)$，和无量纲的壳的旋转半径 $=\xi(\varphi)$，称

$$r_1=\bar{a}\xi_1,\qquad r=\bar{R}\xi \tag{3.5}$$

其中 $\bar{a}$，$\bar{R}$ 为常量

$$\left.\begin{aligned}&\bar{a}=\text{典型的子午线曲率半径}\\&\bar{R}=\text{典型的旋转壳的旋转半径}\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

(A)对于圆球壳(图4(a))而言，我们有

$$\left.\begin{aligned}&\bar{a}=a,\ \bar{R}=a\\&\xi_1=1,\ \xi=\sin\varphi\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

(B)对于圆环壳(图4(b))而言，我们有

$$\left.\begin{aligned}&\bar{a}=a,\qquad \bar{R}=R\\&\xi_1=1,\qquad \xi=1+\alpha\sin\varphi,\qquad \alpha=\frac{a}{R}\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

(C)对于椭圆环壳(图4c)而言，我们有

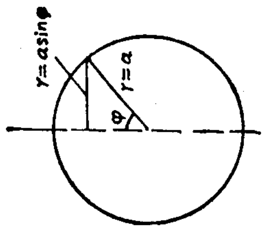

图4(a) 圆球壳的 ξ_1, ξ, $\bar{a}$, $\bar{R}$

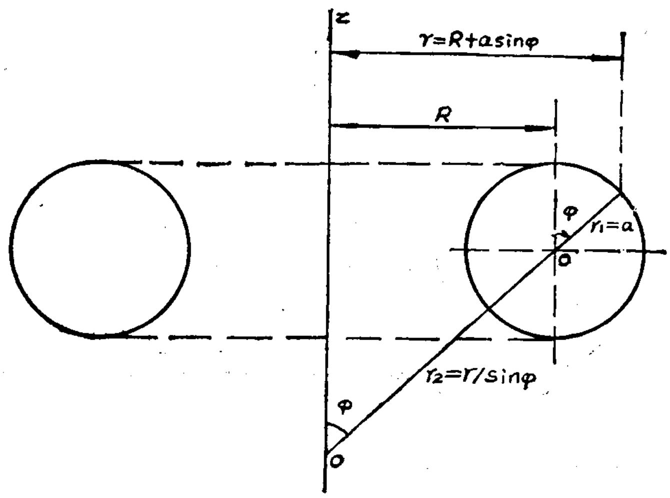

图4(b) 圆环壳的 ξ, ξ_1, $\bar{R}$, $\bar{a}$

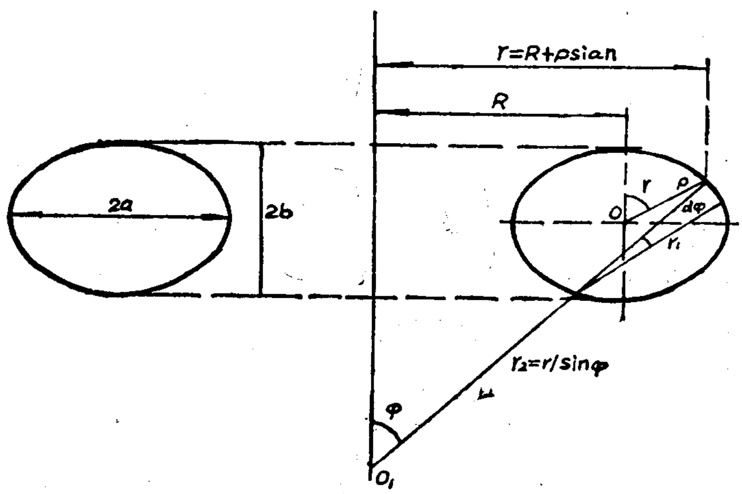

图4(c) 椭圆环壳的 ξ, ξ_1, $\bar{R}$, $\bar{a}$

$$
\left.\begin{aligned}
&\bar{a}=\frac{b^2}{a}, \qquad \bar{R}=R \\
&\xi_1=(1-k^2\cos^2\varphi)^{-3/2}, \qquad \xi=1+\frac{a}{R}\sin\varphi\left[\frac{1-k^2(2-k^2)\cos^2\varphi}{1-k^2\cos^2\varphi}\right]^{1/2}
\end{aligned}\right\} \tag{3.9}
$$

