

• 高等学校教学用书 •

岩体力学在 硬岩开采中的应用

GAODENG XUEXIAO JIAOXUE YONGSHU

冶金工业出版社

726
1123

高等学校教学用书

岩体力学在硬岩 开采中的应用

[加] M.L.杰里米克 著
赵玉学 胡潮华 译
苏宏志 校

冶金工业出版社

高等学校教学用书
岩体力学在硬岩开采中的应用

(加)M.L.杰里米克 著

赵玉学 胡潮华 译

苏宏志 校

*

冶金工业出版社出版

(北京北河沿大街嵩祝院北巷39号)

新华书店总店科技发行所发行

冶金工业出版社印刷厂印刷

*

787×1092 1/16 印张 24 字数 577 千字

1990年5月第一版 1990年5月第一次印刷

印数00,001~700册

ISBN 7-5024-0719-7

TD·122 (课) 定价4.70元

译校者前言

本书是根据加拿大劳伦琴大学教授杰里米克博士1987年的新著《硬岩开采中的地层力学》翻译的,根据我国的情况,译本改用现名。杰里米克博士不仅学识渊博,并且具有丰富的采矿实践经验,特别擅长于地层力学。他曾于1984年出版《地下采煤中的岩层力学》一书,本书是它的姐妹篇。原著者自称,本书是为采矿专业的大学生和从事硬岩开采的技术人员写的,不过其内容安排与我国的现行教材有很大差别。全书以地层控制为中心,把岩体力学、采矿方法、井巷工程、爆破工程等有关知识结合在一起,充分体现了基础结合专业与理论联系实际的原则。书中反映了当前硬岩开采的新技术水平,鉴于大多数金属矿山都属于硬岩开采,希望此译本的出版能对冶金系统采矿专业的教学和广大技术工作者有所裨益。

也许是受现场习惯的影响,本书在某些概念上不甚严格,如载荷与强度的单位有时混同等等。考虑到读者不难分辨,因而这些地方一般照原文直译。至于原书的一些印刷错误,则已尽可能在译稿中改正。

书中有一些地下矿山的照片,本来就不太清晰,译本翻制后受印刷条件限制,可能就更难令人满意了,其中有的已予以删除,望读者鉴谅。

本书1~4、13、14各章由赵玉学翻译,序和5~12、15各章由胡潮华翻译,全书由苏宏志校对。

译文的部分初稿曾得到北京科技大学黎彤、刘华生同志的帮助,仅在此表示衷心的感谢。

受学识水平所限,译稿难免有不妥甚至谬误之处,译者诚挚地希望读者批评指正。

译校者

1989年8月

序

本书论述的是硬岩开采中的地层力学问题，这个课题体现了在地层控制与开采方面，应用科学与采矿工程实际经验的结合。在地下开采中，理论原则与自然现象的结合本来就是一项极为艰难的任务，因而难于做到完美无缺，这也是毫不足怪的。

本书作者过去曾写过一本书《地下采煤的岩层力学》，这两本书的写作出发点相同，都是采取了工程师的观点，都着眼于岩石力学原理在地下采矿中的应用。

为了适合广大从事专业工作读者的情况，本书前四章通过主动应力作用下矿山结构的强度、稳定性和变形等方面，简要地阐述了固体力学的原理。接下来的三章，主要考虑如何监测岩石构造中的位移与运动，还研究了岩体的稳定性现象以及采矿工程地层中所存在的主要应力类型。后面五章的内容则多少与美国矿务局关于采矿方法的主要分类相符。对于不同的开采设计，是通过特殊的实例来进行分析的，其基础乃是经验、数值模型，以及包括复杂的开采布置和岩石学在内的其他技术。最后三章所讨论的是地层支护、矿山结构的加固与稳定。这些问题的探讨，多少与前面章节中研究地层稳定性的数据相结合。

作者写本书的目的之一，是要说明在金属矿山中运用地层力学概念的重要性，同时还强调：在科学原理的基础上根据当前的采矿知识所归纳而成的知识体系，要比具体规则更适合我们的需要。目前在地下开采业中，为了达到高生产率，并为了在激烈竞争中谋取利润，技术革新是至关重要的。在实践中仿效不是办法，运用岩石力学的原理和一般概念搞好采矿工程的设计才是根本解决问题的。

