測量平差

武汉測繪学院測量学教研組 編著

測繪出版社

測量平差

武汉測繪学院測量学教研組 編著

測繪出版社

1959·北京

内 容 簡 介

本教材是由武汉測繪学院測量学教研組在党委、教师、学生三結合的方式下按照教育革命后所訂的"測量平差教学大綱"編写而成。适用于天文大地測量專業，亦适用于航空攝影測量專業及工程測量專業。

本書的內容主要是討論測量平差基本的理論和方法、三角測量平差（其中以三四等三角測量平差为主）、三四等水准網平差及小三角網的近似平差，一切計算方法与程序均作了詳細的說明。

本書的函授指导書正在編写中，出版后，可供函授生自学时參考。

測 量 平 差

編 著 者	武汉測繪学院測量学教研組
出 版 者	測 繪 出 版 社 北京宣武門外永光寺西街3号 北京市書刊出版業营業許可証出字第081号
發 行 者	新华書店科技發行所
經 售 者	各 地 新 华 書 店
印 刷 者	北京市印刷一厂印刷

印数(京)1—4,000冊　1959年8月北京第1版
开本787×1092 $\frac{1}{16}$　1959年8月北京第1次印刷
字数517,000字　印張23[illegible]　插頁2
定价(10)3.00元

前　　言

一九五八年，党提出了教育为政治服务，教育与生产劳动相結合的教育方針。在这一方針的鼓舞下，我院的教育革命轟轟烈烈地展开了。我組教师积極地投入了这一运动，与天文大地系的同学們一起，在教育思想、教育政策、教育業务等方面进行了大辯論，批判了教学脱离生产、理論脱离实际、業务脱离政治的傾向，使我們認識到破旧立新的重要性。根据党的指示，师生共同研究，并考虑到教学計划的分工，决定編写一本以測量平差基本理論和三四等控制測量平差計算为主要內容的教科書。以已有的初稿为藍本，在党的領导下，教师、学生共同进行反复地討論和研究，确定了本書的內容。

整个編写过程是在力求符合实踐——理論——实踐的認識規律的前提下进行的，除了在理論方面作了比較詳細的闡述外，还特別注意理論在生产实际中的应用，如典型圖形平差一章，对生产中一些常用的圖形作了重点的討論。書中凡有代表性的例題均作整套計算，以求得对平差計算有个完整的概念。

在編写过程中，收集到一些生产單位的成功經驗，充实了本書的內容，其中有如类似于史賴伯第一法則的方法作克呂格分組平差，按角度进行坐标平差以及用克朗斯坦非法解法方程式等等。

由于本組教师水平有限，編写时間又很短促，內容的錯誤和缺点在所难免，請采用本書的同志們多多提出宝貴的意見，以备再版修訂时参考。

本書在編写过程中，得到党委和天文大地系党总支的支持和关怀，特此表示衷心感謝。大地測量教研組的同志們曾为本書进行評閱，提供了宝貴意見，另外还有很多同志、同学对我們的編写工作給予很大的帮助，在此一併致謝。

武汉測繪学院測量学教研組

目　　录

緒　論

§1 观測誤差

当对某量进行多次观測时，其所得結果总是不一致的，相互之間存在着一些差別。例如，在直綫丈量中，对某一段距离进行往返丈量，两次丈量的結果往往不能一致；观測一平面三角形的三个內角，其和不等于180°。这些現象之所以产生，是由于观測值中存在着誤差的緣故。

产生誤差的原因，总的来說有下列三个方面。

(一)观測过程通常是將观測时所采用的量度單位与被观測的量进行多次的、重复的比較；这一工作是依靠特制的仪器来进行的。尽管所使用的仪器多么完善，但仪器的本身不能完美無缺，它必定存在着誤差，因而对这些观測值都不可避免的要产生誤差。

(二)观測过程中不論观測者工作如何仔細，由于观測者的感覺器官的鑑別能力不是那么完善、准确，所以，不論在仪器的安置、瞄准、讀数等方面都將会产生誤差。

(三)观測时所处的外界条件，时刻随着溫度、空气湿度、風等等的自然条件的变化而变化着，因而在这样的客观环境下所进行的观測，其观測結果必然会含有誤差。

从上述三个方面分析的情况来看，在整个的測量工作中，誤差是不可避免的。因而，我們所进行的一系列的測量工作，是为了求出某一量的正确結果。这个整个的过程，也就是与誤差作斗爭的过程。

