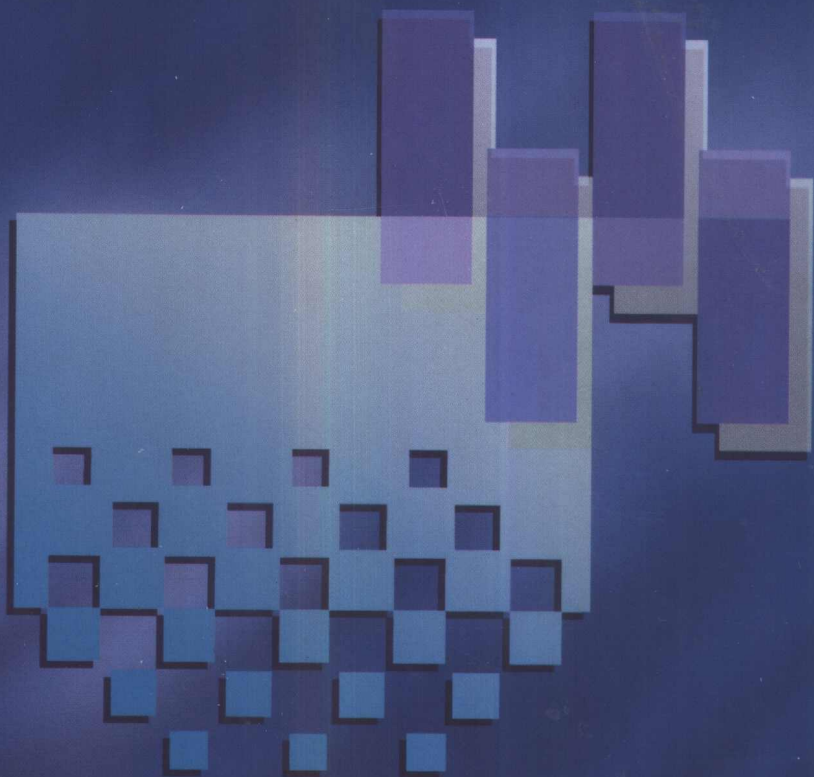


全国水利水电类高职高专统编教材

自动控制基础

匡和碧 主编



866

7112-81

1571

全国水利水电类高职高专统编教材

自动控制基础

匡和碧 主编

黄河水利出版社

内容提要

本书是水电站电力设备自动化专业“水电站自动控制基础”课程的教科书,内容包括:经典控制部分的线性定常系统时域分析方法;根轨迹和频率特性分析法;离散系统分析的基本概念、控制原理和工程设计方法;水电站计算机监控所需的自动化元件的结构、原理、使用方法。本书内容精炼,层次分明,重点突出,理论联系实际,论述深入浅出,既方便教学,又便于自学。本书也可作为高职高专电气、电子、电力、自动控制、信息、自动化、计算机及应用、机械电子等各相关专业的教材,以及作为广播电视大学、业余大学相近专业学生的教材,还可供从事水电站计算机监控设计和研究的人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

自动控制基础/匡和碧主编. —郑州:黄河水利出版社, 2002. 9

全国水利水电类高职高专统编教材

ISBN 7-80621-602-2

I. 自… II. 匡… III. 自动控制理论—高等学校: 技术学校—教材 IV. TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 067868 号

出版社:黄河水利出版社

地址:河南省郑州市金水路 11 号 邮政编码:450003

发行单位:黄河水利出版社

发行部电话及传真:0371-6022620

E-mail: yrcp@public2. zz. ha. cn

承印单位:黄河水利委员会印刷厂

开本:787 毫米×1 092 毫米 1/16

印张:12

字数:277 千字

印数:1—4 100

版次:2002 年 9 月第 1 版

印次:2002 年 9 月第 1 次印刷

书号:ISBN 7-80621-602-2 / TP·15

定价:20.00 元

前 言

本书是根据教育部《关于加强高职高专人才培养工作意见》和《面向 21 世纪教育振兴行动计划》等文件精神,以及由全国水利水电高职教研会拟定的教材编写规划,报水利部批准,用中央财政安排的“支持示范性职业技术学院建设”项目经费组织编写的水利水电类全国统编教材。

本教材的特点是:在内容编排上,既考虑到理论体系的系统性和完整性,又力求做到少而精,删除了那些在现代控制工程应用中不用或与后续课程无联系的内容;突出重点,理论联系工程实际;在撰写方法上,层次分明,通俗易懂,概念清晰,使读者对经典控制理论的体系及水电站自动化元件的作用、原理有一个清楚、完整的认识,并能学会处理实际控制工程的综合方法和正确使用水电站自动化元件。

全书共分六章,主要包括两部分内容。第一部分为控制原理;第二部分为水电站自动化元件。

控制原理部分(第一章至第三章)阐述了自动控制的基本概念,讨论了控制系统数学模型的建立、简化和变换;分别用时域法和频率法,定性和定量地分析了自动控制系统的稳态、动态性能;阐述了控制系统校正综合的基本概念和方法;对离散控制系统基本概念和分析方法进行了介绍。