岩石力学概念的运用，已终于为地下矿山的监督员们所接受。但是有些研究工作，如有关数值模型的成果，似乎就显得深奥难懂与不切实际，结果在理论模型所提供的解决办法与实际采矿情况之间，就出现了距离。为此，本书自始至终都针对地下开采所观察到的存在问题的稳定现象，来阐述理论原则和解决办法。

本书试图通过对地下采矿技术知识的传播，对这一重要的工程领域作出贡献。本书作者是一位采矿工程师，读者对象为硬岩开采业的专业人员和采矿工程专业的大学生。书中包括了作者本人在实际采矿作业中的经验，也包括了实验室和野外调查的成果与理论分析。书中的一些结论和解决问题的方案，反映了当前地下采矿技术的水平。

作者感谢安大略省西北部诸金属矿中，特别是萨德伯里（Sudbury）市国际镍公司金属分公司（Inco Metals Company）的监督人员们所给予的帮助；还要深深感谢安大略省萨德伯里市劳伦琴大学（Laurentian University）采矿专业大学生们的帮助。

作者要愉快地提到劳伦琴大学所给予的财务资助；还要特别感谢科学与工程系系主任戈洛特萨克（D.E.Golodsack）博士，在他的鼓励下本书才得以出版。多伦多（Toronto）小朗莱斯（Little Long Lac）金矿有限公司的副总经理（特德）韦德（E.J. (Ted) Wade）先生为本书出版提供资助，作者特表铭谢。

曾经阅读手稿并提了建议使本书大为增色的，有作者在劳伦琴大学的同事法拉赫（A. Farah）博士和詹姆斯（R.S.James）博士，还有采矿界的许多同行：国际镍公司金属分公司岩石力学部主任奥利弗（P.Oliver）先生，鹰桥（Falconbridge）镍矿有限公司矿山

工程服务部主任玛森 (M.Masson) 先生, 安大略省劳动部顶板管理主任工程师格雷厄姆 (C.B.Graham) 先生, 鹰桥镍矿有限公司地层控制工程师莫里森 (D.Morrison) 先生, 安大略资源机械中心的经理威尔森 (J.Wilson) 先生, 作者对他们深表谢意。

岩石力学与采矿工程教授
杰里米克 (M.L.Jeremic) 博士
1986年1月1日

目 录

第1章 应力和应变概念	1
1.1 应力原理	1
1.2 应变和应变片花	5
1.3 应力和应变的比例关系	11
1.4 三维应力分析的二维简化	15
第2章 岩石的变形	17
2.1 弹性和塑性变形	17
2.2 体积变形	20
2.3 理想非弹性性态 (流变学)	22
2.4 蠕变	26
第3章 岩石的破坏	31
3.1 拉伸破坏	31
3.2 剪切破坏	38
3.3 剪切拉伸综合破坏	43
3.4 应力释放时的破坏	44
第4章 岩石的强度	48
4.1 抗压强度	48
4.2 抗拉强度	53
4.3 直接抗剪强度	55
4.4 岩石的动力学性质	59
第5章 岩石构造的监测	63
5.1 岩石的变形试验	63
5.2 测定地层运动的装置	67
5.3 应力的测量	74
5.4 微地震监测	81
第6章 地层状况	86
6.1 岩石的不均质性	86
6.2 构造缺陷	91
6.3 地层的失稳	101
6.4 岩体的有效强度	107
第7章 地层应力	116
7.1 初始应力	116
7.2 次生应力	124
7.3 采矿应力	133
7.4 岩爆	138
第8章 矿柱结构	145
8.1 矿柱的分类	145
8.2 矿柱平均应力的估算	150

