大學用書選譯

經濟數學

著者 R. G. D. Allen
譯者 夏慧文

教育部出版
正中書局印行

大學用書選譯

正中書局印行
教育部出版

經濟數學

夏慧文譯
R. G. D. Allen 著

中華民國五十二年十二月臺初版
中華民國六十四年十一月臺三版

大學用書選譯 經濟數學

全一册　基本定價 平二元一角 精二元二角

(外酌酌加運費匯費)

著者　R. G. D. Allen
譯者　夏慧文
出版者　教育部
發行人　黎元譽
發行印刷　正中書局
(臺灣臺北市泰安街一巷三號)
海外總經銷　集成圖書公司
(香港九龍油麻地北海街七號)
海風書店
(日本東京都千代田區神田神保町一丁目五六番地)
東海書店
(日本京都市左京區田中門前町九八番地)

新聞局出版事業登記證　局版臺業字第〇一九九號(4574)輿
(500)

譯　者　序

每門科學的發展，無不從質的敘說而進至量的推算。數學就是計量的科學，也是研究其他科學在方法上不可缺少的科學，所以數學乃是科學的科學。任何一種科學，若研究兩種或多種現象時，常常運用數學方法爲分析其理論的工具；且一般抽象概念，亦往往可以化成數學符號來解析。

許多經濟現象，即是數量現象。譬如所得、投資、消費、價格、需要、供給、資本、利息等經濟概念，都離不了數量的考察；而數量與數量相互依存的關係，又正可以函數式表示出來。艾奇瓦斯 (Edgeworth) 等提出無差別曲線，瓦爾斯 (Walras) 以數學式來表現均衡論，都是由數學分析創造出嶄新的經濟學說；馬歇爾 (F. Marshall) 等更利用微積分學與曲線來闡明效用和其他重要原則。

在現實的應用上，複雜的經濟現象，常有賴於簡明的數學式描繪，俾使一目了然，無須藉助於文字解析。例如消費者的行動，懸於極大效用的獲得，以決定其消費量的多寡，生產者的行動，亦在如何使商品價格減少生產費用，以獲得最大利潤；我們要達到效用極大，利潤最大的目標，借用微分學的極值理論，便可得到解決。

本書已將經濟上的數學知識，由淺入深闡述其原理，以明公式的由來；並舉實例甚多，以明其應用的所在。本書、實不失爲當代稀有之世界名著，故各國大學多採爲教本。譯者民國廿三年至民國廿六年曾在國立北平大學法商學院經濟系講授經濟數學，是時惜無此一完善教本（初版 1939 年，最新版 1956 年），今特譯出，以便國內學者之研究。

本書原名爲 Mathematical Analysis for Economists 簡譯爲經濟數學，由英國倫敦麥克米倫公司 (Macmillan and Co., Limited) 出版，1939 年初版，1942 年，1949年，1950 年，

1956年均曾再版。本書係根據 1956 年版譯出。該書 1950 年版增編五章，以爲學者深造之研究，但各大學尚少採用，故暫緩譯出。

譯者來臺後常患氣喘症，疏略之處，在所難免，甚望先進不吝指教，俾於再版時改正。

中華民國四十七年六月夏慧文誌於臺北

本書之譯成，多承吾師柳潛植先生與李立侯先生的鼓勵，而兩師均在本書校刊前先後逝世，敬以此書紀念他們。

四九　一、十二。

原　　　　序

本書編著的原旨，在提供研究經濟學人士以有關之純數學課程。其主要內容以倫敦經濟學院自 1931 年起的歷年講稿爲主。書中沿用了一些數學方法去闡述經濟學理上一些問題。並於每章另加一些習題，以便讀者解答，務使此項數學工具能純熟並貫通運用於經濟問題之上。本書的編列無意於數學底經濟理論系統的闡釋，但其要點完全涵育在各章節的例證裏。

著者爲使本書能適用於不同程度的讀者，故前數章以曾在預科修習數學的學生爲主，後數章才能配合有志深究的一些讀者。對於更欲深造的，則前半部僅能提拱溫故查考的作用，必須著重其後半部的研討。其中數章不無較新意見，似亦可提供有經驗的數理經濟學者一些參考，並用求教正。