按誤差的性質，可以把它分成系統誤差与偶然誤差二类。至于錯誤，那是由于观測者在工作上的粗心、疏忽大意而造成的，例如測錯，記錯，算錯等等。为了發現和消除錯誤，除采取必要的校核以外，更重要的是提高观測者的覺悟程度，以認眞負責，严肃細致的态度进行工作。

系統誤差　在相同的观測条件下，作一系列的观測，如果观測的誤差在大小、符号上表現一致性，或者按一定的規則变化着，或者保持常数，那么这种誤差就称为系統誤差。

系統誤差之所以产生，是由于仪器的構造不完善，或者工作前沒有很好的校正仪器。譬如20公尺長的鋼帶尺，比标准尺長一个a值，或者短一个a值，那么用这样的鋼帶尺所量出的距离S，就包含着$\frac{a}{20}S$的誤差。这就是由于仪器構造上不完善而形成的系統誤差。这种誤差的大小与距离成正比，距离越長，所积累的誤差就愈大。如果水准仪望远鏡的視准軸不平行于水准軸，这就使得在水准尺上的讀数产生誤差，这种誤差与水准仪至水准尺間的距离成正比，也是系統誤差。

外界条件，如空气的溫度、地球的弯曲、折光等也是产生系統誤差的重要因素。如

果鋼尺在野外丈量距离时的溫度与鋼尺檢定时的溫度不同，那么，丈量的結果就含有因溫度变化而产生的系統誤差。

观測者的感覚器官及鑑别能力的不完善，也是产生系統誤差的来源之一。例如某些观測者，在观測时总是習慣把望远鏡的十字絲对准目标中央的一側。这种誤差以及类似于此的誤差，都具有系統誤差的性質，通常称为人差。

系統誤差在一定的条件下，可用各种方法加以消除，或者改正，或者减少其影响的程度。譬如，已經知道鋼帶尺的長度改正值 a，那么距离 S 的系統誤差就可以設法消除。水准測量时如果前后視距离相等，那么由于視准軸不平行于水准軸而引起的水准尺上讀数的誤差，对于所測定的高差就沒有影响。其他如改变观測方法等，諸如此类的一切措施，就可以使系統誤差消除，或大大地減小其影响。关于如何来处理系統誤差的問題，主要是在有关的專業課程中討論。

偶然誤差 在相同的观測条件下，作一系列的观測。如果观測的誤差在大小、符号上都不表現出一致性，即每个誤差的大小及符号从表面現象上来看，沒有任何規律性。那么，这种誤差就称为偶然誤差。

例如，量距时估讀公厘数的誤差，水准測量时的讀数誤差，望远鏡的照准誤差等等。

整个自然界是一个永不停止的、变化着和發展着的客观世界，一切事物包括着观測条件在內，它始終是在某种范圍內变化着。因此，尽管从表面現象上来看，虽然观測的条件相同，但实际上每次观測都是在不断运动变化着的客观世界中进行。例如溫度、濕度、明亮度及空气流等的瞬間变化，这些就必然使得測量結果不可避免地帶有偶然誤差。

系統誤差与偶然誤差，在观測中經常是同时發生的。問題是兩者在观測結果中誰佔主要的地位。当观測中有显著的系統誤差时，那么偶然誤差就居于次要地位。由于我們对系統誤差总是設法加以消除，或使其影响大大減少，因而偶然誤差就居主要地位，使得观測誤差呈現出偶然性質。

当偶然誤差在观測結果中起主导作用时，应該如何来处理它，这就是本課程所要研究的內容。为了討論問題时清楚起見，我們假定观測值中沒有錯誤，也沒有系統誤差。但必須注意到，不是經常可能預知系統誤差的来源，并使观測結果完全脫离其影响的。因此，实际上所得到的一系列观測結果，通常是含有偶然誤差与系統誤差的。問題是要使系統誤差的来源对观測結果的影响，或者完全消除，或者減弱到比偶然誤差来源的影响要小得多。这样，偶然誤差在观測結果中必然佔主要的地位。