8.3 矿柱的承载能力	157
8.4 矿柱的稳定性分析	166
第9章 空场采矿法	177
9.1 空场采矿法	177
9.2 空场法采场顶板的自支撑能力	184
9.3 地层应力的力学	188
9.4 空场法采场的应力分析	192
第10章 人工支护的采场结构	198
10.1 主要的采矿方法	198
10.2 矿山充填体的强化	204
10.3 地层应力的力学	210
10.4 充填体与采场之间的相互作用	214
第11章 崩落和放矿采矿法	226
11.1 主要的采矿方法	226
11.2 岩体的可崩落性	232
11.3 崩落力学	237
11.4 放矿力学	243
第12章 空场和充填的联合结构	252
12.1 主要的采矿方法	252
12.2 爆破产生的震动与破坏	259
12.3 充填矿柱的承载能力	268
12.4 地层应力的力学	276
第13章 地层外支护	285
13.1 地层和支护的相互作用	285
13.2 坑木支护	289
13.3 钢支架	298
13.4 水泥支护	306
第14章 地层内支护	312
14.1 锚杆	312
14.2 全长锚固锚杆	316
14.3 锚索支护	324
14.4 加固岩石结构的稳定性	335
第15章 促使地层稳定的方法	346
15.1 地层疏干	346
15.2 地层胶结	351
15.3 地层冻结	357
15.4 地层应力的降低	360

第1章 应力和应变概念

应力的本质可以用描述整个物体应力状态的数学理论来进行分析。力、应力、正应力和剪应力的概念是根据物理定义和这些物理量之间的数学关系建立的。这些原理可应用于任何由连续性物质组成的物体。但在某些情况下，应该对物质（即岩石）的性质做某些限制。

为了评价岩石在地下开采中的特性，必须了解应力和应变的含义，以及它们是怎样与基本规律互相联系的。这样，已知应力或载荷状况下产生变形的各种关系就容易理解了。应该指出，应力和应变的定义是与材料性质无关的，因此也就适用于各种岩石材料。

1.1 应力原理

在这一节里，将分别叙述当岩石受到应力作用时所能见到的几种应力状态。

从理论的观点来讨论应力，必须回到基本原理上来，并说明岩石应力的本质。

关于应力，下面是从非常简单的角度来考虑的，以便于读者理解。关于应力理论的详细论述可以参看一些岩石力学的书籍[1, 2, 3]。

最后应该理解，岩体中的初始应力是由其上部所负的载荷或地质结构的原因产生的，初始应力状态可从物理上加以说明，并用数学描述。

1.1.1 应力的定义

为了弄清应力这一现象，必须从理论上给力以如下的定义：

(a) 体积力（即重力、磁力、地压应力、惯性力等）是在不与其他物体发生物理接触时产生的，它是按单位体积定义的，与岩石的体积和容重有关。体积为 ΔV 的体积力有沿着相应的主坐标系（ x, y, z ）作用的三个合力。

(b) 表面力是与其他物体接触时产生的。当一个物体受某个力系作用而合力及其力矩均为零时，它不具有加速度[1]。

(c) 内力是外力作用在物体上产生的。各内力维持平衡，所以物体不会垮裂。可以通过对作用在任意假设的平面上的力来定义内应力，该平面把一个固体分成了处于平衡状态的两部分（图1.1.1）。设想取平面中一块面积为 ΔA 的微区，作用在该微区上的力为 ΔF ， ΔF 的值将随 ΔA 而变化，但那一点的应力状态是不变的，并且被定义为：

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$

这就是内应力的定义，内应力也可以分解成相应的主坐标系（ x, y, z ）中的各个分力。应该明白，力是一个由大小和方向决定的向量，但应力是一个张量，它不仅取决于其大小和方向，还与它所作用的平面的取向有关。

1.1.2 作用在平面内一点的应力状态

作用于某点的应力状态是按包含该点的一个小单元体来考虑的。若物体处于平衡状态，则由于通过该小单元体的力大小相等而方向相反，应力处于平衡。作用于 X 平面的拉应力，其垂直于 X 平面的分力为 σ_x ，沿着 X 平面的分力则为 τ_{xy} 。第一个下标表示应力所作