本書承蒙數學與經濟學兩方面學者多人的協助和指示，像皮理教授 (A. L. Bowley) 與馬歇克博士 (Dr. J. Marschek) 之校訂，奈施 (G, J, Nash) 先生之校讀，特於此誌謝。

R. G. D. 亞倫
一九三七年十月
於倫敦經濟學學院

本書使用的文字符號

本數學解析中使用的文字符號除英文字母外，並有希臘文字母。數學上使用希臘文字母作符號並無一定規則。下表所列乃通常較實用的，但須注意這裡所用的英文字母是在數學慣例中與希臘文字母相稱的字母。

希 臘 文	英 文	一 般 用 法
α alpha	a	常數
β beta	b	
γ gamma	c	
κ kappa	k	常數，媒介變數
λ lambda	l	
μ mu	m	
ν nu	n	
ξ xi	x	變數
η ēta	y	
ζ zēta	z	
π pi	p	特別常數或變數（例如：π 爲圓周與圓的直徑之比率，以及 ρ 爲利息率。）
ρ rho	r	
σ sigma	s	
τ tau	t	
φ phi	f	函數的運算符號
Φ cap. phi	F	
ψ psi	g	
Ψ cop. psi	G	
∂ delta	d	指變數增分的運算符號
Δ cap. delta	D	
Σ cop. sigma	S	合計的符號
ε epsilon	—	小的正常數
θ theta	—	正的分數

在三角法中，α, β, γ, 表示一定角，θ, φ, ψ表示變動角。

本書係教育部從積存譯稿中選印，列爲大學用書之一。除教育部印製規定册數免費供應僑生閱讀外，由正中書局訂約加印發行。

目　　錄

第三章 初等解析幾何學

第四章 函數的極限和連續性

第五章 經濟理論的函數及圖解

第六章 導函數及其解釋

第七章 求導函數的技術

第八章 導函數的應用

第十二章　偏導函數及其應用

第十三章　微分與微分法

第十四章 極大與極小問題

第十五章 一變數函數積分

經濟數學

第一章 數與變數

1.1 引　　言

數學照例可分爲兩種獨立的學問，即幾何學與解析學。幾何學爲研究空間及空間關係的學問，我們所研究者即係自然性質的曲綫，面，及其他空間點的形狀。數學的解析包括算術與代數，乃用數研究諸數之關係，並作成諸關係間的演算。這兩門學問的區別就是一個用幾何的空間"點"，一個用解析的"數"。

但因數學技術的進步，幾何學及解析學間的區別已漸不明顯，在應用上二者之間仍有甚大分別，但其方法在性質上抽象而彼此類似。數學包含各種符號的定義及以一定不變的方法演算，故欲區別幾何與解析的符號應用，多少有點武斷，把幾何上空間點與解析上的數，用方法結合起來是件簡單的事。例如代數的作圖法，初等三角上應用代數方法去研究空間形狀，這些都是點和數的結合。

數學技術是抽象的，且必會發展與實用分離；其性質也是邏輯的。例如，初等幾何便多半是形式邏輯的運用，亦即由學術上的假設演繹而構成之原理的運用。談到數學方法的發展，我們立即要應用上一種與形式邏輯學無關的"無限大"的和"無限連續"的概念。廣泛言之，數學方法即是形式邏輯的一個分枝，乃涉及"有限"和"無限"的學問。除了邏輯理論上的要求以外，數學的惟一要求就是關涉到"無限"的引用。

所以我們都相信邏輯的方法與數學的方法之所以不會衝突是有根據的。作爲形式邏輯的表徵和延伸的數學，只能在特殊意義中，視爲邏輯的替身。有些問題用簡單的邏輯理論去解釋已經够了，引用數學符號方法反而治絲而棼之。所以適用範圍有限的形

