892833

矩阵分析

王典恩

51
人
56

陕西人民教育出版社

矩阵分析

王典恩

陕西人民教育出版社

内容简介

矩阵分析是理工科各专业的一门基础课，它有着广泛的应用．特别是在自动控制理论中，它是研究和解决问题的有力工具之一．本书分四章及若干节，分别讲述了函数矩阵的微积分，矩阵函数的幂级数表示，矩阵函数的表示及计算，矩阵函数在微分方程中的应用．每节内容都穿插适当的例题，节尾一般有适量的习题，书末附有习题的答案及提示．

本书可作为大专院校理工科教师和科研人员的参考书，也可作为工科高年级学生和硕士研究生的参考书或教材；凡具有一般线性代数知识的读者均可阅读．

矩阵分析

王典恩

陕西人民教育出版社出版

（西安长安南路吴家坟）

陕西省新华书店发行　空军工程学院印刷厂印刷

787×1092毫米　1/32开本　5.25印张　105千字

1988年7月第1版　1988年7月第1次印刷

印数：1—3000

ISBN7-5419-0469-4/G·407　定价：1.50元

前　言

矩阵分析的知识在理工科各专业中有着广泛的应用。特别是在自动控制理论中，它是研究和解决问题的有力工具之一。我在空军工程学院首次开设这门课程时，它就被飞行力学、航空发动机、自动控制理论及应用、通信与电子系统、火力控制系统等专业定为硕士研究生的学位课程或必修课程。

本书是在我的授课讲义的基础上经多次修改、充实而成的。其内容由浅入深，循序渐进；书中每一个公式的推导和定理的证明都力求系统、严密，并注意适应各专业的需要。全书分四章及若干节，每节内容都穿插适当的例题，各节末尾一般都有习题，而且书末附有习题的答案及提示。

此书既适合大专院校理工科教师和科研人员做参考书，又可以作工科高年级学生和硕士研究生的参考书或教材。就是工科二、三年级学生，具有一般线性代数知识者也完全可以阅读它。

我在编写此书的过程中，受到了空军工程学院各级领导及许多同志的鼓励和支持，在此，特向他们表示衷心的感谢。

愿将此书奉献给祖国的科技和教育事业。

我深知自己水平有限，书中的错漏之处可能不少，恳求读者指正。

王典恩

1988年2月于西安

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一章　函数矩阵的微积分

在现代控制理论等学科中，常用到矩阵的微积分。关于矩阵的微分，就表达式

$$\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{A}}$$

而言，由于F和A都可以分别表示纯量、向量和矩阵，所以它可以代表九种不同的导数。除纯量函数对纯量的导数在高等数学中已学习之外，还有八种。目前各专业的书籍上对这八种导数的定义并不统一。我们采用的是常见的方法。本章将逐一介绍这八种导数的定义和运算法则，最后再把它们统一起来。

§1.1　矩阵的克罗内克（Kronecker）积

我们首先介绍矩阵的克罗内克积的概念。

定义1　设$\mathbf{A}\in\mathbf{P}^{m\times n}$，$\mathbf{B}\in\mathbf{P}^{p\times q}$，矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix}\in\mathbf{P}^{mp\times nq} \qquad (1)$$

称为矩阵A与B的克罗内克积或直积，记为

$$\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}\ .$$

根据定义，我们应注意以下三点：

1. 一般说来，$A\otimes B \neq B\otimes A$；

2. A和B在通常意义下的乘积必须当$n=p$时才有意义，而A与B的克罗内克积对任意的自然数组（m，n，p，q）都有定义；

3. $A\otimes B$是以$a_{ij}B$为第$i-j$子块的分块矩阵，所以我们有时把（1）式简记为

$$A\otimes B=\left(a_{ij}B\right).$$

下面我们介绍矩阵的克罗内克积的性质.