前面已經提到，偶然誤差从表面現象上来看，其誤差的大小及符号沒有任何規律性。如果片面地、机械地来理解它的意义，那么本課程似乎就沒有什么討論与研究的必要了。

偶然誤差的产生，不能說这些事实与現象是無緣無故的。

形而上学者認为現象或者是偶然性，或者是必然性，机械論者則完全否認了事物的偶然性，辯証唯物主义者認为，世界是有規律的、运动着的客观世界，肯定了必然性与

偶然性是相互联系着的，偶然性只是必然性的一种表現方法与补充。

恩格斯說过“凡表面是由偶然性起作用的地方，这种偶然性本身，始終是服从于內部隐蔽的法則”。因而問題是在于实事求是地把这些規律寻找出来。根据無数的測量实踐，人們發現在相同观測条件下，大量的偶然誤差确呈現出一定的規律性。这种个別事象呈現偶然性，而大量事象呈現規律性的現象，这是普遍存在于客观世界的辯証規律之一。

§2 本課程的任务和內容

本課程的任务，就是运用辯証唯物的观点，来揭露和闡述偶然誤差的規律性，并在这一基础上，研究和解决偶然誤差在測量过程中所引起的問題。

这些問題包括下列几个方面。

(一)根据帶有偶然誤差的观測值求出最可靠的結果 为了檢查錯誤和減少誤差的影响，我們通常使观測值的个数多于未知量的个数，即作多余观測。譬如，一条导綫边丈量一次就可以算出長度了，但我們丈量了两次或两次以上；一个三角形只需观測其中的两个角即可决定其形狀，但我們通常是測定三个角。此时，由于每一观測值中都帶有誤差，观測值之間就产生了差異，或称矛盾。这些差異需要合理地消除，使得消除差異后的观測值就是观測量的最可靠值。

(二)評定精度 既然有观測誤差，我們就必須知道这些誤差对測量成果的影响，考核測量成果是否滿足生产建設工作的需要，測量的誤差是否超过允許的誤差限度。由于誤差表現出偶然性，这就絕不能仅根据个別誤差的大小来衡量精度。因此，我們就需要研究如何运用合理的方式来衡量观測精度。

(三)研究測量工作最合理的方案和观測方法 各种測量工作，不管工作得如何細致，其結果总是帶有不可避免的誤差。因此，測量工作者的任务，就必須拟定一种測量工作的方案与观測方法，使測量的誤差減少到对观測成果不产生有害的后果。另一方面，有时必須預先估算測量所能达到的精度。这些就有賴于从誤差理論及最小二乘法中所引导出来的許多規律、方法和公式，在实际工作中加以灵活运用。

本書主要內容，按照編排次序，第一部分講述有关誤差理論；第二部分講述运用最小二乘原理来解决水准網、导綫網及三角網等平差問題；第三部分講述或然率理論在測量誤差理論方面的应用。

§3 發展簡史

測量平差与其他科学一样，是由于生产的需要而产生的，并在生产实踐的过程中得到了發展。上节已指出，由于观測值之間有矛盾，就要設法来消除这些矛盾，这就促使人們来研究“平差”的問題。現行的平差方法主要是导出观測值的改正数，它們不仅使矛

盾消除，而且所有改正数的平方和具有最小值，这种方法称为按"最小二乘法"作测量平差。这种方法是在总結前人經驗的基础上产生和發展而成的。如取平均値就是在人們还沒有發現"最小二乘法"之前所采取的一种消除矛盾的方法之一；又如，当三角形三內角的观測値之和与 180° 有一些差異时，就把这些差異平均分配到三个观測値上。在 19 世紀以前的一些三角測量，就是用类似的簡單的湊合方法来平差的。

在生产实踐的需要下，許多观測工作都迫切的要求人們来研究平差的最合理而有效的方法。19 世紀初（1801 年），有位天文学家对谷神星运行軌道的一段弧長作了一系列的观測，后来因故中止了，这就需要根据这些帶有誤差的观測結果进行平差，求出該星最可靠的軌道元素。当时有許多人研究这一問題，其中德国的科学家高斯根据前人取平均値的道理，根据人們已从实踐中总結出来的偶然誤差的規律，应用已有的或然率理論，得出了依最小二乘法作測量平差的方法。另一位法国数学家勒戎德尔于 1806 年也在决定彗星軌道問題上研究出同样的方法，并定名为"最小二乘法"。