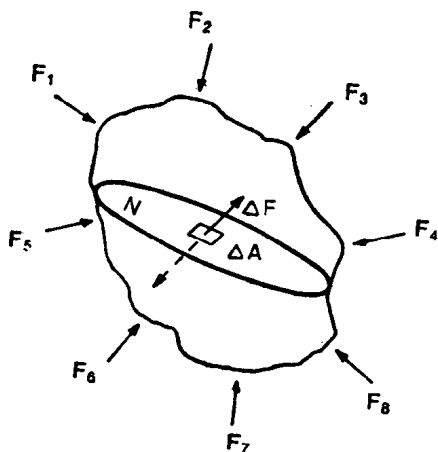


图 1.1.1 表面体积力和内力

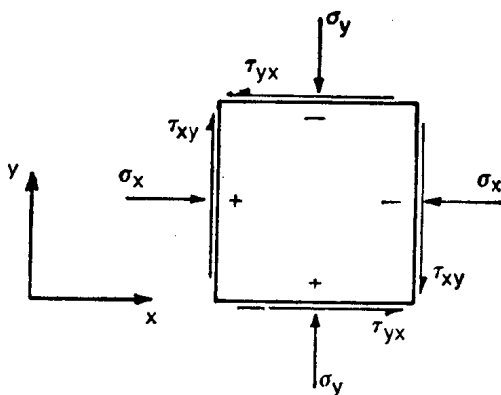


图 1.1.2 处于转动平衡状态的单元体的应力状态

用的平面，第二个下标表示在这个平面里作用的方向。因为正应力的作用方向与所作用平面的法线方向一致，所以两个下标相同，为简便起见省略一个（图1.1.2）。

岩石力学里的符号习惯于使压应力指向坐标轴的正方向，拉应力指向坐标轴的负方向。压应力记作正，而拉应力记作负〔2〕。

考虑小单元体处于转动平衡状态，可写出下式：

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

在这种情况下，应力状态 $\{\sigma\}_{xy}$ 由三个分量 σ_x 、 σ_y 和 τ_{xy} 的大小来决定。

1.1.3 通过一给定平面的正应力和剪应力

在实际应用中，应力的方向是通过正应力分量和剪应力分量来确定的。正应力垂直于平面，剪应力则平行于平面〔2〕。

若已知 $\{\sigma\}_{xy}$ ，便可计算通过任意方向的线应力。

设想一个法线方向与x轴方向成 α 角的平面“N”，则通过这一平面的正应力 σ_n 和剪应力 τ_n 可用如下的变换方程计算（图1.1.3）：

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_n = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

因此，作用于应力场内任一平面上某一点的应力状态都可以计算出来。从物理学的观点看，应力的此种变换与直观感觉完全一致。当然岩石自己并不知道对它的应力状态是如何描述的，但是人们稍加想像便能觉察到，应力是可以从一种状态转换成另一种状态的。

1.1.4 平面主应力

从直觉讲，显然不论参照哪一种预定的坐标系，应力状态都应该是一样的。然而，存在着某一确定的 α 角，在由此角而确定的两个正交平面上剪应力为零，这两个平面称为主平面。作用在主平面上的正应力称为最大主应力 σ_1 和最小主应力 σ_2 。令各个变换方程为零，能求出主应力并找出静止点，所求得的主应力表达式如下：

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\tau_{xy}^2 + \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2}$$

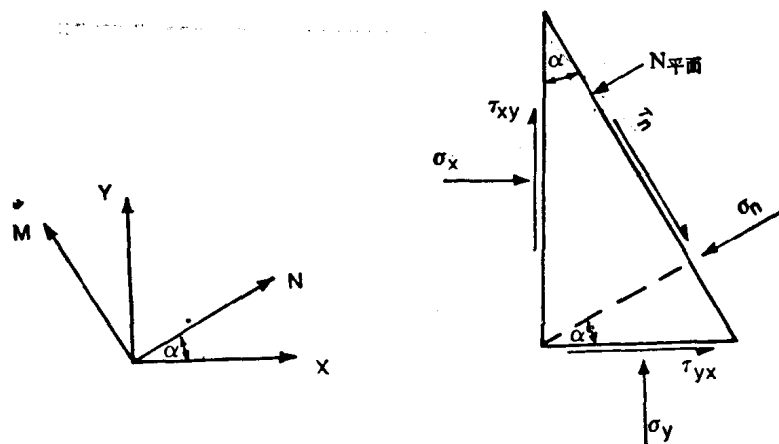


图 1.1.3 同一平面内的应力变换

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\tau_{xy}^2 + \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2}$$

$$\sigma_1 \gg \sigma_2$$

最大主平面的取向由如下方程给定:

$$2\alpha = \tan^{-1} \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

式中 α ——最大主应力与 x 轴的交角。

定义纯剪应力的力系也可以用力系的主应力来表示, 如图1.1.4所示。在这种情况下

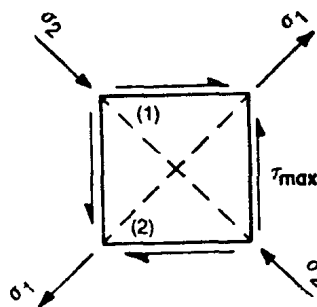


图 1.1.4 主应力定义的纯剪应力

下, 这个应力所作用的两个互相正交的平面是与主平面成 45° 角的^[3]。这种应力状态称为纯剪应力或最大剪应力, 并可由下式给出:

$$\tau_{\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

1.1.5 一点的三维应力状态

一点的三维应力状态可以用和确定二维应力状态相同的方法来确定, 只是包含有更多的项并且更复杂。符号的定义和二维的情况一样, 在每个坐标平面上, 拉应力可分解成一个正应力和两个剪应力。如果某个正压力的指向与坐标轴的正方向平行, 则该剪应力分量的指向如平行于另一个坐标轴的正方向, 则该剪应力分量为正, 反

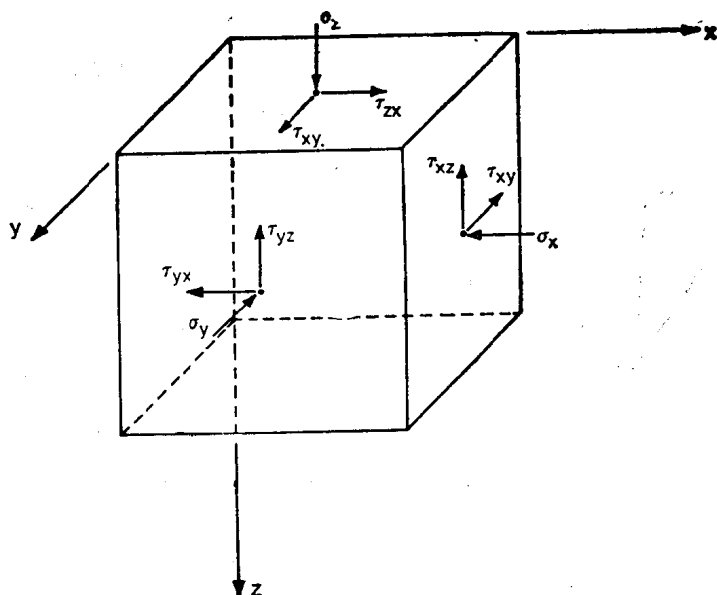


图 1.1.5 三维应力状态

(图1.1.5)[4]。

按照转动平衡，可有

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

作用在其它平面上的应力可用应力变换方程计算出来，这些应力方程除了用两组直角坐标系 (l, m, n 和 x, y, z) 间的方向余弦来确定以外，其余与二维方程相似。用 l 轴代表的平面应力 (图1.1.6) 可用下式表示：

$$\begin{aligned} \sigma_l &= (l_x)^2 \sigma_x + (l_y)^2 \sigma_y + (l_z)^2 \sigma_z + 2(l_x l_y \tau_{xy} + l_y l_z \tau_{yz} + l_z l_x \tau_{zx}) \\ \tau_{lm} &= l_x m_x \sigma_x + l_y m_y \sigma_y + l_z m_z \sigma_z + (l_x m_y + l_y m_x) \tau_{xy} + (l_y m_z + l_z m_y) \tau_{yz} \\ &\quad + (l_z m_x + l_x m_z) \tau_{zx} \end{aligned}$$

式中 l_x —— l 轴和 x 轴间夹角的余弦；

l_y —— l 轴和 y 轴间夹角的余弦；

m_x —— m 轴和 x 轴间夹角的余弦；

其余符号与上面符号的意义相似。

为了得出其它平面的应力，方程中的 l 和 m 可以相应地用 m 和 n 或用 n 和 l 按顺序替换。

对于任意一个应力状态，都存在着这样的三个相互正交的平面，这三个平面上只作用着正应力。这组平面称为主平面，其上作用着最大主应力 σ_1 ，中间主应力 σ_2 和最小主应力 σ_3 ，且