1. 单位矩阵之积

$$E_m\otimes E_n=E_{mn} \tag{2}$$

2. 纯量倍

设A，B为数域P上的矩阵；$a\in P$，则

$$a(A\otimes B)=(aA)\otimes B=A\otimes(aB). \tag{3}$$

3. 分配律

设A，B是同型矩阵，则

$$(A+B)\otimes C=(A\otimes C)+(B\otimes C); \tag{4}$$

$$C\otimes(A+B)=(C\otimes A)+(C\otimes B). \tag{5}$$

4. 结合律

$$A\otimes(B\otimes C)=(A\otimes B)\otimes C. \tag{6}$$

5. 转置

$$(A\otimes B)^T=A^T\otimes B^T. \tag{7}$$

6. 混合积

设$A\in P^{k\times l}$，$B\in P^{m\times n}$，$C\in P^{p\times q}$，$D\in P^{s\times r}$，则

$A\otimes C\in P^{kp\times lq}$，$B\otimes D\in P^{ms\times nr}$，若$l=m$，$q=s$，就有

$$(\mathbf{A}\otimes\mathbf{C})(\mathbf{B}\otimes\mathbf{D})=\mathbf{AB}\otimes\mathbf{CD}. \tag{8}$$

7. 逆

若$\mathbf{A}\in P^{n\times n}$，$\mathbf{B}\in P^{m\times m}$，而且$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$均可逆，则有

$$(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\otimes\mathbf{B}^{-1}. \tag{9}$$

推论1 $\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}$可逆的充要条件是$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$皆为可逆矩阵。

8. 迹

对于$\mathbf{A}\in P^{n\times n}$，$\mathbf{B}\in P^{m\times m}$，有

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})=\mathrm{tr}\mathbf{A}\cdot\mathrm{tr}\mathbf{B}. \tag{10}$$

9. 秩

$$\mathrm{rank}(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})=\mathrm{rank}\,\mathbf{A}\cdot\mathrm{rank}\,\mathbf{B}. \tag{11}$$

证明 我们只证明性质6、7、9，其余性质均可按定义证明之，把它们作为习题留给读者。

关于性质6，根据分块矩阵的运算法则，有

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{A}\otimes\mathbf{C})(\mathbf{B}\otimes\mathbf{D})\\
&=\left(a_{ij}\mathbf{C}\right)\left(b_{fe}\mathbf{D}\right)\\
&=\left(\sum_{t=1}^{m}(a_{it}b_{te}\mathbf{CD})\right)\\
&=\left((\mathbf{AB})_{ie}\mathbf{CD}\right)\\
&=\mathbf{AB}\otimes\mathbf{CD}.
\end{aligned}$$

式中$(\mathbf{AB})_{ie}$表示矩阵$\mathbf{AB}$的位于第i行第e列交叉点处的元素。

对于性质7，我们利用性质6的结果便可证得。因为

$$(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})(\mathbf{A}^{-1}\otimes\mathbf{B}^{-1})$$

$$=AA^{-1}\otimes BB^{-1}$$
$$=E_n\otimes E_m$$
$$=E_{mn};$$

同理可得

$$(A^{-1}\otimes B^{-1})(A\otimes B)=E_{mn}.$$

这就证明了

$$(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}.$$

再来看性质 9，设$A\in P^{m\times n}$，$B\in P^{r\times s}$，$\mathrm{rank}A=r_A$，$\mathrm{rank}B=r_B$。我们知道，对于A存在 $M\in P^{m\times m}$，$N\in P^{n\times n}$ 均可逆，使得

$$A=M\begin{pmatrix} E_{r_A} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}N=MA_1N;$$

对于B也存在可逆矩阵$R\in P^{r\times r}$，$S\in P^{s\times s}$，使

$$B=R\begin{pmatrix} E_{r_B} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}S=RB_1S.$$