此后，这一方法随着測量生产的实踐，不断地發展。苏联在十月革命后，为了滿足社会主义建設事業的飞躍發展，測量工作迅速而广泛地展开。为測量服务的測量平差法，就跟着迅速地發展与提高。广大的苏联測量工作者对測量平差，尤其是对大規模三角網平差方面，对导綫測量平差方面，都作出了很大的貢献。最近又成功地解决了应用电子計算机作大規模三角網的平差問題。

解放前，我国反动統治阶級殘酷地統治与压迫人民。虽然在一些地区进行了部分測圖与平差計算工作，但其質量很差，而且数量極少，測量工作根本談不上有所發展。

偉大的中华人民共和国成立以后，社会主义建設事業以一天等于廿年的速度向前飞躍發展。測繪工作为了滿足国民經济建設及国防建設的需要，也迅速地發展着，因而必須进行大量的平差計算工作，这就为測量平差的發展提供了优越的条件。由于党和政府对測量事業的关怀，以及苏联在科学技术上的無私援助，解放九年来，測量工作有了巨大的發展，在国家測繪总局的領导下，成立了專門的計算室，其他較大的測量部門也成立了相当規模的計算机構，这些机構运用現代的平差計算方法，进行了大量的計算工作，取得了許多丰富的經驗。在 1958 年大躍进的年代里，全国各地制造出許多电子計算机、电流平差仪等新的平差計算工具。这說明了測量工作向尖端科学領域进軍中，已取得了初步成就。

我們偉大的祖国，正以一日千里的速度向社会主义与共产主义社会躍进。在測量工作中將会有很多新的問題，有待我們去解决。因此，所有測量工作者都必須具有共产主义風格，發揮敢想、敢說、敢做、敢創造的精神，鼓足干勁、力爭上游、多快好省地来建設我們偉大的祖国。

第一章 誤差与精度

§ 1-1 偶然誤差的特性

在緒論中已經指出，經过多次实驗証明，在同样的观测条件下，大量的偶然誤差确呈現出一定的規律性。現在我們用下面的一个实例来說明这种規律性。

在同样的观测条件下，观测了162个三角形的全部內角。由于观测不可避免地帶有誤差，三角形內角之和就不等于它的眞值——180°。我們將三角形內角和的眞值 X，減去它的观测值 L，得出162个三角形內角和的眞誤差 Δ，即

$$\Delta = X - L.$$

現按眞誤差絕对值的大小排列，組成表1-1。

表 1-1

誤差大小的区間	正 Δ 个数	負 Δ 个数	总数
0.″0 —0.″195	21	21	42
0.″195—0.″395	19	19	38
0.″395—0.″595	15	12	27
0.″595—0.″795	9	11	20
0.″795—0.″995	9	8	17
0.″995—1.″195	5	6	11
1.″195—1.″395	1	3	4
1.″395—1.″595	1	2	3
1.″595以上	0	0	0
	80	82	162

表列的結果，經过檢驗分析，可以認为仅含有偶然誤差。从这組誤差的分布，表現出：(1)小的誤差比大的誤差多；(2)絕对值相等的正負誤差的个数相仿；(3)最大的誤差不超过1.″6。

同样的規律，在無数的測量結果中都显示出来。因此我們从大量的实踐中，总結出偶然誤差的下面几个特性。

(一)在一定的观测条件下，偶然誤差的絕对值不会超过一定的限值。

(二)絕对值較小的誤差比絕对值較大的誤差出現的机会多。

(三)絕对值相等的正誤差与負誤差出現的机会相等。

(四)偶然誤差的算术平均值，随着观测次数的無限增加而趋向于零，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n}=0.$$

式中 $[\Delta]=\Delta_1+\Delta_2+\cdots\cdots+\Delta_n$。第四个性質是由第三个性質导出的。第三个性質告訴我們，在大量偶然誤差中，正負誤差有互相抵消的性能。当 n 無限增大时，眞誤差的算术平均值是必然趋向于零的。

