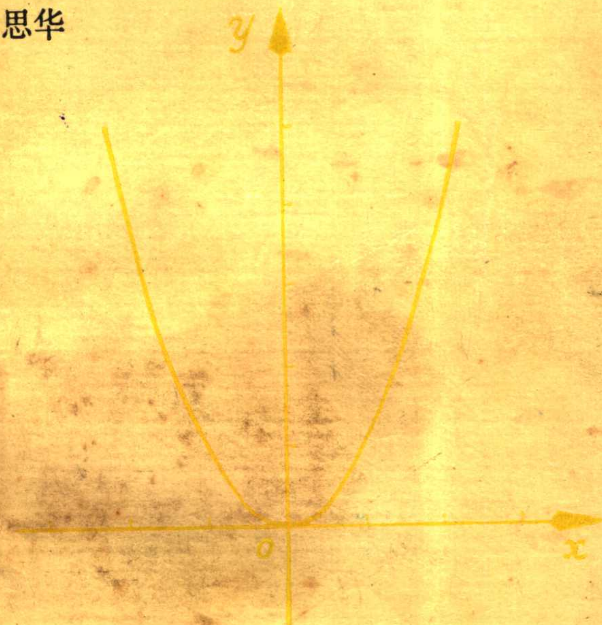
中学生课外读物

代数概要与习题

（附题解）

李思华



河 北 人 民 出 版 社

中学生课外读物

代数概要与习题

（附题解）

李 思 华

河 北 人 民 出 版 社

一九八二年·石家庄

中学生课外读物

代数概要与习题

（附题解）

李思华

河北人民出版社出版（石家庄市北马路19号）

唐山地区印刷厂印刷　河北省新华书店发行

787×1092毫米 1/32 31 3/4 印张 683,000 字　印数：1—11,900　1982年12月第1版

1982年12月第1次印刷　统一书号：7086·1107　定价：2.30 元

前　　言

本书主要是为中学生写的一本代数参考书，对读者牢固地掌握数学基础知识和熟练基本技能有所帮助。全书分“内容概要与习题”和“习题解答”两个部分，内容比较丰富，是根据教育部新制定的中学数学教学大纲（试行草案）的精神而编写的。

做足够数量的习题，是把知识学得扎实、学得灵活的必要途径。为了加强练习，提高练习的质量和效果，书中举有不少例题，并提供了适量的由浅入深的习题。这些题有益于学生进一步熟练和巩固所学知识，对知识融会贯通；有益于培养学生对数学知识综合运用的能力。

内容概要给出了各章节的基本概念与公式，使读者能够一目了然每章节的主要内容，便于作题。

编者

1980.9

目　录

前言
第一章　代数式 ……(1)
§1.1　整式与因式分解 ……(2)
§1.2　分式及其运算 ……(14)
§1.3　根式及其运算 ……(30)
§1.4　不等式 ……(45)
第二章　代数方程 ……(58)
§2.1　一元一次方程 ……(58)
§2.2　一次方程组 ……(70)
§2.3　一元二次方程 ……(85)
§2.4　可化为二次方程求解的方程 ……(96)
§2.5　二元二次方程组 ……(108)
第三章　对数运算 ……(117)
§3.1　指数概念的推广 ……(118)
§3.2　对数及其运算法则 ……(128)
§3.3　常用对数及其应用 ……(136)
§3.4　换底公式 ……(145)
§3.5　指数方程与对数方程 ……(149)
第四章　函数与数列 ……(156)
§4.1　集合与函数 ……(157)

§4.2　几种简单的初等函数 ……………………(166)
§4.3　等差数列 ……………………………………(180)
§4.4　等比数列 ……………………………………(188)
§4.5　几个数列的 n 项和与数 e ………………(202)
第五章　排列、组合与概率……………………(209)
§5.1　排列与组合 …………………………………(210)
§5.2　数学归纳法 …………………………………(222)
§5.3　二项式定理 …………………………………(228)
§5.4　概率 …………………………………………(236)
第六章　复数与高次方程………………………(248)
§6.1　复数 …………………………………………(249)
§6.2　余数定理与综合除法 ………………………(262)
§6.3　高次方程 ……………………………………(267)
第七章　行列式与矩阵…………………………(278)
§7.1　行列式与线性方程组 ………………………(279)
*§7.2　矩阵 …………………………………………(292)
第八章　综合题…………………………………(305)
习题解答
第一章　代数式……………………………………(331)
第二章　代数方程…………………………………(420)
第三章　对数运算…………………………………(532)
第四章　函数与数列………………………………(607)
第五章　排列、组合与概率………………………(708)
第六章　复数与高次方程…………………………(777)
第七章　行列式与矩阵……………………………(849)
第八章　综合题……………………………………(897)

第一章 代 数 式

由于计数和度量的需要，人类首先认识了正整数、正分数和零。后来为了区别具有相反意义的量，也为了解决某些减法运算不能解决的矛盾，人们又引进了负数。正负整数、正负分数和零统称为**有理数**。凡有理数都可表示为有限小数或无限循环小数的形式。因为有限小数可以改写为分母为10的乘幂的分数，所以它是有理数。可以证明，无限循环小数都可化为分数，因此，无限循环小数也都是有理数。

在度量物体长度时，还常遇到无论怎样缩小长度单位都不能量尽的情况。例如，用正方形的边长去量它的对角线就是如此。这样所得的量数是一个无限不循环小数。无限不循环小数称之为**无理数**，如$\sqrt{2}$，$\sqrt[5]{3}$，π等等。

有理数与无理数统称为**实数**。

数，除了用数字表示以外，还可用字母表示。使用字母能够更便于表达和研究数量关系的一般规律，从而也提供了解决问题的简捷方法。使用符号和用字母代表数，这是数学发展史上的一大进步。将字母或者数字与字母用运算符号（加、减、乘、除、乘方和开方）连接起来的式子，叫做**代数式**。在客观实践中，在物理学以及工程技术应用中，许多量是由代数式来表示的。要研究这些量之间的关系，往往需要对这些量进行运算，这就需要掌握代数式的运算方法。

在解决代数式的恒等变形这样一些代数基本问题时，所用到的基本规律首先是数的基本运算规律．指数律在恒等变形中，也有着特殊的重要意义．

§1.1 整式与因式分解

内 容 提 要

1．代数式中不含有字母作除数的叫做**整式**．整式又可分为单项式与多项式．整式的加减，主要是按运算规律化为最简式，要点是：(Ⅰ)脱括号；(Ⅱ)合并同类项．

2．**幂的运算规则**（m、n为正整数）：

① $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；

② $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$；

③ $(a^m)^n=a^{mn}$．

3．**乘法公式**：

① $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$；

② $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$；

③ $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$；

④ $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$．

4．将一个多项式分解成几个因式的乘积，叫做**多项式的因式分解**．因式分解，实际上就是乘法的逆运算，例如

$$(a+b)(a-b)\underset{\text{因式分解}}{\overset{\text{整式乘法}}{\rightleftarrows}}a^2-b^2.$$

分解因式常用的几种方法：(Ⅰ) 提取公因式法；(Ⅱ) 利用

乘法公式法；(Ⅲ)配方法；(Ⅳ)十字相乘法.

5．**配方法**　先在 x^2+px+q 中加上一次项系数一半的平方 $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ 再减去 $\left(\frac{p}{2}\right)^2$，若能使这二次三项式化为平方差的形式

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-m^2,\quad (\text{其中 } m^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q)$$

则有

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}+m\right)\left(x+\frac{p}{2}-m\right).$$

6．**十字相乘法**　此法是根据二次三项式的二次项系数与常数项，写出“四角形式”，使两直列中两数乘积依次是二次项系数和常数项，再看交叉乘积之和是否等于一次项的系数，以检验它是否符合要求.例如

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ & \times & \\ 3 & & 5 \\ \hline 6 & + & 5=11 \end{array}$$

$$3x^2+11x+10=(x+2)(3x+5).$$

例 1　设 $3y=x+2z$，则 $x^3-27y^3+8z^3+18xyz$ 的值为何？

解　将 $3y=x+2z$ 代入，则

$$\begin{aligned} x^3-27y^3+8z^3+18xyz &= x^3-(3y)^3+8z^3+6x(3y)z \\ &= x^3-(x+2z)^3+8z^3+6xz(x+2z) \\ &= x^3-(x^3+6x^2z+12xz^2+8z^3)+8z^3+6x^2z+12xz^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

例 2　设 $a+b+c=0$，试证

$$2(a^4+b^4+c^4)=(a^2+b^2+c^2)^2.$$

证　由题设知 $a+b=-c$. 两边平方，得

$$a^2+2ab+b^2=c^2,$$

$$a^2+b^2-c^2=-2ab.$$

再两边平方，得

$$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2=4a^2b^2.$$

$\therefore\quad a^4+b^4+c^4=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2.$

因而，$\quad 2(a^4+b^4+c^4)$

$$=a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2$$

$$=(a^2+b^2+c^2)^2.$$ 等式得证。

例 3 分解因式：

① $x^3+x^2y-xy^2-y^3$； ② $x^2+\left(a+\dfrac{1}{a}\right)xy+y^2$.

解 ① $x^3+x^2y-xy^2-y^3$

$$=x^2(x+y)-y^2(x+y)$$

$$=(x+y)(x^2-y^2)=(x+y)^2(x-y).$$

② $x^2+\left(a+\dfrac{1}{a}\right)xy+y^2$

$$=\left(x^2+\frac{1}{a}xy\right)+(axy+y^2)$$

$$=\frac{1}{a}x(ax+y)+y(ax+y)$$

$$=(ax+y)\left(\frac{1}{a}x+y\right)=\frac{1}{a}(ax+y)(x+ay).$$

此题也可直接由十字相乘法或按下法求解：

$\because\quad a+\dfrac{1}{a}=\dfrac{a^2+1}{a},$

$$\therefore \quad \text{题式} = x^2 + \frac{a^2+1}{a}xy + \left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2 y^2 - \left(\frac{a^2-1}{2a}\right)^2 y^2$$

$$= \left(x + \frac{a^2+1}{2a}y + \frac{a^2-1}{2a}y\right)\left(x + \frac{a^2+1}{2a}y - \frac{a^2-1}{2a}y\right)$$

$$= (x+ay)\left(x + \frac{1}{a}y\right) = \frac{1}{a}(x+ay)(ax+y).$$

例 4 分解因式：

① $x^4 - 23x^2y^2 + y^4$;

② $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24$.

解 ① $x^4 - 23x^2y^2 + y^4$

$= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 25x^2y^2$

$= (x^2+y^2)^2 - (5xy)^2$

$= (x^2+5xy+y^2)(x^2-5xy+y^2)$.

② $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24$

$= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6) - 24$

$= (x^2+5x)^2 + 10(x^2+5x)$

$= (x^2+5x+10)(x^2+5x)$

$= x(x+5)(x^2+5x+10)$.

例 5 证明多项式

$$f(x,y) = x^5 + x^4y - 2x^3y^2 - x^2y^3 - x^2y^4 + 2y^5$$

在 x 和 y 为一切正值时都为非负值.

证 $f(x,y) = x^5 - x^2y^3 + x^4y - xy^4 - 2x^3y^2 + 2y^5$

$= x^2(x^3-y^3) + xy(x^3-y^3) - 2y^2(x^3-y^3)$

$= (x^3-y^3)(x^2+xy-2y^2)$

$= (x-y)(x^2+xy+y^2)(x-y)(x+2y)$

$$=(x-y)^2(x+2y)(x^2+xy+y^2).$$

可见，在 $x\geqslant 0$、$y\geqslant 0$ 时，多项式 $f(x,y)$ 的每一个因式都是非负的，故 $f(x,y)\geqslant 0$。即在 x 和 y 为一切正值时，$f(x,y)$ 都为非负值．命题得证．

习　题

1.1 某工厂的一类零件是块铁板．上面是正方形，边长为 a．下面是个梯形，其下底是上底的两倍，梯形的高与上底一样大小．试写出铁板面积的表示式．

1.2 把一块边长为 a（厘米）的正方形铁板的四角，各剪去一个边长为 b（厘米）的正方形$\left(设\ b<\frac{a}{2}\right)$：

① 求剩余部分的面积；

② 将铁板的剩余部分折成一个铁盒，求铁盒的容积；

③ 当 $a=10$，$b=3$ 时，求铁盒的容积与表面积．

1.3 浓度是75%的酒精溶液杀菌力最强．现有这种酒精溶液 x 毫升，试用代数式表示其中含纯酒精的重量．又当 $x=400$ 毫升时，含纯酒精的重量等于多少？已知酒精的比重是0.8克/毫升．

1.4 有甲、乙两船，甲在乙之前，相距为 a 公里．现设甲船的速度为每分钟 m 里，乙船的速度为每分钟 n 里．试问一小时后两船的距离为何？

1.5 开学第一天，小暖见了老师问道："老师，已经来了多少个同学？"老师回答说："如果再来现有的这么多同学，然后再来这么多的一半，之后再来这么多的$\frac{1}{4}$，再加上你，那么就恰好有100个同学了"．问已经到了多少个同学？

1.6 求解下列问题：

① 有一个数，如果把此数扩大三倍，再把所得的积增加17就得62．试求这个数；

② 三个连续整数的和等于18，求这三个数．

1.7 求解下列问题：

① 一数是另一数的4倍，如果它们的差等于15，求这两数；

② 两数的差等于8，而和等于42，求这两数．

1.8 在学校附近的园子里有400棵果树，其中梨树是李树的3倍，而梨树和李树的总数跟苹果树一样多．问园子里梨树、李树、苹果树各有多少棵？

1.9 某校学生共栽种了枫树、橡树、菩提树等树苗900棵，栽种的枫树苗是橡树苗的2倍，而菩提树苗是枫树苗的3倍．问枫树苗、橡树苗和菩提树苗各栽种了多少棵？

1.10 验证当$x=2$或$x=3$或$x=\frac{1}{2}$时，多项式$2x^3-11x^2+17x-6$的值都为0．

1.11 验证当$a=3$，$b=2$时，$(a-b)(a^2+ab+b^2)$与$(a-b)^3+3ab(a-b)$的值都为19．

1.12 计算：

① 设$A=a^3-a^2+a$，$B=a^2-a+1$，$C=a^4-a^3-1$，求$A+B+C$；

② 设$x=b+2c-3a$，$y=c+2a-3b$，$z=a+2b-3c$，求$x+y+z$．

1.13 证明：

① 两奇数之和为偶数；

② 三位的整数中，减去其三数字之和所得的差恒为9的倍数．并以143、637两整数验证之．

1.14 简化

$$4\left(x-\frac{y}{2}\right)-6\left[\left(2x-\frac{y}{3}\right)-12\left(\frac{x}{3}-\frac{3x+2y}{24}\right)\right].$$

1.15 计算下列各式：

① $a^3b^3c\cdot(-2a^3bc^2)\cdot(-3ab^2c)$；

② $(3x+2)(2x-3)$；

③ $(5a^2b-ab^2)(b+5a)$；

④ $(2x-5)^2$；

⑤ $(a+1)(a^3-a^2+a-1)$；

⑥ $(x^3+x^2y+xy^2+y^3)(x-y)$；

⑦ $(3m^2+4n^2-2mn)(-mn-n^2+5m^2)$；

⑧ $(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)$.

1.16 计算下列各式：

① $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$；

② $(4a^2+9b^2+c^2+3bc+2ac-6ab)(2a+3b-c)$；

③ $[x^5+a^5-ax(x^3+a^3)]\cdot[x^3+a^3-ax(x+a)]$；

④ $(a^2+2ab+b^2-c^2)(a^2+2ab-b^2+c^2)$.

1.17 证明恒等式

$$(x+y)^3-(x-y)^2(x+y)=4xy(x+y).$$

1.18 证明：

$$(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)=x^{2^4}+x^{2^3}+1.$$

1.19 利用乘法公式计算下列各式：

① $(a-1)^2-4(a+1)^2-6(a+1)(a-1)$；

② $(2a+3)(4a^2-6a+9)$；

③ $(a^2+1)^2+(a-1)(a^2+1)-a^2$；

④ $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}xy+\frac{1}{9}y^2\right)$.

1.20 证明：

① $(a+b+c+d)(a+b-c-d)=a^2+b^2+2ab-c^2-d^2-2cd$；

② $(a+b+c-d)(a+b-c-d)+(a-b+c+d)(-a+b+c+d)$
$=4(ab+cd)$.

1.21 证明：

① $2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$；

② $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$
$=2(x-y)(x-z)+2(y-z)(y-x)+2(z-x)(z-y)$.

1.22 证明：

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b).$$

1.23 设 $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3$，n 为正整数，试证

$$(a+b+c)^{2n+1}=a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}.$$

1.24 证明：

$$(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2-x^2-y^2-z^2$$
$$=(x+y+z)^2.$$

1.25 证明：

$$4xy(x^2-y^2)=(x^2+xy-y^2)^2-(x^2-xy-y^2)^2.$$

1.26 证明：任意相邻的四个奇整数的乘积与 1 之差为 8 的倍数.

1.27 证明：若 n 为任意整数，则 n^2-n+1 为奇整数.

1.28 证明：三个连续整数中，两端二数平方之差为中间一数的 4 倍. 并以 21^2-19^2 验证之.

1.29 证明：连续的三整数中，各数立方的和可为第二数的三倍所整除.

1.30 利用乘法公式求下列各乘积：

① $(x^2-2x+7)(x^2-2x-3)$；

② $(x-3)(x-1)(x+1)(x+3)$；

③ $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$；

④ $[(ax+by)^2+(ay-bx)^2]\cdot[(ax+by)^2-(ay+bx)^2]$.

1.31 求解下列问题：

① 若 $x-y=2a$，试证

$x^2-6ax+9a^2=(y-a)^2$;

② 若 $x+y=m$，$x-y=n$，试以 m 及 n 表示 x^3+y^3 的值.

1.32 利用乘法公式计算：

① 202×198；　　② 10.1^3；

③ 999^2；　　④ 103×97；

⑤ 298^2；　　⑥ 9.1×8.9；

⑦ $(575)^2-(425)^2$；　　⑧ $(8133)^2-(8131)^2$.

1.33 简化：

① $(a+b+c+d)^2+(a-b+c-d)^2$；

② $(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2-(a+b+c)^2$.

1.34 简化：

① $(y+3)(y^2-1)-3(y+1)(y^2-9)+3(y-1)(y^2-9)$
$-(y-3)(y^2-1)$；

② $(p+q)^2(q+r-p)(r+p-q)$
$+(p-q)^2(p+q+r)(p+q-r)$.

1.35 当 a 与 1 相比很小时，$(1\pm a)^2$ 可取 $1\pm2a$ 作为近似值，$(1\pm a)^3$ 可取 $1\pm3a$ 作为近似值. 试用此法计算下列各题的近似值并指出误差是多少：

① $(1.002)^2$；　　② $(0.998)^2$；

③ $(1.05)^3$；　　④ $(0.95)^3$.

1.36 试证：

① $(n+1)^4-n^4=(2n+1)(2n^2+2n+1)$；

② $x(x-2y)^3-y(y-2x)^3=(x-y)(x+y)^3$.

1.37 试证：

① $(b-c)^2+(a-b)(a-c)$
$=(c-a)^2+(b-c)(b-a)=(a-b)^2+(c-a)(c-b)$；

② $(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^4+y^4+z^4)$
$=(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$.

1.38　设 a、b、c 为各不相等且均不为 0 的三个数，而且

$$a(b-c)x+b(c-a)y+c(a-b)z=0,$$
$$a(b-c)yz+b(c-a)zx+c(a-b)xy=0,$$

则有 $x=y=z$。试证明之。

1.39　用提公因式与公式法分解因式：

① $\frac{1}{2}x^3+2x^2y+2xy^2$；　② $-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}y-y^2$；

③ $a^2+2ab+b^2-3a-3b$；　④ $ax^2-bx^2-bx+ax-a+b$；

⑤ $9x^2+24xy+16y^2-25z^2$；　⑥ $x^4-7x^2y^2+81y^4$；

⑦ x^4+3x^3+x+3；　⑧ $(5x+4a)^2-(4x+5a)^2$。

1.40　用提公因式法与公式法分解因式：

① $x^4+x^2y^2+y^4$；　② $x^4-x^3+27x-27$；

③ $x^5+x^3-x^2-1$；　④ $9x^2-4y^2-z^2+4yz$。

1.41　用提公因式法与公式法分解因式：

① $x^2-y^2+x^3-y^3$；

② $4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$；

③ $x^3y^2+2x^2y-x^2y^3-2xy^2$；

④ $x^4+2x^3+2x^2+2x+1$。

1.42　用配方法或十字相乘法分解因式：

① $6x^2+7x-10$；　② $3x^2-13xy+10y^2$；

③ $3x^2+3\sqrt{3}x+2$；　④ $x^2y+xy^2-2y^3$。

1.43　用配方法或十字相乘法分解因式：

① $16x^2y+14xy-15y$；　② $2x^2+xy-3y^2$；

③ $3x^2+18x+21$；　④ $3x^2-9x+5$。

1.44　用配方法或十字相乘法分解因式：

① $(x+y)^2-2(x+y)-3$；　② $4x^2-12x+5$；

③ $2x^2-5x+1$；　④ $2x^2-x-5$。