则

$$A\otimes B=(MA_1N)\otimes(RB_1S)$$

反复利用性质 6，便可得到

$$A\otimes B=(M\otimes R)(A_1\otimes B_1)(N\otimes S).$$

据推论 1 知，$M\otimes R$与$N\otimes S$皆满秩，所以

$$\mathrm{rank}(A\otimes B)=\mathrm{rank}(A_1\otimes B_1).$$

而

$$A_1\otimes B_1\cong\begin{pmatrix} \begin{matrix} E_{r_B} & & \\ & \ddots & \\ & & E_{r_B} \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

上面的矩阵中，共有r_A个$\mathbf{E}_{r_B}$。因此，有

$$\mathrm{rank}(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})=\mathrm{rank}\,\mathbf{A}\cdot\mathrm{rank}\,\mathbf{B}。$$

对于矩阵的克罗内克积，可定义

$$\underbrace{\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}\otimes\cdots\otimes\mathbf{A}}_{k\text{个}}=\mathbf{A}^{[k]}$$

特别　$\mathbf{A}^{[0]}=1$（纯数），$\mathbf{A}^{[1]}=\mathbf{A}$。

大家知道，对矩阵通常意义下的乘法

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^k\neq\mathbf{A}^k\mathbf{B}^k,$$

但对于矩阵的克罗内克积，却有

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^{[k]}=\mathbf{A}^{[k]}\mathbf{B}^{[k]}。$$

这一结论的证明留给读者。

根据克罗内克积的性质，我们可以证明更多的有益的结论。

例1　以1或－1为元素的m阶矩阵$\mathbf{H}$，它满足

$$\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}=m\mathbf{E}_m$$

时，称之为m阶哈达马德（Hadamard）矩阵。设$\mathbf{H}_m$为m阶，$\mathbf{H}_n$为n阶哈达马德矩阵，则$\mathbf{H}_m\otimes\mathbf{H}_n$为$mn$阶哈达马德矩阵。

证明　因为据克罗内克积的性质，有

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{H}_m\otimes\mathbf{H}_n)(\mathbf{H}_m\otimes\mathbf{H}_n)^{\mathrm{T}}\\
&=(\mathbf{H}_m\otimes\mathbf{H}_n)(\mathbf{H}_m^{\mathrm{T}}\otimes\mathbf{H}_n^{\mathrm{T}})\\
&=\mathbf{H}_m\mathbf{H}_m^{\mathrm{T}}\otimes\mathbf{H}_n\mathbf{H}_n^{\mathrm{T}}\\
&=m\mathbf{E}_m\otimes n\mathbf{E}_n\\
&=mn(\mathbf{E}_m\otimes\mathbf{E}_n)\\
&=mn\mathbf{E}_{mn},
\end{aligned}$$

所以$\mathbf{H}_m\otimes\mathbf{H}_n$是$mn$阶的哈达马德矩阵。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

例2 若A，B都是实对称（或厄米特）矩阵，那末$A\otimes B$也是实对称（或厄米特）矩阵。

证明 因为实对称矩阵是厄米特矩阵在实数域上的特殊情形，所以只需证明厄米特矩阵的情形即可。

设$A^H=A$，$B^H=B$，据性质5，可得

$$\begin{aligned}(A\otimes B)^H&=(\overline{A\otimes B})^T\\&=(\overline{A}\otimes\overline{B})^T\\&=A^H\otimes B^H\\&=A\otimes B,\end{aligned}$$

这就说明了$A\otimes B$仍是厄米特矩阵。

例3 设$A\in P^{n\times n}$，$B\in P^{m\times m}$，A的n个特征值为λ_i（$i\in \underline{n}$），B的m个特征值为μ_j（$j\in \underline{m}$），那末

1. $A\otimes B$的mn个特征值是$\lambda_i\mu_j$，其中$i\in \underline{n}$，$j\in \underline{m}$；

2. $|A\otimes B|=|A|^m\cdot|B|^n$.