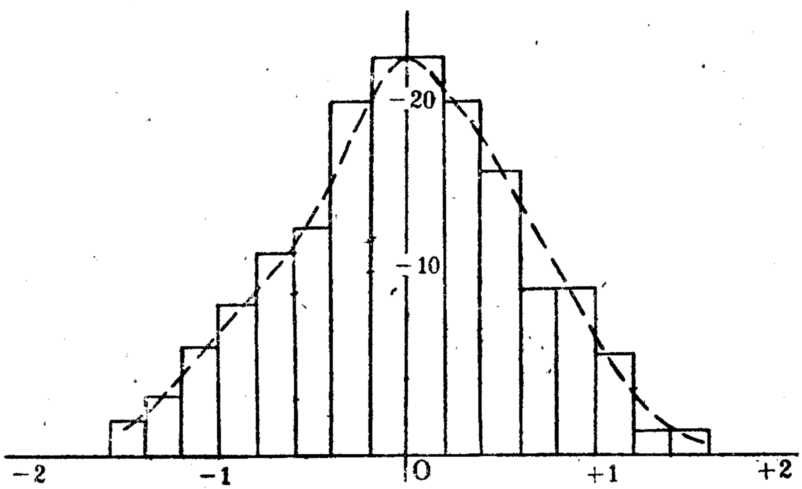

圖 1-1

若將表 1-1 的統計結果，以誤差的大小为横坐标，誤差出現的个数为縱坐标，繪成曲綫（圖 1-1）。在这个曲綫圖上，就比較形象地表現出来了关于誤差的大小与出現的个数之間的規律性。

§ 1-2 衡量精度的标准

在同样的观測条件下，对未知量 X 进行了多次观測。由于存在着不可避免的偶然誤差，它們的观測結果往往是不相一致的。为了說明观測結果的精确程度，必須建立一种衡量观測結果精度的統一标准。

为了衡量观測精度，需要有多余观測。根据多余观測如何衡量其精度，这就是本节所要解决的問題。

衡量精度的标准有几种，我們通常采用的标准是中誤差、平均誤差兩种。

(一)中誤差

設对同一未知量 X 进行多次观測的結果是 L_1，$L_2\cdots\cdots L_n$，每个观測結果相应的眞誤差为 Δ_1，$\Delta_2\cdots\cdots\Delta_n$。我們取各个眞誤差之平方的平均数作为衡量精度的标准，即

$$m=\pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}. \tag{1-1}$$

m 称为中誤差，也就是观測值的中誤差。

从中誤差 m 的定义可以清楚地看出中誤差与眞誤差之間的关系。中誤差幷不等于每个观測値的眞誤差，它仅是一組眞誤差的代表，当一組的眞誤差愈大，中誤差也愈大，精度就愈低，反之亦然。

如果对同一未知量进行兩个組的观測，它們的中誤差相同，表示兩組观測結果的精度也是相同的。

例[1-1]　为了比較兩种仪器的精度，分別对同一角度各进行五次观測，其观測結果列于表 1-2。該角已預先用精密仪器測定，其值为 85°42′05″，由于非常准确，故此处認为眞値。兩种仪器所得观測値的中誤差之計算均列在表 1-2 中。

表 1-2

	第一組			第二組		
編号	L	Δ	Δ^2	L	Δ	Δ^2
1	85° 42′ 10″	−5″	25	85° 42′ 04″	+1	1
2	02	+3	9	10	−5	25
3	06	−1	1	03	+2	4
4	04	+1	1	09	−4	16
5	07	−2	4	11	−6	36
总和			40			82
	$m_1=\pm\sqrt{\frac{40}{5}}=\pm2.''8$			$m_2=\pm\sqrt{\frac{82}{5}}=\pm4.''0$		

$m_1<m_2$，可見用第一种仪器观測的精度比第二种仪器观測精度高。

(二)平均誤差

我們取一組观測値的眞誤差之絕对値的算术平均数来衡量精度，即

$$\vartheta=\pm\frac{|\Delta_1|+|\Delta_2|+\cdots+|\Delta_n|}{n}=\pm\frac{[\Delta]}{n}. \tag{1-2}$$