其中

$$
k^2=1-\frac{b^2}{a^2} \tag{3.10}
$$

引进

$$
\bar{\alpha}=\frac{\bar{a}}{\bar{R}} \tag{3.11}
$$

和引进算子

$$
\Gamma(\cdots)=\frac{d}{d\varphi}\left[\frac{\xi}{\xi_1}\frac{d}{d\varphi}(\cdots)\right]-\bar{\alpha}^2\frac{\xi_1}{\xi}\cos^2\varphi(\cdots) \tag{3.12}
$$

(2.17)和(3.4)可以写成

$$\Gamma(\chi)-\nu\bar{\alpha}\sin\varphi\chi+\frac{\bar{R}}{D}\bar{\alpha}^2\xi_1\sin\varphi\Phi=0 \tag{3.13a}$$

$$\Gamma(\Phi)+\nu\bar{\alpha}\sin\varphi\Phi-Eh\bar{R}\bar{\alpha}^2\xi_1\sin\varphi\chi=-\bar{\alpha}\bar{R}^2\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{q\xi^2}{\sin\varphi}\right)+\bar{\alpha}\bar{R}^2\frac{q\xi^2\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$$
$$+\left[P_Ar_A+\bar{\alpha}\bar{R}^2\int_{\varphi_A}^{\varphi}q\xi_1\xi\cos\varphi d\varphi\right]\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\xi}{\xi_1\sin^2\varphi}\right)+\bar{\alpha}^2\frac{\xi_1}{\xi}\text{ctg}\varphi\right] \tag{3.13b}$$

四、ξ_1 为常数(球壳、圆环壳)时的复变量方程

当 ξ_1 为常数时，取

$$\xi_1=1 \tag{4.1}$$

于是有

球壳：
$$\bar{\alpha}=\frac{\bar{a}}{\bar{R}}=1,\quad \xi=\sin\varphi \tag{4.2a, b}$$

圆环壳：
$$\bar{\alpha}=\frac{\bar{a}}{R}=\frac{\bar{a}}{R}=\alpha,\quad \xi=1+\alpha\sin\varphi \tag{4.3a, b}$$

而

$$\Gamma(\cdots)=\frac{d}{d\varphi}\left[\xi\frac{d(\cdots)}{d\varphi}\right]-\bar{\alpha}^2\frac{1}{\xi}\cos^2\varphi(\cdots) \tag{4.4}$$

(3.13a, b)可以化为

$$\Gamma(\chi)-\nu\bar{\alpha}\sin\varphi\chi+\frac{\bar{R}}{D}\bar{\alpha}^2\sin\varphi\Phi=0 \tag{4.5a}$$

$$\Gamma(\Phi)+\nu\bar{\alpha}\sin\varphi\Phi-Eh\bar{R}\bar{\alpha}^2\sin\varphi\chi=-\bar{\alpha}\bar{R}^2\frac{d}{dp}\left(\frac{q\xi^2}{\sin\varphi}\right)+\bar{\alpha}\bar{R}^2\frac{q\xi^2\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$$
$$+\left[P_Ar_A+\bar{\alpha}\bar{R}^2\int_{\varphi_A}^{\varphi}q\xi\cos\varphi dp\right]\left[\frac{d}{dp}\left(\frac{\xi}{\sin^2\varphi}\right)+\bar{\alpha}^2\frac{1}{\xi}\text{ctg}\varphi\right] \tag{4.5b}$$

它们可以用复变量进行简化，引进复变量 $S(\varphi)$，设

$$S(\varphi)=A\Phi(\varphi)+B\chi(\varphi) \tag{4.6}$$

其中 A，B 为待定复数

$$\Gamma(S)=A\Gamma(\Phi)+B\Gamma(\chi) \tag{4.7}$$

从(4.5a, b)得

$$\Gamma(S)=-\nu\bar{\alpha}\sin\varphi(A\Phi-B\chi)+Eh\bar{R}\bar{\alpha}^2\sin\varphi A\chi-\frac{\bar{R}}{D}\bar{\alpha}^2\sin\varphi B\Phi$$
$$+A\left\{\left[P_Ar_A+\bar{\alpha}\bar{R}^2\int_{\varphi_A}^{\varphi}q\xi\cos\varphi d\varphi\right]\left[\frac{d}{dp}\left(\frac{\xi}{\sin^2\varphi}\right)+\bar{\alpha}^2\frac{1}{\xi}\text{ctg}\varphi\right]\right.$$
$$\left.-\bar{\alpha}\bar{R}^2\sin\varphi\frac{d}{dp}\left(\frac{q\xi^2}{\sin^2\varphi}\right)\right\} \tag{4.8}$$

这里的 A，B 是任意的，如果我们取

$$-\nu\bar{\alpha}A-\frac{1}{D}\bar{R}\bar{\alpha}^2B=-i2\mu A,\quad \bar{R}Eh\bar{\alpha}^2A+\nu\bar{\alpha}B=-i2\mu B \tag{4.9}$$

其中 μ 为一待定的比例常数，则(4.8)可以化为

$$\Gamma(S)+i2\mu\sin\varphi S=A\left\{-\bar{\alpha}\bar{R}^2\sin\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{q\xi^2}{\sin^2\varphi}\right)\right.$$
$$\left.+\left[P_Ar_A+\bar{\alpha}\bar{R}\int_{\varphi_A}^{\varphi}q\xi\cos\varphi d\varphi\right]\left[-\frac{d}{dp}\left(\frac{\xi}{\sin^2\varphi}\right)+\bar{\alpha}^2\frac{1}{\xi}\text{ctg}\varphi\right]\right\} \tag{4.10}$$

从(4.9)，得

$$\frac{B}{A}=\frac{(i2\mu-\nu\bar{\alpha})D}{R\bar{a}^2}=-\frac{\bar{R}\bar{\alpha}^2Eh}{i2\mu+\nu\bar{\alpha}} \tag{4.11}$$

由此，给出

$$2\mu=\bar{\alpha}\sqrt{\frac{\bar{a}^2Eh}{D}-\nu^2}=\bar{\alpha}\sqrt{12(1-\nu^2)\frac{\bar{a}^2}{h^2}-\nu^2} \tag{4.12}$$

对于一般的壳体而论，在 Love-Kinhhoff 假设的范围内

$$\frac{h^2}{\bar{a}^2}\ll 12\frac{1-\nu^2}{\nu^2} \tag{4.13}$$

所以

$$\mu\cong\sqrt{3(1-\nu^2)}\frac{\bar{a}^2}{\bar{R}h} \tag{4.14}$$

最后，得

$$S=A\left[\Phi+\frac{D}{\bar{\alpha}\bar{a}}(2\mu i-\nu\bar{\alpha})\chi\right]\cong A\left[\Phi+2\mu i\frac{D}{\bar{\alpha}\bar{a}}\chi\right] \tag{4.15}$$

到此，我们得到一个线性复变量方程(4.10)，但是 A 仍可任意选择，在历史上，各家有不同选择。F. Tölke(1938)[3] 取 $A=-1$，并引进新的因子来化去 $\Gamma(\cdots)$中的一阶导数项，称

$$F^*=-\sqrt{\frac{\bar{R}}{h}\xi}\left(\Phi+\frac{2\mu D}{\bar{\alpha}\bar{a}}i\chi\right)=\sqrt{\frac{\bar{R}}{h}\xi}\,S \qquad A=-1 \tag{4.16}$$

(4.10)导出决定 F^* 的复变量方程

$$\frac{d^2F^*}{d\varphi^2}-\left[\frac{1}{2\sqrt{\xi}}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{\sqrt{\xi}}\frac{d\xi}{d\varphi}\right)+\frac{\bar{\alpha}}{\xi^2}\cos^2\varphi-i\frac{2\mu\sin\varphi}{\xi}\right]F^*$$
$$=\sqrt{\frac{\bar{R}}{h\xi}}\left\{-\bar{\alpha}\bar{R}\sin\varphi\frac{d}{dp}\left(\frac{q\xi^2}{\sin^2\varphi}\right)\right.$$
$$+\left[P_Ar_A+\bar{\alpha}\bar{R}\int_{\varphi_A}^{\varphi}q\xi\cos\varphi dp\right]\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\xi}{\sin^2\varphi}\right)\right.$$
$$\left.\left.+\bar{\alpha}^2\frac{1}{\xi}\text{ctg}\varphi\right]\right\} \tag{4.17}$$

如果把(3.8)式代入，并把 $\varphi_A=0$，$P_Ar_A=Q_0$，即得 Tölke 的圆环壳复变量方程。

在 B. B. Новожилов(1951)[5] 的环壳工作中，他的结果相当于取

$$A=i\frac{2\mu}{\bar{\alpha}} \tag{4.18}$$

同时引进新的因子来化简 $\Gamma(\cdots)$中的零阶导数项，设

$$F^{**}=\xi S \tag{4.19}$$

代入(4.10)式，消去 S，即得