水电站自动化元件部分(第四章至第六章)根据目前水电站计算机监控的实际情况,阐述了传感器、变送器、信号器、电液转换器、电磁阀、配压阀、步进电机、自整角电机、交、直流伺服电机等装置的基本概念、工作原理、结构及应用方法。

本书由广东水利电力职业技术学院匡和碧主编,并编写第一、四、五章,福建水利电力学校黄瑞梅编写第二、三章,广东水利电力职业技术学院宋海辉编写第六章。

杨凌职业技术学院辛仲轩副教授审阅了本书书稿,并提出了许多宝贵意见,在此谨致以衷心的感谢。

由于作者水平有限,书中错误和疏漏之处在所难免,恳请读者批评指正。

编 者

2002 年 5 月

目 录

第一章 自动控制系统的基本概念	(1)
第一节 引言.....	(1)
第二节 自动控制系统的基本类型.....	(3)
第三节 对控制系统的基本要求.....	(5)
习题一	(5)
第二章 连续控制系统的组成及分析	(6)
第一节 连续控制系统的数学模型.....	(6)
第二节 常规控制器的组成及动态特性	(17)
第三节 连续控制系统的时域性能指标	(22)
第四节 连续控制系统的分析方法简介	(31)
第五节 控制系统的设计和校正方法	(52)
习题二	(63)
第三章 离散控制系统	(67)
第一节 信号的采样和采样定理	(67)
第二节 保持器	(70)
第三节 z 变换法	(73)
第四节 差分方程	(80)
第五节 z 传递函数	(83)
第六节 离散系统的稳定性分析	(87)
习题三	(89)
第四章 传感器	(90)
第一节 传感器的基本概念	(90)
第二节 电阻式温度传感器	(92)
第三节 压力传感器	(96)
第四节 流量传感器.....	(102)
第五节 液位传感器.....	(106)
第六节 位移传感器.....	(111)
第七节 转速信号器.....	(114)
第八节 振动摆度传感器.....	(116)
习题四	(117)
第五章 变送器	(119)
第一节 电压、电流变送器	(119)
第二节 功率变送器.....	(121)

第三节	电量变送器和频率变送器·····	(125)
第四节	功率总加器和变送器精度·····	(128)
第五节	交流变送器·····	(131)
第六节	微机变送器的应用·····	(131)
第七节	温度变送器·····	(136)
第八节	压力变送器·····	(139)
第九节	浮标式遥测液位变送器·····	(143)
习题五	·····	(145)
第六章	传动系统·····	(146)
第一节	概述·····	(146)
第二节	液压马达和液压缸·····	(147)
第三节	电磁阀和电磁空气阀·····	(151)
第四节	电磁配压阀和液压操作阀·····	(155)
第五节	调速阀与伺服阀·····	(157)
第六节	电液比例阀与电液数字阀·····	(162)
第七节	步进电动机·····	(168)
第八节	伺服电动机·····	(172)
第九节	旋转变压器及自整角电机·····	(179)
习题六	·····	(185)
参考文献	·····	(186)

第一章 自动控制系统的基本概念

第一节 引言

自动控制是指在没有人直接参与的情况下,利用控制装置,使生产机械或生产过程的某些物理量按照特定的(恒定的或变动的)规律变化。在水电站和泵站的生产过程中,无论是在机组的安全稳定运行方面还是在优化经济运行方面,自动控制技术都获得了广泛的应用。“自动控制原理”是自动控制技术的基础理论,是研究自动控制共同规律的理论性较强的一门技术学科。自动控制理论主要研究以下两方面的内容:

(1)分析:在系统的结构和参数已经确定的条件下,对系统的性能进行分析,并提出改善性能的途径。

(2)综合:根据系统要实现的任务,给出稳态和动态指标,要求组成一个系统,并确定适当的参数,使系统满足给定的性能指标。

通常,把控制的装置称为控制器;把被控制的设备或工作机械称为被控对象;要求按照特定规律变化的物理量称为被控量或系统的输出量;控制器和被控对象的总体,称为自动控制系统。在控制系统中,把影响系统输出量的外界输入称为系统的输入量。系统的输入量,通常指两种,即给定输入量和扰动输入量。给定输入,又称参考输入,它决定系统输出量的变化规律或要求值。扰动输入是系统不希望但又客观存在的外作用。扰动输入影响给定输入对系统输出量的控制。

自动控制的种类繁多、型式多样,这里先介绍开环控制、闭环控制的概念。

一、开环控制

开环控制是指系统输出端与输入端之间不存在反馈回路,或者说,系统的输出量不对系统的控制产生任何作用的控制过程。

图 1-1 所示的直流电动机调速系统是开环控制的一个例子。电动机拖动生产机械或其他部件运转,生产机械是被控对象,转速 n 是系统的被控量或输出量。电压 u_g 是系统的给定输入量。当改变电位器滑动端的位置时,相应地改变了给定输入量和电动机电枢两端的电压。由于电动机具有恒定的励磁电流,因此随着电枢电压不同,电动机便以不同的转速带动生产机械运转。对应电位器滑动端的一个固定位置,或者说,对于一个固定的给定输入量,生产机械就按一个相对应的转速要求值运转,从而达到了控制目的。

可以看出,上述控制系统的输出端与输入端之间没有反馈回路。系统只是根据给定输入量 u_g 进行控制,而输出 n 在整个过程中对控制作用都没有影响。由定义可知,它属于开环控制系统。开环控制系统的框图可用图 1-2 表示。

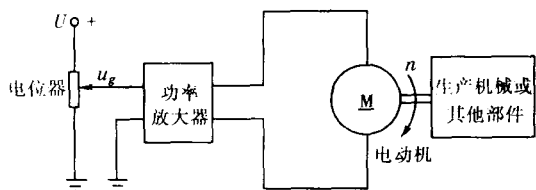


图 1-1 直流电动机开环调速系统

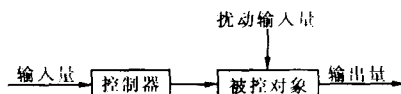


图 1-2 开环控制系统框图

值得指出,当出现外部扰动或内部扰动作用时,若没有人的直接干预,开环控制系统的输出量将不能按照给定输入量所对应的希望值或状态运行。例如,在上例中当输入量 u_g 不变时,若功率放大器的供电电压突然下降或电机负载突然上升,电动机的转速即系统的输出量都会下降。输出量的下降将使它偏离给定输入量 u_g 对应的期望值。这时若要维持原输出值不变,操作人员就必须重新调整电位器滑动端位置,增加给定输入电压值后才能实现。

二、闭环控制

闭环控制是指系统输出端与输入端之间存在反馈回路,或者说,系统的输出量直接或间接地参与了系统的控制作用。

图 1-3 所示的水电站的水轮机转速调节系统,是闭环控制的一个例子。控制系统的输入量是给定转速与机组实际转速的差值($\Delta n = n_g - n_s$)。单机带负荷稳定运行时,水轮机的实际转速 n_s 与给定转速 n_g 相等,控制器的输入信号没有变化。如果因负荷增加引起机组转速下降,这时控制器的输入为 $\Delta n > 0$,控制器将输出一个增加导叶开度的指令,

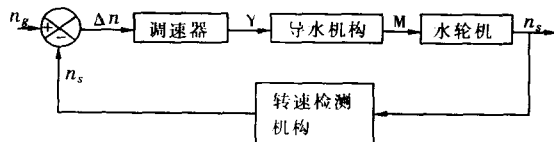


图 1-3 水轮机闭环调速系统

使导叶开度增加,增大水轮机的力矩,使机组转速增大;反之,则减少导叶的开度,最终使水轮机的实际转速与给定转速相等。

从上述分析看出,闭环控制实际上是根据负反馈原理,按偏差量进行控制的。

系统中无论是内部还是外部扰动引起输出量偏离期望值而产生偏差时,就会有相应的控制作用产生去消除偏差,使输出量重新恢复到期望值上。因此,闭环控制也称为反馈控制或偏差控制。闭环控制的系统框图如图 1-4 所示。

图 1-5 是水电站发电机励磁控制系统。三相交流同步发电机由水轮机带动作恒速旋转,并向负载供给电力。系统的被控对象是发电机,系统的输出量是发电机端电压 $u_{\sim}$, 电压 u_i 是系统给定输入量。电压互感器检测发电机端电压 $u_{\sim}$, 经整流后获得与发电机端电压 $u_{\sim}$ 成比例的直流反馈电压 u_f 。输入电压 u_i 与反馈电压 u_f 相减后产生偏差电压 Δu , Δu 经放大器放大去控制发电机的励磁电流 i_f 。通过改变发电机的励磁电流 i_f 去控制发电机的机端电压,使机端电压在系统受到各种干扰时,例如负载波动,都能使它维持在输入电压 u_i 对应的期望值上。

闭环控制系统一般由以下的基本环节组成：

- (1) 给定环节。根据系统输出量的期望值,产生系统的给定输入信号的环节。
- (2) 反馈环节。对系统输出量进行测量,将它转化成反馈信号,并使反馈信号成为与给定输入信号同类型、同数量级的物理量。

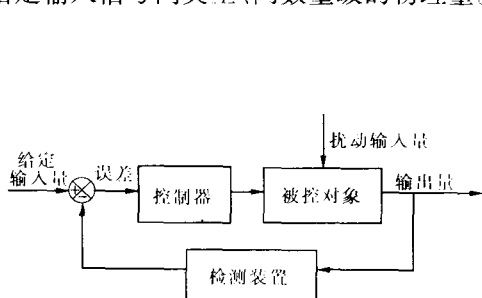


图 1-4 闭环控制系统框图

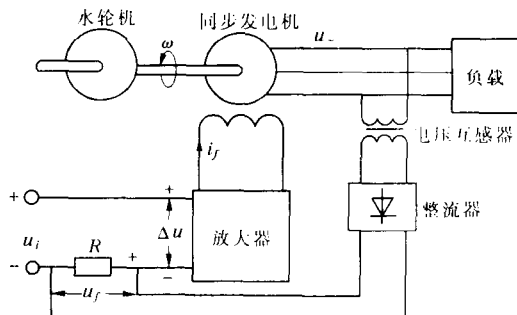


图 1-5 发电机励磁控制系统

- (3) 比较器。对系统输出量与输入量进行比较,产生偏差信号,起信号的综合作用。
- (4) 控制器。根据输入的偏差信号,按一定的控制规律,产生相应的控制信号的环节。
- (5) 执行环节。对被控对象进行控制的装置或元件。
- (6) 被控对象。控制系统所要控制的设备或生产过程。

由上述基本环节组成的闭环控制系统职能框图如图 1-6 所示。图中,系统的基本元部件用框表示;信号的传输方向用箭头表示;信号的综合用带“×”的圆圈表示。“+”号表示两信号相加,即正反馈。正反馈只能在系统中的某局部环节间使用。“-”号表示两信号相减,即负反馈。信号从输入端沿箭头方向到达系统输出端的传输通道,称为前向通路或正向通道。系统输出量经由测量装置反馈到系统输入端的传输通道,称为主反馈通路

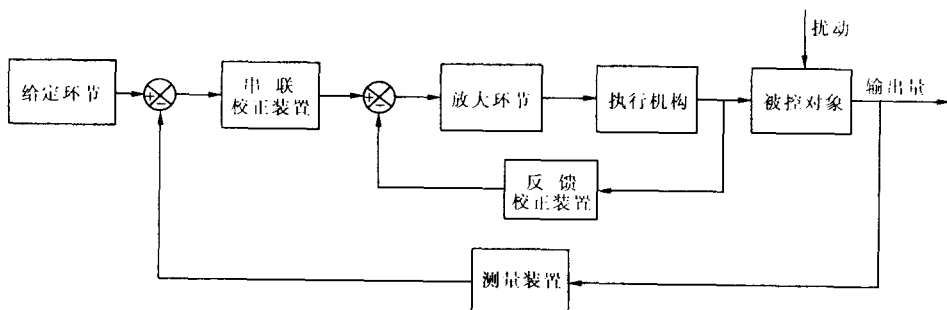


图 1-6 典型闭环系统框图

或主反馈通道,而其他的反馈通道,称为副反馈或局部反馈通道。只有一个反馈通道的系统,称为单回路系统,有两个以上反馈通道的系统,称为多回路系统。

第二节 自动控制系统的基本类型

控制系统的分类方法很多。主要有以下几种。

一、按使用的数学模型分类

(一)线性系统和非线性系统

1. 线性系统

系统输入量与输出量之间的关系可用线性微分方程或线性差分方程描述的系统。若方程的系数与时间 t 无关,即为定常数,则该系统又称为线性定常系统。若方程的系数值随时间 t 的变化而变化,则称该系统为线性时变系统。

线性系统有两个重要特性:叠加性和比例性。

(1)叠加性。当系统同时存在几个输入量作用时,其输出量等于各输入量单独作用时所产生的输出量之和。

(2)比例性。当系统的输入量增大或缩小若干倍时,系统输出量也按同一倍数增大或缩小。

2. 非线性系统

系统输入量与输出量之间的关系可用非线性微分方程或非线性差分方程描述的系统。

在自动控制系统中,即使只有一个环节是非线性的,那么这一系统也是属于非线性的。严格来说,任何物理系统的特性,都是非线性的,但由于目前对于非线性系统的理论研究远不如线性系统那样完整和完善,为了研究的方便,在一定的条件下可以将某些非线性特性线性化,近似地用线性微分方程去描述,这样就可以按照线性系统来处理。

(二)连续系统和离散系统

1. 连续系统

当系统中各元件的输入量和输出量均为时间 t 的连续函数时,称该系统为连续系统。连续系统的运动规律可用微分方程描述,系统中各部分信号都是模拟量。

2. 离散系统

若系统中某一处或几处的信号是以脉冲序列或数码的形式传递的系统,称为离散系统。离散系统的运动规律可用差分方程描述。计算机控制系统就是典型的离散系统。

二、按给定量变化规律分类

1. 恒值系统

给定输入为恒值,要求系统在任何扰动作用下,系统输出量能以一定精度接近给定期望值的系统,称为恒值系统。如水电站生产过程中的温度、压力、流量、液位高度、电机转速等自动控制系统属于恒值系统。

2. 随动系统

给定输入量是预先不知道的随时间任意变化的函数,要求系统输出量跟随输入量变化的系统,称为随动系统。如机械加工设备的伺服机构、卫星跟踪、国防工业的火炮跟踪系统等属于随动系统。

3. 程序控制系统

给定输入量是按照预先已知的时间函数变化的系统,称为程序控制系统。如程序控

制车床,热处理炉温度的升温、保温、降温过程等,都是按照预先设定的规律进行控制的,它们都属于程序控制系统。

第三节 对控制系统的基本要求

对自动控制系统的基本要求有以下几个方面。

1. 稳定性

一个处于静止或平衡工作状态的系统,当受到任何输入(给定信号或干扰)作用后,就可能偏离原平衡状态;当作用消失后,系统中的状态和输出都能恢复到原来平衡状态,称该系统为稳定的。若作用消失后系统中状态和输出发生增幅振荡或单调增长现象,称该系统为不稳定的。

稳定是系统正常工作的前提,为了使系统在环境或参数变化时还能保持稳定,设计控制系统时必须有一定的稳定裕量。

2. 稳态精度

系统在过渡过程结束后,其输出量的状态值,一般用稳态误差来描述。稳态误差是指稳态时系统期望输出量与实际输出量之差。稳态误差值越小的系统,说明系统的控制精度越高,稳态特性越好。

3. 动态特性

稳定的控制系统受一外加输入(给定—扰动)作用后,系统最终会恢复稳定或达到一新的平衡状态。但是,由于系统内机械部件存在质量和惯量、电路中存在储能元件,如电容和电感,以及能量功率的限制,使得系统中的状态和输出不能瞬时变化,而要经历一个过程。系统状态或输出随时间 t 变化的这一过程称为动态过程或过渡过程。动态特性通常用动态响应指标来衡量。动态响应指标是在单位阶跃输入及零初始条件下的一些指标,如调节时间、超调量、振荡次数等。调节时间即过渡过程时间;超调量即动态响应最大值超出稳态值部分相对于稳态值的百分数;振荡次数即过渡过程中系统振荡的次数。动态特性好的系统,既要求调节时间短,又要求超调量小、振荡次数少。

对于同一个系统,由于其稳定性、动态特性和稳态特性是互相制约的。提高响应的快速性,可能会引起系统的强烈振荡;改善系统相对稳定性,则又可能会使控制过程时间延长、反应迟缓以及精度变差;提高系统的精度,则可能会引起动态特性(平稳性及过渡过程时间)变坏。过分注重某一方面的性能提高会使整个系统失去实用价值。因此,如何分析和解决这些问题是本学科的重要内容。

习题一

1-1 什么是开环控制与闭环控制?试分析它们的特点。

1-2 试列举水电站生产过程中的控制系统,如水轮机转速控制、发电机电压控制、油箱油位控制等,说明哪个量为输入量、被控量、反馈量、扰动量,并绘出其系统框图。

第二章 连续控制系统的组成及分析

第一节 连续控制系统的数学模型

建立控制系统的数学模型是控制理论的基础。例如在一个电阻 R 与电感 L 串联的电路中, 电流 i 的变化可用微分方程 $L di/dt + Ri = E$ 描述。这就是这个电路的数学模型。研究这个方程的数学性质就可以知道这个电路的运动特点。在研究这个方程时, 人们就不再去考虑方程中的 i 和 E 的物理意义, 只把它们看做抽象的变量。同样, 人们也不再考虑 L 和 R 的物理意义, 只把它们看做抽象的参数。别的事物的数学模型如果与此相同, 它的运动的性质也就与此相同, 尽管它可能根本不是一个电路。所以, 数学模型是舍弃了各种事物的具体特点而抽象出它们的共同性质, 即用运动来加以研究的工具。在研究控制系统的运动时, 人们有时就把它的数学模型(例如一组微分方程)叫做这个控制系统, 而不加以区别。

描述控制系统的数学模型的形式不止一种。它们各有特点和最适用的场合。它们彼此之间也有紧密的联系。要能灵活运用各种数学模型分析、综合和设计控制系统, 就必须对各种数学工具有透彻的理解, 并且能熟练地使用和互相转换。各种数学的描述方法的共同基础是建立微分方程。所以, 能否根据实际情况建立微分方程是学习控制理论的第一步。

要写出描述控制系统的微分方程, 有两种基本方法。第一种方法是分析系统各部分运动的机理, 根据这些机理分别写出描述各部分运动的微分方程, 合在一起便成为描述整个系统的方程。第二种方法是人为地在系统上加上某种测量信号, 记录系统中各变量的运动, 然后选择适当的微分方程, 使之能近似地表示这种运动, 以此作为系统的方程, 有时连测试的信号也不加, 就径直记录系统运行时各变量的实际运动, 据以建立数学模型。

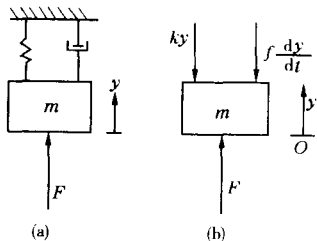


图 2-1 弹簧阻尼系统

一、系统微分方程的建立

下面举例说明用分析方法建立系统微分方程的过程。

【例 2-1】 图 2-1 所示为一弹簧阻尼系统, 图中质量为 m 的物体受到外力 F 的作用, 产生位移 y , 求该系统的输入—输出描述。

解 根据图 2-1 所示系统, 外力 F 和位移 y 可视作系统的输入量和输出量。由于有弹簧和阻尼器, 故相应地有弹簧阻力 F_s 和黏性摩擦阻力 F_f 存在。从牛顿定律有

$$ma = \sum F = F - F_s - F_f \quad (2-1)$$

式中 m ——质量;
 a ——加速度。
 又因为

$$F_s = ky$$

$$F_f = fv = f \frac{dy}{dt}$$

式中 f ——黏滞摩擦系数,在一定相对运动范围内可视为常数;
 k ——弹簧系数,在弹性极限内可视为常数;
 v ——物体相对的移动速度,它是位移 y 对时间 t 的导数。
 将以上两式代入式(2-1),可得

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} + ky = F \quad (2-2)$$

式(2-2)即为描述该弹簧阻尼系统输入与输出关系的微分方程。

【例 2-2】 图 2-2 所示为一机械旋转系统。转动惯量为 J 的圆柱体,在转矩 T 的作用下产生角位移 θ ,求该系统的输入—输出描述。

解 假定圆柱体的质量分布均匀,质心位于旋转轴线上,而且惯性主轴和旋转主轴线相重合,则其运动方程可写成:

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \sum T = T - T_f - T_s \quad (2-3)$$

考虑到

$$T_f = f\omega = f \frac{d\theta}{dt}$$

$$T_s = k\theta$$

式中 f ——黏滞摩擦系数,在一定条件下可视为常数;
 ω ——角速度,它是角位移 θ 对时间 t 的导数;
 k ——弹性扭转变形系数,在一定条件下可视为常数。

可得到描述输入与输出关系的微分方程:

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} + k\theta = T \quad (2-4)$$

【例 2-3】 图 2-3 所示为一电阻、电感、电容串联网路,其中 u 为输入电压,求以电容两端电压 u_c 为输出的微分方程。

解 此电路是我们熟悉的,如不考虑分布参数影响及各种非线性影响,可列出此电路的电压平衡方程式:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_c = u \quad (2-5)$$

式中 L ——电感;
 R ——电阻。

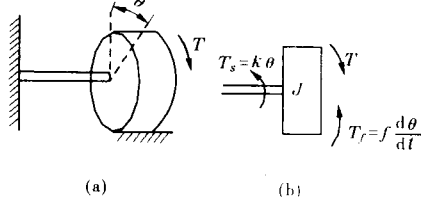


图 2-2 机械旋转系统

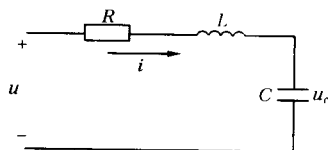


图 2-3 RLC 串联网路

考虑到

$$i = \frac{dq}{dt}$$
$$q = Cu_c$$

式中 q ——电荷量;

C ——电容。

式(2-5)可以改写为

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = u \quad (2-6)$$

这就是描述该电路输入与输出关系的微分方程。

通过以上三种不同物理系统介绍了用机理分析法推导描述系统输入与输出关系的数学模型,它常被称为机理模型。由此不难看出,系统的数学模型由其结构、参量及基本运动定律决定。

在一般情况下,描述线性定常系统输入与输出关系的微分方程如下:

$$\begin{aligned} & \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dc(t)}{dt} + a_n c(t) \\ &= b_0 \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_{m-1} \frac{dr(t)}{dt} + b_m r(t) \end{aligned} \quad (2-7)$$

式中 $r(t)$ ——系统的输入量;

$c(t)$ ——系统的输出量;

a_i ——常量, $i = 1, 2, \cdots, n$, n 为输出量导数的最高阶数;

b_j ——常量, $j = 0, 1, 2, \cdots, m$, m 为输入量导数的最高阶数。

对于一些比较复杂的系统(或过程),机理模型事实上难于推导出来,或者由于过分理想化(简化),推导得到的机理模型不能如实地反映系统的运动规律,这时往往通过实验辨识法建模。实验辨识法就是利用输入、输出实验数据去建立模型的方法。

假设系统是线性定常的,并且在 $t=0$ 时系统的响应及其各阶导数都为零(即初始条件为零,或称初始状态为零),则其响应与输入之间应满足线性关系,亦即有

$$c(t) = H(t)r(t) \quad (2-8)$$

式中 $r(t)$ ——系统的输入;

$c(t)$ ——系统的响应;

$H(t)$ ——算子。

由于给定的输入信号是已知函数,响应能从实验得到,因此辨识的任务就是确定算子 $H(t)$ 了。不难理解, $H(t)$ 必定是由线性系统的结构与参量,或者说是由系统的特性决定的。

式(2-8)是实验辨识法建模的原理依据。可以看出,这种建模方法有其优点,即使系统的内部结构不知道,只要是一个初始条件为零的线性定常系统,就有可能从测量系统的输入及响应的实验数据,经过一定的处理求得系统的数学模型。

为从实验辨识方法建立系统数学模型,首先应该给定输入信号 $r(t)$ 的函数形式。确

定输入 $r(t)$ 的原则应该是既便于数学处理又在实际上便于实现。在本书里只阐述给定输入为单位脉冲函数通过实验辨识建立系统数学模型的基本原理。

脉冲函数的表达式为

$$r(t) = \begin{cases} \frac{A}{\epsilon} & 0 < t < \epsilon \\ 0 & t < 0, t > \epsilon \end{cases} \quad (2-9)$$

式中 A ——脉冲面积或称脉冲强度。

脉冲强度 $A = 1$ 时的脉冲函数记为 $\delta_\epsilon(t)$, 如令 $\epsilon \rightarrow 0$ 并求取极限, 则称为单位脉冲函数 $\delta(t)$, 显然有

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad (2-10)$$

及

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

在 $t = \tau$ 处的单位脉冲函数以 $\delta(t - \tau)$ 表示, 它是从 $t = 0$ 开始延迟了 τ 时刻发生的单位脉冲函数, 如图 2-4 表示, 并且有

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} \infty & t = \tau \\ 0 & t \neq \tau \end{cases} \quad (2-11)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) dt = 1$$

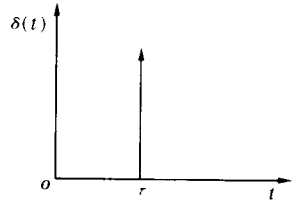


图 2-4 $\delta(t - \tau)$ 的图形

幅值为无穷大持续时间为零的单位脉冲函数只是数学上的假设, 实际只要脉冲宽度 ϵ 足够小, 满足一定条件的脉冲即可近似地认为是 $\delta(t)$ 。

以 $\delta(t)$ 作为零初始条件的线性定常系统的输入, 得到的输出称为系统的单位脉冲响应, 也称为权函数, 记作 $g(t)$ 。根据式(2-8)不难得到:

$$g(t) = H(t)\delta(t)$$

如将脉冲强度为 A 、而且发生在 $t = \tau$ 时刻的脉冲函数 $A\delta(t - \tau)$ 作为输入, 将其施加于初始条件为零的线性定常系统, 就会得到延迟了 τ 时刻发生的脉冲响应, 它将满足下式:

$$Ag(t - \tau) = AH(t)\delta(t - \tau) \quad (2-12)$$

输入 $\delta(t - \tau)$ 与响应 $g(t - \tau)$ 在时间上的关系如图 2-5 所示。

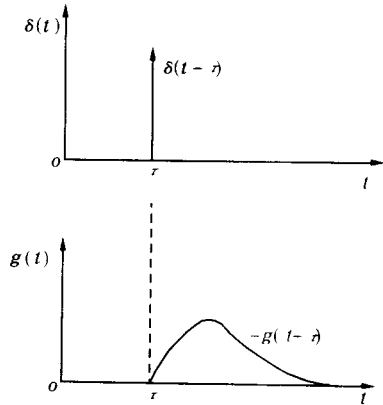


图 2-5 $\delta(t - \tau)$ 与 $g(t - \tau)$

如果在 $0 \leq t \leq \infty$ 区间内, 施加于系统的输入 $r(t)$ 为一任意的分段连续函数的形式, 如图 2-6 所示, 它可以用一系列长方形脉冲叠加成分段常值信号来近似表示。如果脉冲的宽度都取为 ϵ , 则发生在 $t = \tau$ 时刻脉冲强度为 $r(\tau)\epsilon$ 的脉冲即可表示为 $r(\tau)\epsilon\delta(t - \tau)$ 。当 τ 取为在区间 $0 \leq t \leq \infty$ 内的变量时, 则输入 $r(t)$ 能用下列近似式表示:

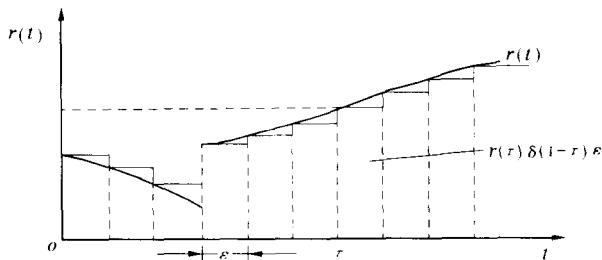


图 2-6 任意输入分解为脉冲叠加

考虑到式(2-12),则上式又可改写为

$$c(t) \approx \sum_{\tau=0}^{\infty} r(\tau) g(t - \tau) \epsilon \quad (2-14)$$

如将脉冲宽度取得足够小,即令 $\epsilon = d\tau$,并将和式取为积分式,即得响应的表示式

$$c(t) = \int_0^{\infty} g(t - \tau) r(\tau) d\tau \quad (2-15)$$

此即为熟知的卷积公式。

式(2-15)中 τ 是外施输入作用到系统的时刻,而 t 是观测系统响应的时刻。如果观测响应的时刻 t 是在输入作用到系统的时刻 τ 之前,则根据初始条件为零的线性定常系统的响应与输入之间应满足的齐次性与线性关系可知:

$$g(t - \tau) = 0 \quad \text{当 } t < \tau \text{ (或 } t > \tau \text{)}$$

故式(2-15)的积分上限可以将无穷大更改为 t ,即有

$$c(t) = \int_0^t g(t - \tau) r(\tau) d\tau \quad (2-16)$$

如令 $t - \tau = \beta$, $d\tau = -d\beta$,并且考虑到变换积分之上、下限,式(2-15)可写成

$$c(t) = - \int_{\infty}^0 g(\beta) r(t - \beta) d\beta = \int_0^{\infty} g(\beta) r(t - \beta) d\beta$$

然后再令 $\beta = \tau$ 代入上式,则得到卷积公式的另一种形式:

$$c(t) = \int_0^t g(\tau) r(t - \tau) d\tau \quad (2-17)$$

式(2-16)及式(2-17)即是线性定常系统输入—输出描述的另一种形式,它与式(2-7)以微分方程表示的系统输入—输出描述完全是等效的。又由于都是以时间函数来描述的,故又称为时间域描述(简称时域描述)。

二、非线性数学模型的线性化

在为实际对象建立微分方程时,经常会遇到非线性关系,即输出量与输入量之间的函数关系要用非线性方程来描述的情况。非线性方程的性质一般比线性方程复杂得多,所以在工程上常常希望能用线性关系近似地代替非线性关系。

我们把输出量与输入量之间的函数关系分为两类。一类函数的函数值与各阶导数值都是连续的(图 2-7),至少在运行范围内是如此。我们称这类函数是光滑函数。另一类

则不是如此,称为不光滑函数(图 2-8)。不光滑函数是不可能用线性函数近似代替的。光滑函数在一个小的范围内可以用线性函数来近似代替。下面举例说明具体做法。

【例 2-4】 铁芯线圈中的磁通量 ϕ 与线圈中的电流 I 之间的关系是饱和曲线,如图 2-9 所示。它是光滑函数。首先要确定在正常运行情况下电流的静态数值 I_0 和相应的磁通的静态数值 ϕ_0 。这要根据对象的实际工作确定。在图上通过正常工作点 (I_0, ϕ_0) 作切线,确定切线的斜率 k 。现在假设在运动过程中电流的瞬时值为 $I(t)$,磁通的瞬时值为 $\phi(t)$,令

$$I(t) = I_0 + \Delta I(t)$$

$$\phi(t) = \phi_0 + \Delta \phi(t)$$

则只要 $|\Delta I|$ 和 $|\Delta \phi|$ 不大,总可以认为 $\Delta \phi(t) \approx k \Delta I(t)$ 。

这样,尽管 ϕ 与 I 关系是非线性的,但却可近似认为 $\Delta \phi$ 与 ΔI 的关系是线性的。只要不以 I 和 ϕ 作为变量,而改以 ΔI 和 $\Delta \phi$ 作为变量,就可以得到近似的线性数学模型。

这种方法称为微偏线性化。它的理论根据如下,如果函数 $y(x)$ 是光滑的,就可以展开成 Taylor 级数:

$$y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + y'_0 \Delta x + \frac{y''_0}{2!} (\Delta x)^2 + \dots$$

其中, $y'_0 = y'(x_0)$, $y''_0 = y''(x_0)$, $\dots$ 。只要 $|\Delta x|$ 充分小,上式就可写成

$$y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'_0 \Delta x \text{ 或 } \Delta y \approx y'_0 \Delta x$$

这就是线性化后的方程,其中 $\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$ 。

在工程上常常把 y 与 y' 都连续的函数就近似地当做光滑函数。在工作点上求函数的微分,就可以完成微偏线性化。函数 $y(x)$ 在 (x_0, y_0) 点的微分是

$$dy = y'_0 dx$$

三、传递函数

前面举了一些建立系统数学模型的例子,所用的方法是写出描述系统的微分方程。解出这些微分方程,就可以阐明系统的性能和行为。这里首先

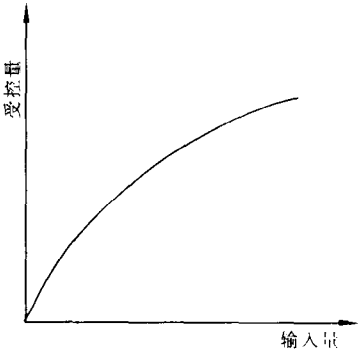


图 2-7 光滑函数图

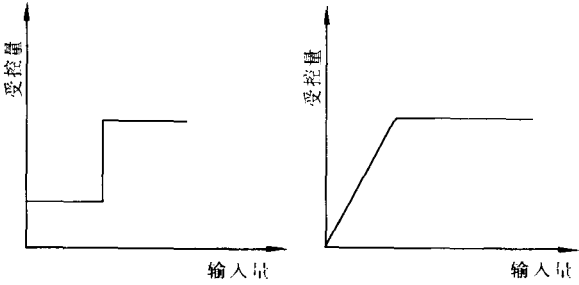


图 2-8 不光滑函数

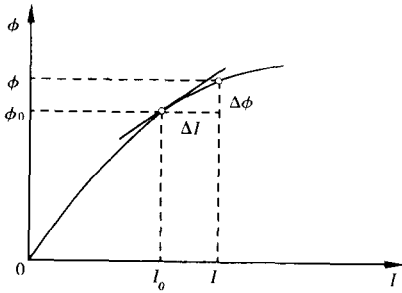


图 2-9 磁通量 ϕ 与电流 I 之间的关系曲线