$$\sigma_1 \gg \sigma_2 \gg \sigma_3$$

主应力的值能从特征方程的根求得：

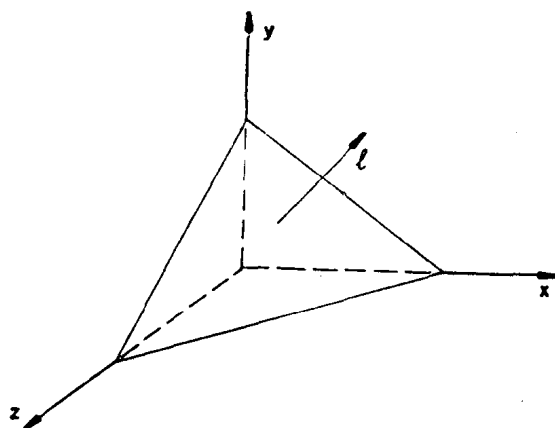


图 1.1.6 平面应力

$$\sigma_p^3 - I_1 \sigma_p^2 + I_2 \sigma_p - I_3 = 0$$

I_1 、 I_2 和 I_3 是三个与坐标轴的旋转无关的应力常量:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - (\sigma_x \tau_{yz}^2 + \sigma_y \tau_{zx}^2 + \sigma_z \tau_{xy}^2)$$

每个主应力方向的方向余弦 λ_x , λ_y , λ_z 可由下式求得:

$$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z = (A, B, C) / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

式中 $A = (\sigma_y - \sigma_p)(\sigma_z - \sigma_p) - \tau_{yz}^2$

$$B = \tau_{yz}\tau_{zx} - \tau_{xy}(\sigma_z - \sigma_p)$$

$$C = \tau_{xy}\tau_{yz} - \tau_{zx}(\sigma_y - \sigma_p)$$

对于采矿工程来说, 三维力的应力状态非常复杂, 特别是采矿中用的所有矿图和剖面图都是二维的。在这种情况下, 可以用分别与 σ_1 、 σ_2 和 σ_3 成 45° 角的平面上的剪应力最大值来表示应力状态, 并可写成如下形式:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

若 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, 则

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

且 $\tau_{\max}$ 作用在平分 σ_1 和 σ_3 夹角的平面上。平分各主平面夹角的平面上的剪应力称为主剪应力。

1.2 应变和应变片花

应变是一个无量纲量, 因为它表示的是比例大小, 例如长度和长度之比或 mm/m , 有时应变也可记作百分数。大多数固体的应变极小, 只有少数例外。例如花岗岩在单轴向压缩破坏时的应变是 10^{-4} 数量级的, 所以在极限强度下, 1分米花岗岩岩心的缩短大约只有10微米, 我们的肉眼是看不见的。

对物体表面 (例如对岩心样表面) 的应变量的测量表明: 在各处应变值各不同, 与沿纵坐标测得的平均应变值有明显区别。对岩石样和岩体的实际研究清楚地表明, 应变的大