式邏輯，的確不足應付太多的問題，數學的應用和發展乃應運而起。

數學雖是抽象的發展，但並不是像下棋一樣的使人迷惑的多元空間的東西，其在任意狀態中，依從所設定的法則。發明數學的方法，乃爲使在科學範疇內作實際的或預期的應用，並以解釋所觀察的，摘要的，和分類的各種現象。然而應用的性質是不能誇張的，科學的現象各色各樣，被依從的定律，現示出的一律性，皆非從數學而來。把各種現象體系化，數學僅能給它們予以說明和解釋，幫助我們推出他們的結果，或預告推論無誤時所將發生的現象，並告訴我們怎樣找出假設的證明及假設中的矛盾。

我們探討中的現象，一旦與空間表號（圖形）或數字表號發生聯繫時，便立即要用上數學方法；我們探討中的事象，只要可以用空間的點去確定其位置時，或有可以用數字去表示或衡量的性質時，也立即要用上數學的方法。以下所論列其主旨，就是在闡釋某些數學法則；各種法則應用的範圍和性質，在許多地方都要被提到，即是說，數學方法在經濟學理論中的適應性，是已被研討到了。

總而言之，數學技術的基本功用，近年來已大爲重視。的確有些令人眼花撩亂的問題，總要使其以一種可以解說的形態出現，使能用醒目的語句去表達，好像數學哲理一樣。有好些問題的性質，在用本書所用方法去處理時，可以從多方面來觀察，但當適可而止，不必向牛角尖上追求，因爲越向數學的基本原理方面去探求，越會覺得那些已有的道理站立不穩。這並不要緊，因爲沒有別的方法可用時，這些漫無止境的數學方法仍然有用。

1.2 各種類型的數

"數"的自明是無容解說的，但數的系統並不簡單，而且在算術和代數中，數的應用自如而又複雜。數學解析是從最簡單的算術觀念中依理性逐次發展而成，故表明它如何發展，並將種種不同的數予以分類，當非難事。在現今數學解析高度發展的形態

下，其性質與其實用性，已被相當重視。

在算術中我們最初有整數 (integers) 的或自然數的概念，即是與計算法有密切關連的概念。所以計算也可說，整數並不被認爲一定涉及順序的和計量的兩種不同觀念。整數的基本性質，是可以依序繼續寫下去，永無止境：

1, 2, 3, 4, 5, ………………

整數能用以表示任何順序或次序，是亦計算對象之一。在此我們有運算的順序和整數的順序。除此以外整數還有更多的功用，如我們說四個人，四頂帽子，四根手杖，其中並不含任何次序概念，衹是簡單地說一些人 一些帽子，一些手杖，"一些"用數表示之爲四。事實上在這三個"一些"的事物之間，有一完滿的符合 即每一個人可能戴一頂帽子，拿一根手杖，這就是運算的計量及整數的計量。一方面使我們能說有多少人，多少帽子和多少手杖；一方面又予我們以計量的基礎。

運用整數算術，我們知道兩個或兩個以上整數加與乘的結果，其和與積也是整數。不過當我們研究乘法的反對法時，卻馬上發生困難，如一個整數被另一數去除，在大多數的情形下是得不到整數的，例如我們只可以說"七被三除是不行的"，或者說"得二餘一"。把數系延伸，我們可以說"分數"(fraction)是數的新類型。擴大數的範圍，整數與分數皆屬有理數系統。有理數都可以像整數一樣無止境的用十進位法明顯的寫出來*。順列的有理數有一順列的整數所沒有的性質，有理數不僅可以無限伸張，並且有無限的「稠密性」。例如我們可以在順列的任意兩個數中寫出許多分數，像 $\frac{1}{2}$ 與 1 間。加，乘，除的演算，都能擴大其應用到有理系統之中。

但即使是有理數，算術演算法仍缺乏一致性。如求已知數平方根的過程，一些平方根如 36, 169 及 $6\frac{1}{4}$ 立刻可以知道爲有理數。但是這僅是少數情形，大多數的平方根如 2,3 及 5 均不能

---

* A certain amount of duplication must be eliminated by writing $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$……, for example, in the simplest equivalent form $\frac{1}{2}$.