证明 1. 因为对于矩阵A、B，我们总可以将它们相似化简为上三角矩阵。即存在可逆的矩阵P和Q，使

$$A=P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & * \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}P=P^{-1}A_1P,$$

$$B=Q^{-1}\begin{pmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & * \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_m\end{pmatrix}Q=Q^{-1}B_1Q.$$

根据矩阵的克罗内克积的性质，有

$$\begin{aligned}A\otimes B&=(P^{-1}A_1P)\otimes(Q^{-1}B_1Q)\\&=(P^{-1}\otimes Q^{-1})(A_1\otimes B_1)(P\otimes Q)\\&=(P\otimes Q)^{-1}(A_1\otimes B_1)(P\otimes Q).\end{aligned}$$

由于A_1和B_1均为上三角矩阵，据定义1知$A_1\otimes B_1$也是上三角阵。显然，其主对角线上的元素为$\lambda_i\mu_j$（$i\in\underline{n}$，$j\in\underline{m}$）故$A\otimes B$的mn个特征值就是$\lambda_i\mu_j$（$i\in\underline{n}$，$j\in\underline{m}$）。

2．在上式两边同时取行列式，得

$$\begin{aligned}|A\otimes B|&=|(P\otimes Q)^{-1}|\cdot|A_1\otimes B_1|\cdot|P\otimes Q|\\&=|A_1\otimes B_1|\\&=\left(\prod_{j=1}^{m}\lambda_1\mu_j\right)\left(\prod_{j=1}^{m}\lambda_2\mu_j\right)\cdots\left(\prod_{j=1}^{m}\lambda_n\mu_j\right)\\&=\left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^m\left(\prod_{j=1}^{m}\mu_j\right)^n\\&=|A|^m\cdot|B|^n.\end{aligned}$$

前面已经指出，$A\otimes B$与$B\otimes A$一般不相等。但二者之间有什么关系呢？据例3可知，$A\otimes B$与$B\otimes A$有相同的特征值，因之它们有相同的特征多项式。除此之外，它们还有其他关系吗？

定理1 设$A\in P^{n\times n}$，$B\in P^{m\times m}$，那末

$$A\otimes B\sim B\otimes A.$$

证明 据性质6可知

$$A\otimes B=(A\otimes E_m)(E_n\otimes B).$$

但是

$$A\otimes E_m=\left(\begin{array}{ccc|ccc}
a_{11} & & & a_{1n} & & \\
 & \ddots & & \cdots & \ddots & \\
 & & a_{11} & & & a_{1n} \\
\hline
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\hline
a_{n1} & & & a_{nn} & & \\
 & \ddots & & \cdots & \ddots & \\
 & & a_{n1} & & & a_{nn}
\end{array}\right),$$

调换它的行，同时也调换它的同序的列，易使它变为

$$\begin{pmatrix}
\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} & & \\
 & \ddots & \\
 & & \begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}
\end{pmatrix}=E_m\otimes A.$$

这样调换的结果，也就是说存在满秩矩阵F，使

$$F^{-1}(A\otimes E_m)F=E_m\otimes A\ .$$

同理，把刚才从$A\otimes E_m$变成$E_m\otimes A$应调换的行及列的调动方法施行在矩阵$E_n\otimes B$上就能使

$$
E_n \otimes B = \begin{pmatrix} \begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{matrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{matrix} \end{pmatrix}
$$

变成

$$
\left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} b_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & b_{11} \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} b_{1m} & & \\ & \ddots & \\ & & b_{1m} \end{matrix} \\ \hline \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \hline \begin{matrix} b_{m1} & & \\ & \ddots & \\ & & b_{m1} \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} b_{mm} & & \\ & \ddots & \\ & & b_{mm} \end{matrix} \end{array}\right) = B \otimes E_n ,
$$

因此又有

$$
F^{-1}(E_n \otimes B)F = B \otimes E_n .
$$

于是

$$
\begin{aligned}
A \otimes B &= (A \otimes E_m)(E_n \otimes B) \\
&= F(E_m \otimes A)F^{-1}F(B \otimes E_n)F^{-1} \\
&= F(E_m \otimes A)(B \otimes E_n)F^{-1} \\
&= F(B \otimes A)F^{-1} ,
\end{aligned}
$$

这就证明了$A \otimes B \sim B \otimes A$.