小和性质沿着不同方向是不一样的，这是与固体力学理论相符合的〔5〕。

1.2.1 应变的测定

如果对一个固体施加外部表面力，它将产生变形。物体的变形是物体内部质点间相对位移而引起的尺寸和形状的变化。物体变形的几种类型如图1.2.1所示，并简要说明如下：

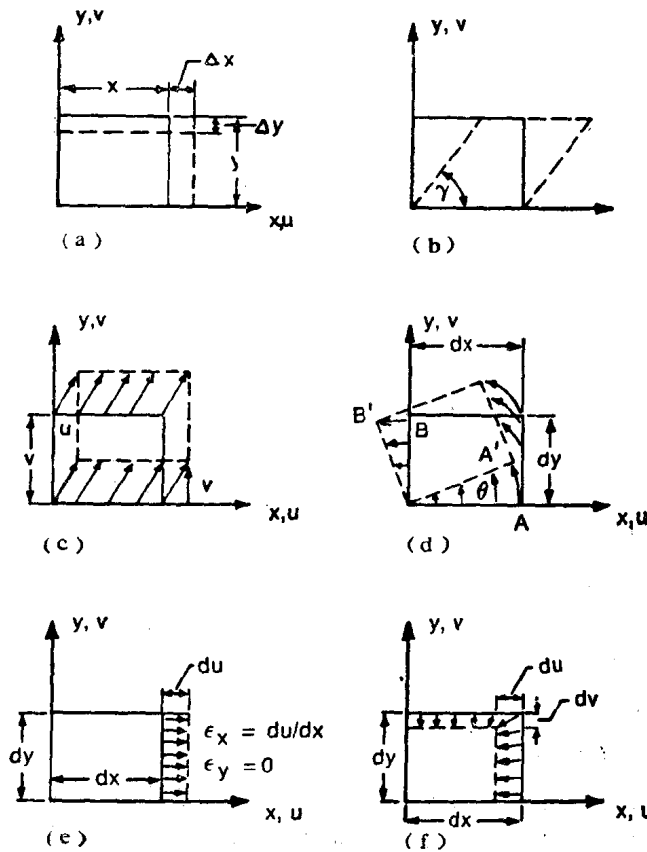


图 1.2.1 位移和应变类型

(a) 线位移；(b) 角位移；(c) 平移；(d) 旋转；(e) 拉伸；(f) 压缩

(a) 线性变形（直线长度的变化）通常定义为长度的变化，以比例数表示。长度变化可以是拉伸也可以是压缩，即 $\epsilon_x = \pm \Delta l / l$ 。

(b) 角变形（两条直线交角 γ 的变化）是由剪切应变引起的。

(c) 平移表示沿水平方向的移动，图中正方形是做为刚体沿 x 轴或 y 轴水平移动的。平移表示正方形上各点有位移，但是正方形上各点的相对位置并无变化，因此没有应变。平移可以用位移分量 u 和 v 表示。

(d) 旋转是另一种可能的移动形式，其移动是有角度变化的，由旋转角控制。

(e) 拉伸表示物体的伸展变形。如原来的正方形经过拉伸，其对边质点就产生了净相对位移（ du ）。与正应变有关的相对位移要在 x 和 y 方向上确定。

(f) 压缩表示由于压缩产生的变形，用正号表示。与正应变有关的压缩相对位移要和拉伸一样地确定，但符号相反。

关于应变现象将从岩石力学方面继续进行讨论，要记住应变也和应力概念一样，分为正应变和剪应变两个分量。

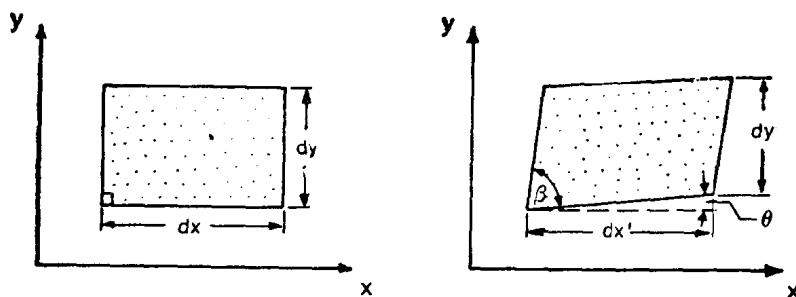


图 1.2.2 应变前后的单元体

1.2.2 一点的二维无限小应变

下面考虑加载前（应变前）和加载后（应变后）的矩形单元体，如图1.2.2所示。这种变形条件下的应变按下式计算：

$$\varepsilon_x = \frac{dx - dx'}{dx}, \quad \varepsilon_y = \frac{dy - dy'}{dy}$$

$$\gamma_{yx} = \gamma_{xy} = \beta - \frac{\pi}{2}$$

正应变以 ε 表示，其方向以下标 x 和 y 表示。剪应变以 γ 表示，两个下标分别表示平面和方向。

压缩正应变为正，从而与取正号的压缩应力一致，它表示单位长度线性变形的大小；而剪应力则表示在变形前是直角的角度变化的大小。角度增加定为正剪应变，和正剪应力一致。

其它平面的应变可用应变变换方程计算出来，应变变换方程和应力变换方程相似，只是用 ε 代替 σ ，以 $\gamma/2$ 代替 τ 。

$$\varepsilon_N = \frac{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{2} + \frac{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{2} \cos 2\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\alpha$$

$$\varepsilon_T = \frac{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{2} - \frac{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{2} \cos 2\alpha - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\alpha$$

$$\gamma = (\varepsilon_y - \varepsilon_x) \sin 2\alpha + \gamma_{xy} \cos 2\alpha$$