ϑ 称为平均誤差。

例[1-2]　仍用例[1-1]的数字，計算二組观測的精度。

$$\vartheta_1=\pm\frac{12}{5}=\pm2.''4;\ \vartheta_2=\pm\frac{18}{5}=\pm3.''6.$$

$\vartheta_1<\vartheta_2$，可見前者优于后者。

从以上二例可以看出，中誤差、平均誤差是同样可以衡量观測精度的。中誤差与平均誤差之間的关系，当观測次数 n 趋于∞时，为

$$\vartheta=0.7979m\approx\frac{4}{5}m. \tag{1-3}$$

此式將在誤差理論中証明。当 n 相当大时，中誤差与平均誤差对衡量观测精度同样可靠。但当 n 不大时，中誤差衡量观测精度較为可靠，这是因为大的眞誤差在中誤差計算中能灵敏地反应出来，而对于平均誤差，就沒有这样显明的反映。因此我国、苏联及其他社会主义国家等都采用中誤差作为衡量精度的标准。

最后我們指出，美、英等一些資本主义国家，采用这样的一个誤差作为衡量精度的标准，它在一組誤差中，按其絕对值的大小来說，是居中的一个。这个誤差，称为或是誤差(ρ)（又称或然誤差）。在誤差理論中証明，当观测次数趋于∞时，

$$\rho\, 0.6745m\approx\frac{2}{3}m. \tag{1-4}$$

由于个别誤差的大小具有偶然性，故当观测次数不多时，取其居中的一个（或是誤差）来衡量精度，就不大可靠。因此这些国家在計算 ρ 时，仍是先算出中誤差，再乘以0.6745而得或是誤差。由此可見，采用这样的标准，实际上是沒有好处的，徒然增加計算工作。

§ 1-3　極限誤差

偶然誤差的第一个特性告訴我們，在一定的观测条件下，偶然誤差的絕对值，不会超过一定的限值。如果在測量工作中所出現的誤差超过这个限值，我們就認为观测的質量不好，观测結果就应捨去不用。那么应当如何确定这个限值呢？根据或是率理論及多次实驗的統計証明：大于二倍中誤差的偶然誤差，其出現的机会只有 5 %；大于三倍中誤差的偶然誤差，其出現的机会仅 0.3%。在实际工作中，測量次数是不多的，因此認为大于三倍中誤差之偶然誤差实际上是不可能出現的。为此我們以三倍中誤差作为誤差的限值，称为極限誤差，即

$$\Delta_{限}=3m. \tag{1-5}$$

在現行的规范中，往往提出了更严格的要求，以二倍中誤差($2m$)作为極限誤差。

§ 1-4　相对誤差

对于衡量精度来說，有时單靠中誤差还不能完全表达观測結果的好坏。例如分别丈量了 1000 公尺及 80 公尺的兩段距离，观測值的中誤差均为 ±2 公分。能不能說兩个观測值的精度相同？不能。显然前者的精度比后者为高。为此，应当采用另一种衡量精度的方法，那就是相对中誤差。它是中誤差与观測值之比。如上例中，前者的相对中誤差为 $\frac{2}{100\,000}=\frac{1}{50\,000}$，而后者則为 $\frac{2}{8\,000}=\frac{1}{4\,000}$。相对誤差是个無名数，在測量工作中通常將分子化为 1 。

对于眞誤差与極限誤差，也同样有用相对誤差来表示的。如經緯仪导綫測量中，規定相对閉合差不能超过 $\frac{1}{2\,000}$，就是相对極限誤差，而在实測中所产生的相对閉合差，就

可以說是相对眞誤差了。

与"相对誤差"相对应，眞誤差、中誤差、極限誤差均称为絕对誤差。

在三角測量中，經常会遇到由于測角与量距的誤差所引起的点位誤差問題。如圖1-2所示，在固定点 B 上观測了 β 角，丈量了边長 $BP=S$。由于边長的誤差 Δ_s，使 P 点在边長的方向上移动了 Δ_s 值，这个数值称为 P 点的縱向誤差。由于測角誤差 Δ_β，使 P 点在边長的垂直方向上移动了一个 Δ_u 值，

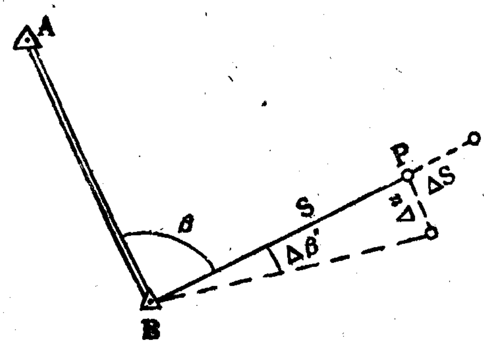

圖 1-2

Δ_u 就是 P 点的横向誤差。显然，縱向相对誤差是 $\frac{\Delta_s}{S}$，而横向相对誤差为 $\frac{\Delta_u}{S}$。由圖1-2知道

$$\frac{\Delta_u}{S}=\frac{\Delta_\beta}{\rho},$$

$\frac{\Delta_\beta}{\rho}$ 实际上就是由弧度来表示角度誤差，可借以与距离丈量的相对誤差比較。例如，边長 BP 的相对誤差为 $\frac{1}{2000}$，而 BP 方向的誤差为 $0.5'$，这时以無名数表示，即

$$\frac{0.5}{3438'}=\frac{1}{6900},$$

也就是說方向对点位的影响比距离的影响为小。

§ 1-5 誤差傳播定律

在§1-2中，我們討論了如何根据多次观測的誤差来衡量观測值的精度問題。但在实际工作中，未知量的值經常是由观測值間接計算出来的。比如：(1)根据圖上量的距离 s，計算实地長度 S。如用 M 表示該圖比例尺的分母，則 $S=Ms$，亦即未知量 S 与观測量 s 成为倍数关系；(2)在导綫測量中，根据轉折角的观測值来計算坐标方位角。由測量学中知道，坐标方位角 α_n 与轉折角 β_1，$\beta_2\cdots\cdots\beta_n$（左角）的关系是

$$\alpha_n=\alpha_0+\beta_1+\beta_2+\cdots\cdots+\beta_n-i\cdot 180^\circ,$$

亦即未知量与观測量間成为和数关系；(3)由同一量的 n 次观測值計算未知量的算术平均值，即

$$x=\frac{L_1+L_2+\cdots+L_n}{n}=\frac{1}{n}L_1+\frac{1}{n}L_2+\cdots\cdots+\frac{1}{n}L_n.$$

这是(1)及(2)兩种情况的綜合，称为綫性函数关系；(4)由导綫边長 S 及坐标方位角 α 計算坐标增量 Δx 及 Δy，即

$$\Delta x=S\cos\alpha,\quad \Delta y=S\sin\alpha.$$

未知量与观测量成为非綫性函数的关系。

这时产生了这样一个問題，即观测値的中誤差与它們的函数的中誤差之間，存在着怎样的关系。闡述这种关系的定律，就称为誤差傳播定律。

首先就一些簡單的函数（倍数、和差、綫性函数）来研究誤差傳播定律，然后討論一般函数的情况。

(一)倍数

設有函数

$$z = kx. \tag{1-6}$$

其中 k 为正确的常数，x 为观测値，其中誤差为 m_x，函数 z 的中誤差为 m_z。m_z 与 m_x 之間的关系，可由眞誤差間的关系导出。

用 Δ_x 和 Δ_z 分别表示 x 及 z 的眞誤差，则由(1-6)式可以知道 Δ_z 与 Δ_x 的关系为

$$\Delta_z = k\Delta_x. \tag{1-7}$$

若共观测 n 次，得 n 个眞誤差 Δ_{x_1}，$\Delta_{x_2}\cdots\cdots\Delta_{x_n}$，由此引起 z 的眞誤差分别为 Δ_{z_1}，$\Delta_{z_2}\cdots\cdots\Delta_{z_n}$，则有

$$\begin{aligned}\Delta_{z_1} &= k\Delta_{x_1},\\ \Delta_{z_2} &= k\Delta_{x_2},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Delta_{z_n} &= k\Delta_{x_n}.\end{aligned}$$

將上式平方，得

$$\begin{aligned}\Delta^2_{z_1} &= k^2\Delta^2_{x_1},\\ \Delta^2_{z_2} &= k^2\Delta^2_{x_2},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Delta^2_{z_n} &= k^2\Delta^2_{x_n}.\end{aligned}$$

相加得

$$[\Delta^2_z] = k^2[\Delta^2_x].$$

兩边各除以 n 得

$$\frac{[\Delta^2_z]}{n} = k^2\frac{[\Delta^2_x]}{n}.$$

根据中誤差定义

$$\frac{[\Delta^2_z]}{n} = m^2_z$$

和

$$\frac{[\Delta^2_x]}{n} = m^2_x.$$

將这些关系代入上式后，则

$$m^2_z = k^2m^2_x$$