习 题 1.1

1. 试证明矩阵的克罗内克积的性质1—5及性质8.

2. 利用矩阵的克罗内克积的性质证明下列公式:

(1) 设$\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$是同型矩阵, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$也是同型矩阵, 则

$$(\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2)\otimes(\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2)$$
$$=(\mathbf{A}_1\otimes\mathbf{B}_1)+(\mathbf{A}_1\otimes\mathbf{B}_2)+(\mathbf{A}_2\otimes\mathbf{B}_1)+(\mathbf{A}_2\otimes\mathbf{B}_2);$$

(2) $(\mathbf{E}_m\otimes\mathbf{N})(\mathbf{M}\otimes\mathbf{E}_n)=(\mathbf{M}\otimes\mathbf{E}_n)(\mathbf{E}_m\otimes\mathbf{N})$,

其中 $\mathbf{M}\in\mathbf{P}^{m\times m}$, $\mathbf{N}\in\mathbf{P}^{n\times n}$;

(3) 设$\mathbf{x}\in\mathbf{P}^n$, $\mathbf{B}\in\mathbf{P}^{m\times n}$, 则

$$\mathbf{B}(\mathbf{E}_n\otimes\mathbf{x}^{\mathrm{T}})=\mathbf{B}\otimes\mathbf{x}^{\mathrm{T}}.$$

3. 试证明对矩阵的克罗内克积有公式

$$(\mathbf{AB})^{[k]}=\mathbf{A}^{[k]}\mathbf{B}^{[k]}$$

成立, 其中k为正整数.

(4) 设$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$都是正交矩阵(或酉矩阵), 试证明: $\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}$仍是正交矩阵(或酉矩阵).

5. 证明: 两个实反对称(或反厄米特)矩阵的克罗内克积是实对称(或厄米特)矩阵; 但实对称(或厄米特)矩阵与实反对称(或反厄米特)矩阵的克罗内克积是实反对称(或反厄米特)矩阵.

6. 从满秩矩阵说明

$$(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})^*与\mathbf{A}^*\otimes\mathbf{B}^*$$

一般是不相等的. (提示: 利用例3(2)的结果证明之)

§1.2 一元函数矩阵的微分法

如果矩阵$\mathbf{A}$的每个元素都是同一自变量t的函数, 则称

称A为一元函数矩阵，记为

$$\mathbf{A}(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \cdots & a_{mn}(t) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{ij}(t) \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

我们约定，在不致引起混淆的情况下，矩阵右下方的 $m\times n$ 也可以省略。

定义1 如果矩阵$\mathbf{A}(t)$的每个元$a_{ij}(t)$都是 t 的可微函数，则称矩阵$\mathbf{A}(t)$对 t 可微，以

$$\frac{da_{ij}(t)}{dt}=\dot{a}_{ij}(t)$$

为元素构成的矩阵称为$\mathbf{A}(t)$对 t 的导数，记作

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} \quad 或 \quad \dot{\mathbf{A}}(t),$$

即

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}=\begin{pmatrix} \dot{a}_{ij}(t) \end{pmatrix}_{m\times n}. \tag{1}$$

显然，定义 1 也包含了$\mathbf{A}(t)$蜕化成纯量函数$\lambda(t)$及向量$\boldsymbol{\alpha}(t)$的情形。

容易看到，这个定义与通常导数的定义

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{A}(t+\Delta t)-\mathbf{A}(t)}{\Delta t}$$

是一致的。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com