与小单元体的变形机制相应，沿法向轴的应变有一个正的最大值，而沿切向轴有一个负的最大值。

1.2.3 主应变

没有剪应力的平面应力概念也能适用于应变，此时存在着无剪应变平面，称为主应变平面。主应变的大小和方向可用类似的方式计算出来。结果也与应力类似，只是要以 ε 代替 σ ，以 $\gamma/2$ 代替 τ 如下：

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \sqrt{\frac{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2}{4} + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \sqrt{\frac{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2}{4} + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\frac{\gamma_{\max}}{2} = \pm \sqrt{\frac{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2}{4} + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

式中 ε_1 ——最大主应变；

ε_2 ——最小主应变。

此时与剪应力相似，可以推导出纯剪应变的表达式如下：

$$\gamma_{\max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

因此最大剪应变等于两个主正应变之差。主正应变之和等于分别沿 x 轴和 y 轴的应变之和，两者将有共同的应变平面。

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

在这种情况下，物体受拉和受压时，正应变的和是不受直角坐标轴转动影响的不变量。

最后，必须说明主应变的方向和主应力的方向不一定重合，只有对各向同性的材料（各方向力学性质相同）二者才重合，对各向异性材料并非如此。

1.2.4 应变和位移的关系

知道了某点的应变，并不足以确定该物体的位移。因此必须了解体积内的应变总和，才能用来分析物体内的位移。

位移通常用变形前后相应点之间的向量来代表，并用与 x ， y 和 z 直角坐标轴的关系表示。 x ， y 和 z 方向的位移分别用 u ， v 和 w 表示。为了说明应变和位移的相互关系，下面用已经变形的二维单元体来加以说明。

对于微小的位移（线位移和角位移）， A 点和 B 点的位移示于图 1.2.3。假想位移很小，

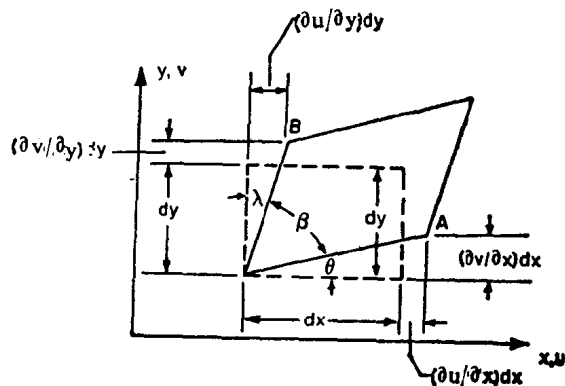


图 1.2.3 单元体的变换和变形

含高阶导数的项可以忽略，则应变可写成：

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

对于三维单元体，这几个量可表示为：

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad \gamma_{yz} = -\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \gamma_{zx} = -\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

由图1.2.3可得到下式:

$$\theta = \frac{(\partial v / \partial x) dx}{dx + (\partial u / \partial x) dx}$$

根据假设, 位移是微小的, θ 角很小, $\theta \approx 0$ 。因此 $\partial u / \partial x$ 相对于1也是很小的, 可以忽略, 于是得到:

$$\theta = \frac{\partial v}{\partial x}$$

同样可得到:

$$\lambda = \frac{\partial u}{\partial y}$$

最后必须指出, 对于应用岩石力学的多数问题来说, 因为只在两个方向存在应变, 所以应变的平面解就可满足需要。例如在平巷或采场中, 第三个应变 ε_z 必定等于零, 因为在轴向上不能发生变形^[7]。

1.2.5 相容方程

为了使物体内部不产生空隙和重叠, 应该承认位移连续原理, 因此可为连续体提出微分方程, 即下列所谓圣·维南 (Saint Venant) 相容方程^[5]:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}$$

$$\frac{2\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{2\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{2\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

因为应变分量有六个, 而位移分量只有三个, 所以必须利用上述相容方程来减少未知应变的数目, 以便求解。

最后应该指出, 相容方程不能应用于不连续的介质, 因为在这种场合下, 物体内部的位移场可能是不连续的。

1.2.6 应变片花

应用应变片来测量岩石中任一给定点的正应变, 可以比测量剪应变更快速更准确。这样就需要一种从一系列正应变测量数据来计算主应变的方法。确定主应变的应变片花法的基本方程是: