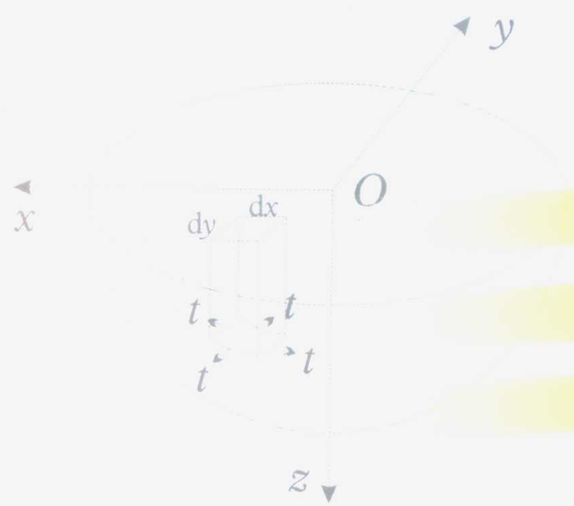
工程弹塑性力学

毕继红　王　晖



天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

工程弹塑性力学

毕继红　王晖

天津大学出版社

内容提要

本教材共 11 章，内容包括绪论、张量初步、应力与应变、本构关系、弹性力学边值问题的基本理论及其解法、平面问题在直角坐标系中的解答、平面问题在极坐标系中的解答、柱体的扭转、能量原理、有限元、薄板理论等。在内容编排上，本书采用弹性力学与塑性力学结合在一起的方法叙述，由浅入深，突出基本概念和基本理论，采用张量记号法，力求书写简洁并强调理论的严密性。各章末附有思考题及计算题。

本书可作为土木、水利及工程力学专业本科生高年级学生及非力学专业研究生的基础课教材，也可供高等学校力学教师及工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程弹塑性力学/毕继红编著.—天津：天津大学出版社，2003.4

ISBN 7-5618-1757-6

Ⅰ.工…　Ⅱ.毕…　Ⅲ.①弹性力学 ②塑性力学

Ⅳ.034

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 024813 号

出版发行　天津大学出版社
出 版 人　杨风和
地　　址　天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编：300072)
网　　址　www.tdcbs.com
电　　话　营销部：022-27403647　邮购部：022-27402742
印　　刷　河北省永清县印刷厂
经　　销　全国各地新华书店
开　　本　185mm × 260mm
印　　张　12.25
字　　数　306 千
版　　次　2003 年 4 月第 1 版
印　　次　2003 年 4 月第 1 次
印　　数　1 − 3 000
定　　价　16.00 元

前　言

“工程弹塑性力学”是土木工程专业研究生的一门学位课，是其他后续专业课的理论基础。在以前的教学中，此课程分为两门，即弹性力学和塑性力学。为了精减学时，现将两门课程并为一门，并将课时减为48学时，因此原有的教材已不适用。为了学生能更好地学习此课程，特编写此教材。

与其他教材相比，本书中增加了张量初步一章，目的是介绍张量的基本概念、基本运算及重要性质，为后面各章的学习打下数学基础。

本书强调力学的基本概念和基本理论，加强了应力与应变、本构关系两章的内容，并采用张量记号法，力求书写简洁、概念清楚，同时保证理论的严密及统一。

在本书的编写过程中，采用弹性与塑性理论结合在一起的方法。对于一个受力物体而言，随着荷载的增加，物体从弹性阶段逐渐过渡到弹塑性阶段，直到最后破坏，是一个连贯的受力过程。将弹性与塑性理论结合在一起讲解，便于认识物体受力及变形的全过程，同时可将弹性与塑性阶段的不同的受力及变形特征进行比较。因此，这样编写可使学生对弹塑性力学基本概念与理论有更连贯及更深刻的认识。

本书共分11章，其中有绪论、张量初步、应力与应变、本构关系、弹性力学边值问题的基本理论及其解法、平面问题在直角坐标系中的解答、平面问题在极坐标系中的解答、柱体的扭转、能量原理、有限元和薄板理论。本书前9章由毕继红编写；第10章及11章由王晖编写。为了使学生能较好地掌握基本概念和基本理论，每章后都附有思考题及计算题，可供土木、水利及工程力学专业本科高年级学生及非力学专业研究生使用，也可供高等学校力学教师及工程技术人员参考。

研究生刘莉娜为本书绘制了大部分插图；李忠献教授、李增福教授、陆培毅处长及结构力学教研室全体教师对本书给予了许多帮助，在此一并深表感谢。

由于编者水平有限，书中难免有错误和不足之处，敬请读者批评指正。

编者

2003年2月

目　录

第1章 绪 论

1.1 弹塑性力学基本概念和主要任务

物体在外力作用下发生变形、外力消失后恢复原状的性质叫物体的弹性。但是,若作用于物体的外力较大且达到某一值时,外力消失后物体不再恢复原状,这种性质叫做物体的塑性。例如,一根弹簧受到拉力作用,弹簧会伸长。若拉力较小,当拉力去掉后,弹簧会回到原来的状态,这是弹簧的弹性,此时弹簧处在弹性阶段。当拉力较大时,弹簧会伸得更长一些,拉力去掉后,弹簧不能回到初始位置,这是弹簧的塑性。此时弹簧内每一点的应力都达到或超过屈服应力,弹簧处于塑性阶段。在弹塑性力学中,将作用于物体上的外力称为荷载。随着荷载的增加,弹簧从弹性阶段逐渐过渡到塑性阶段。有些受力物体,当荷载增加到一定值时,物体内某点或某一部分开始出现塑性。随着荷载的增加,物体内出现了弹塑性分区,这一阶段是弹塑性阶段。荷载增加到一定值时,物体达到最后的极限状态。研究弹性阶段的力学问题属弹性力学范畴;研究弹塑性及塑性阶段的力学问题属塑性力学范畴。因此,弹塑性力学就是研究物体进入弹性阶段并过渡到弹塑性阶段,直到最后物体被破坏的整个发展过程的力学问题。

在超过弹性极限的荷载作用下,物体的变形分两部分,即弹性变形部分和塑性变形部分。其中弹性变形是指作用在物体上的荷载去掉后能恢复的那部分变形,而塑性变形是指另一部分不能恢复的变形。塑性变形又称残余变形。

弹性变形的特点是:

①弹性变形与应力存在一一对应关系;

②弹性变形与应力是线性关系。

塑性变形与弹性变形有着截然不同的特点:

①塑性变形与应力不存在一一对应关系,它除了与当前的应力状态有关外,还和加载的过程有关;

②塑性变形与应力间是非线性关系。

正因为塑性变形具有上述两个特点,所以研究塑性变形比研究弹性变形复杂得多。尤其是在复杂加载条件下,研究塑性变形时要充分考虑加载过程。

在结构的设计中,如果只考虑材料的弹性,即只是在弹性阶段进行设计,称为弹性设计。只对材料进行弹性设计,很显然会造成一定浪费。例如,在纯弯曲状态下,考虑材料的塑性后,一根矩形截面梁承载能力比只考虑材料的弹性时的承载能力提高了50%。因此,对于某些结构,有必要考虑材料的塑性。考虑到材料的塑性进行设计叫做弹塑性设计。对结构进行弹塑性设计有利于充分挖掘材料的潜力,这是研究材料塑性的一个重要目的。

同时,工程上有的塑性变形是需要避免的。例如,墙体上的较大的裂缝会影响建筑物的美观,同时也会影响强度;而有时塑性是可以利用的,如在某些金属加工工艺中,各种型号的型钢(如工字钢、槽钢等)就是利用钢材的塑性加工而成的。无论是避免还是利用材料的塑性,都需

要对塑性进行研究,这是研究塑性的另一目的。本课程的研究对象是韧性金属材料。例如,低碳钢、铝合金等。

弹塑性力学的主要内容包括以下两部分。

1.弹塑性本构关系

本构关系是材料本身固有的一种物理关系,指材料内任一点的应力和应变之间的关系。弹性本构关系是广义虎克定律,而塑性的本构关系远比弹性的本构关系复杂。在不同加载条件下,要服从不同的塑性本构关系。塑性本构关系分为两大类——增量理论与全量理论。

2.研究荷载作用下物体内任一点的应力和变形

在荷载作用下,物体内会产生内力,因此,每一点都存在着应力,并且物体内每一点会发生位移,因此存在着应变。研究由荷载产生的应力和变形有助于了解材料的强度和刚度,使材料得到更好的利用。

确定正确的本构关系是解决力学问题的关键,所以,上述第1部分是第2部分的基础。这两部分构成了本课程的主要内容。

1.2 弹塑性力学的发展史

1.2.1 弹性力学的发展史

在古代,人类就已经在不自觉地利用弹性力学的原理了,弓箭就是一个实例。从拉弓到放箭,能量的转换过程是将外力功转变为弓的应变能,再将弓的应变能释放出来,转变为箭的动能。这一能量转换过程利用的是弹性力学的能量原理。人们真正系统地定量地研究弹性力学是从17世纪开始的。弹性力学的发展史大致分为四个阶段。

第一阶段是弹性力学的发展初期,主要是通过试验探索弹性力学的基本规律。1678年,英国的虎克提出了虎克定律,即在单向应力状态下,弹性体的变形与所受的外力成正比。1687年,牛顿确立了力学三大定律。在这一时期,数学也在迅速发展,为弹性力学的理论发展奠定了数学基础。

第二阶段是从17世纪末开始。这一时期开始,人们主要对梁进行理论研究。现在梁已属于材料力学的研究范畴。到了19世纪20年代,法国柯西明确地提出了应力、应变等基本概念,并且建立了几何方程和平衡方程,并将虎克定律推广到复杂应力状态,建立了广义的虎克定律。在这一阶段奠定了弹性力学的理论基础。

第三阶段是弹性力学在理论上和实际应用上都有较大发展的阶段。1855年至1856年,法国的圣维南(Saint-Venant)对柱体的扭转和弯曲进行了研究,发表了一些论文,并提出了著名的圣维南原理。1881年,德国的赫兹(R.Hertz)提出了有关接触问题的解,给出了两弹性体局部接触时的应力分布。1898年,德国的基尔施(G.Kirsch)发现了应力集中现象。他给出了受拉薄板中的小圆孔附近的应力分布。这些成果对提高机械、工程结构的设计水平起了重要的作用,由此奠定了弹性力学在工程界的地位。在这一时期,弹性力学的理论也有较大的发展,取得了一些重要的成果。首先,建立了各种能量原理,包括弹性力学的虚功原理、最小总势能原理和最小总余能原理等。其次,从能量原理出发,发展了许多近似的计算方法,如瑞利-里兹(Rayleigh-Ritz)法、伽辽金法等。它们推动了近似算法在工程领域的蓬勃发展。

第四阶段是从20世纪20年代开始。从这一时期起出现了许多边缘分支,如非线性弹性力学、考虑温度变化的热弹性力学、气动弹性力学、水弹性力学及粘弹性力学等。这些边缘分

支的发展大大地丰富了弹性力学的内容,也促进了工程设计技术的发展。

从这一时期开始,我国的力学家钱伟长、胡海昌、徐芝纶等也开始了对弹性力学的研究,为我国弹性力学的理论研究和工程应用做出了突出的贡献。

1.2.2　塑性力学的发展史

虽然人们很早就发现了塑性变形,但是真正开始研究塑性力学却是在18世纪。

1773年 库仑提出土的本构关系。

1864年 Tresca对韧性金属材料提出了最大剪应力的屈服条件,即Tresca屈服条件。到了1900年,由格莱斯用薄壁圆管受轴向拉伸和内压联合作用的试验进一步验证了这个屈服条件。

1870年 圣维南解决了柱体的弹塑性扭转和弯曲问题及厚壁筒受内压的问题。

1913年 由Mises提出了另一重要的屈服条件,称做Mises屈服条件。这个屈服条件在某种程度上弥补了Tresca屈服条件的不足。

1930年 由Prandtl提出塑性本构关系的增量理论。这套理论适用于任何加载过程,但是计算过程过于繁琐。由于计算方法和计算工具不足,当时将它用于解工程问题有不少困难。

1924年 Hencky提出了塑性本构关系中的全量理论,1937年Nadai考虑了强化效应,建立了大变形的应力应变关系。这套理论计算简单,但是适用面窄,不适用于复杂的加载过程。

1950年 前后,在进一步研究塑性本构关系的同时着手强化理论的研究,先后提出了等向强化模型以及随动强化模型。

1960年 之后,力学学者们注意到本构关系的重要性,因此更加致力于塑性本构关系的研究。另外在实验上,开始运用先进的试验手段(如光塑性法、云纹法、散斑干涉法等)测量塑性变形。

另外,由于计算机的发展,使得寻找问题的数值解成为可能。越来越多的学者正在研究各种近似的算法,使得计算塑性力学得到了迅速发展。现在计算塑性力学已成为塑性力学研究的另一重要分支。

1.3　基本假设及试验资料

1.3.1　基本假设

弹塑性力学的基本理论来源于实践并在实践中总结出一些规律。但是,这些规律往往是比较复杂的,因此,必须加上假设,才能建立相应的理论。在这些假设中,最基本的有五点。

1.均匀连续假设

假设介质均匀连续无间隙地充满在整个物体内。从微观上讲,虽然介质是由不连续的粒子组成的,但是,这些粒子间的距离与物体的宏观尺寸相比要小得多,因此可以不考虑空隙。为了数学上的需要,建立这一假设是必要的。并且,从这一假设出发进行力学分析,得到的结论符合工程实际。

2.材料的弹性性质不受塑性变形的影响

当物体内任一点处于塑性状态时,变形分成弹性变形和塑性变形两部分。不管塑性变形有多大,弹性变形与应力间始终是线性关系。在加载过程中,弹性变形与应力的关系服从广义虎克定律。在卸载过程中,弹性变形改变量与应力改变量的关系也服从广义虎克定律。总之,弹性变形与应力的关系与塑性变形的大小无关。

3.不考虑时间对材料性质的影响

弹塑性力学的研究对象是韧性金属材料。假定物体内的应力和变形的大小只与外加荷载的大小有关,与时间无关;假设变形速率、应变率等概念只表示位移、应变的增量。至于这些增量在多长时间内产生的,对力学问题的分析没有影响。并且加上荷载后,物体内的应力与变形是一定值,不随时间的推移而变。

4.只考虑稳定材料和荷载逐级缓慢增加

所谓稳定材料,是指在单向应力状态下、任一时间段内,应力的改变量 $\Delta\sigma$ 与应变的改变量 $\Delta\varepsilon$ 的乘积大于或等于0,即应力的改变量(或称附加应力)总是做正功。弹塑性本构关系的理论正是在这个假设下才成立的。

假设外加荷载是缓慢增加的,在加载的过程中不会引起结构的明显振动,所以这门课只限于静力学范畴。

5.小变形假定

在荷载作用下,假定物体的变形与物体的尺寸相比要小得多,因此平衡方程可以建立在物体原来的形状上,并且在求应变时,可忽略位移的高次微小量。

1.3.2 基本试验资料

1.单向拉伸试验

选用低碳钢试件,由简单拉伸试验可得单向应力状态下的应力-应变曲线(图1.1)。整个拉伸过程分为五个阶段。

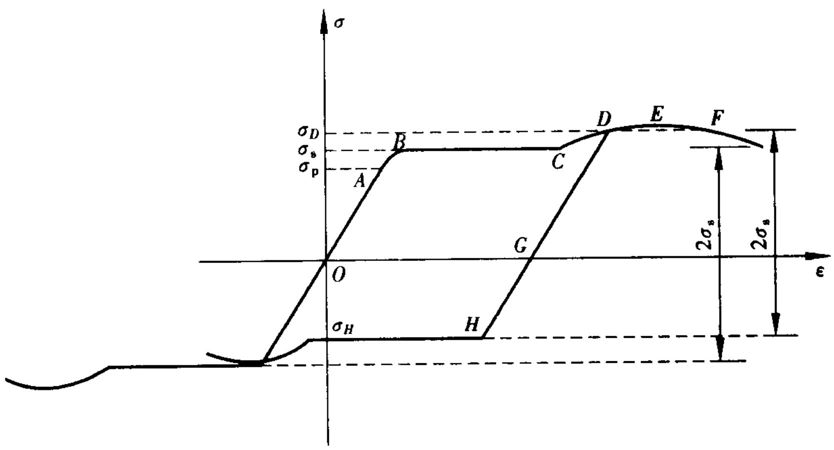


图1.1

1)OA 段 此段内,应力与应变间是线性关系,即 $\sigma = E\varepsilon$。式中,E 为弹性模量。A 点对应的应力为比例极限,记为 σ_p。

2)AB 段 此段内,σ 与 ε 是非线性关系。只要是在 B 点之前卸载,卸载后都不会有残余变形,因此 B 点之前属弹性阶段。B 点对应的应力为弹性极限,记为 σ_s。

3)BC 段 从 B 点开始,材料进入塑性状态,如果继续加载,就会有塑性变形产生。从 B 点至 C 点是屈服阶段。这一阶段的特点是应力不再增长,但是变形继续增大。因此 B 点应力又称为屈服极限 σ_s。比例极限 σ_p 与屈服极限 σ_s 在数值上非常接近,在工程上,近似认为它们相等。

4) CE 段 这一阶段的特点是应力与应变同时增长，叫做强化阶段。该段上任一点切线的斜率称为强化模量，记为 E_1，$E_1 \leqslant E$。若从 D 点开始卸载，卸掉的应力为 $\Delta\sigma$，卸掉的应变为 $\Delta\epsilon$，则卸掉的应力与卸掉的应变间服从虎克定律，即 $\Delta\sigma = E\Delta\epsilon$。当荷载卸为零，再重新加载，加载路径应沿着 GD 线，直到 D 点才再次屈服。这时 D 点对应的应力称为后继屈服应力，记为 σ_D。$\sigma_D \geqslant \sigma_s$。若 $\sigma_D > \sigma_s$，这种材料称为强化材料，这一现象称为强化现象。

5) EF 段 这一阶段为颈缩阶段。加载至 E 点时，试件的某一局部截面面积急剧减小，形成颈部形状。这是加载的最后阶段。

2. 单向压缩试验

由简单压缩试验可知，大多数韧性金属材料单向压缩时的应力－应变曲线与单向拉伸时的曲线关于坐标原点是对称的。这说明材料具有抗拉、抗压对称的性质。

如图1.1所示，若从 D 点开始卸载，沿 DG 卸载至零并反向加载时，至 H 点材料达到反向屈服。H 点对应的应力为 σ_H，$|\sigma_H| < \sigma_S$，并且 $\sigma_D + |\sigma_H| = 2\sigma_s$。这一现象称为 Bauschinger 效应。

Bauschinger 效应是：对于强化阶段的材料，当加载至强化阶段后开始卸载，荷载卸为零后再反向加载，此时反向屈服极限会降低。

3. 静水压力试验

如图1.2所示，将一微元体放在有均匀压力的地方，如放在水里。微元体的六个面上都受有均布压力 p，这种压力称为静水压力。在静水压力 p 的作用下，微元体会产生体积的改变。单位体积内体积的改变量

$$\theta = \frac{\Delta V}{V_0}$$

式中：ΔV 为体积的改变量；V_0 为微元体的初始体积。

由试验可知，当静水压力 p 不是非常大时，θ 与 p 呈线性关系，即

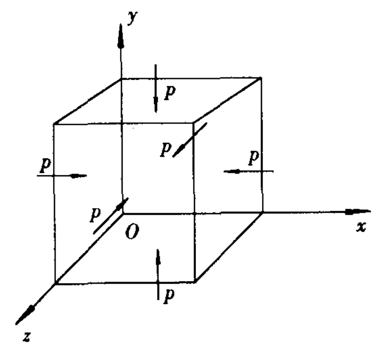


图 1.2

$$\theta = \frac{p}{K} \tag{1.1}$$

式中，K 是体积模量。当荷载卸为零时，体积应变 θ 也为0，即体积应变是完全弹性的。静水压力不会产生塑性变形，并且这种均布的压力对屈服的影响也很小。上述结论只适用于韧性金属材料。

1.4 简化模型

从图1.1看出，低碳钢单向拉伸试验得出的应力－应变曲线过于复杂，用它进行理论研究和计算会非常繁琐。因此，有必要对它进行简化，用简化后的曲线代替实际的试验曲线。

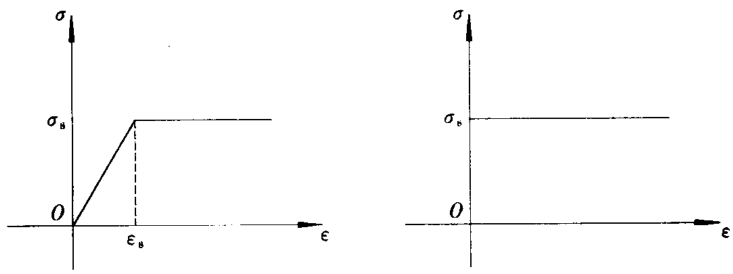
在简化时，应保留原曲线的主要特点并去掉一些次要因素。也就是说，简化后的模型应具有原曲线的主要性质。

根据有无明显的强化阶段，将材料分成两大类，即理想塑性材料和强化材料。

1.4.1 理想塑性材料

有些韧性金属材料的强化阶段很短，强化性质不太明显。与强化阶段相比，这种材料的屈

服阶段较长。这时可将强化阶段忽略不计，只考虑屈服阶段。这种材料称为理想塑性材料，如图 1.3 所示。理想塑性材料又分成理想弹塑性材料与理想刚塑性材料。当所研究的问题具有明显的弹性变形时，可简化为理想弹塑性材料；若弹性变形与塑性变形相比要小得多时，可简化为理想刚塑性材料。这两种材料选用的模型分别是理想弹塑性模型和理想刚塑性模型。



$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & \varepsilon \leqslant \varepsilon_s \\ \sigma_s & \varepsilon = \varepsilon_s \end{cases}$$

理想弹塑性材料

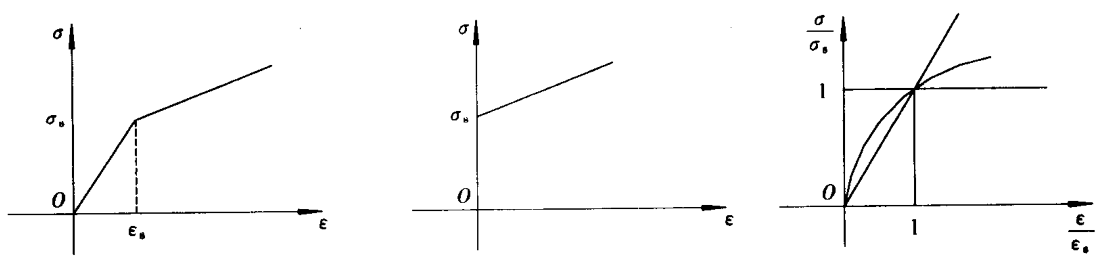
$$\sigma = \sigma_s$$

理想刚塑性材料

图 1.3

1.4.2 强化材料

对于强化阶段明显长于屈服阶段即强化性质显著的材料，可将屈服阶段忽略不计，只考虑强化阶段。这类材料称为强化材料。强化材料可再细分为三种，即线性强化弹塑性材料、线性强化刚塑性材料和幂强化材料，如图 1.4 所示。



$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & \varepsilon \leqslant \varepsilon_s \\ \sigma_s + E_1(\varepsilon - \varepsilon_s) & \varepsilon > \varepsilon_s \end{cases}$$

线性强化弹塑性模型

$$\sigma = \sigma_s + E_1(\varepsilon - \varepsilon_s)$$

线性强化刚塑性模型

$$\sigma = \sigma_s(\varepsilon/\varepsilon_s)^n \quad 0 \leqslant n \leqslant 1$$

幂强化模型

图 1.4

幂强化材料具有的模型是一种比较特殊的模型，优缺点都很明显。优点是，无论是弹性还是塑性阶段，应力－应变关系的表达式一致。

在单向拉伸应力状态下，幂强化模型曲线上任一点的切线斜率为

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = n\left(\frac{\sigma_s}{\varepsilon_s}\right)\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s}\right)^{n-1} \tag{1.2}$$

由上式可知，在原点处切线的斜率为∞。这表示此曲线在坐标原点处与 σ 轴相切，但这

与试验不符，因此此模型不能用于加载初期。

当然，在实际应用中，材料实际的应力 - 应变曲线不可能与图1.3、图1.4的五种简化模型完全相同。但是可选用其中与材料最接近的一种。另外对于不同的结构或者同一种结构的材料，在不同加载阶段也可选用不同的模型去简化。

思考题

1. 为什么对塑性力学的研究要比弹性力学复杂？
2. 对于理想塑性材料，什么条件下用理想弹塑性模型？什么条件下使用理想刚塑性模型？
3. 为什么会存在两套塑性本构关系理论？它们的区别是什么？
4. 想一想，在生活和实际工程中，还有哪些塑性变形可以利用？
5. 弹性变形与塑性变形的区别是什么？
6. 选择简化模型时，什么情况下用理想塑性模型？什么情况下用强化模型？

第2章 张量初步

在近代连续介质力学领域中广泛采用张量，尤其是一阶张量和二阶张量。力学中常用的一些重要物理量，如位移、速度、边界力等是一阶张量，应力、应变、应变率、应变增量等是二阶张量。用张量表示物理量及基本方程具有书写简洁、物理意义明确的特点。因此，本章对张量的一些重要特性进行探讨，以为今后各章的学习打下基础。

2.1 张量的定义

在力学及理论物理中，将不依赖于坐标系的物理量称为标量，如物体的质量、密度、体积、面积、温度及动能、势能、应变能等等。这些物理量只有大小没有方向。

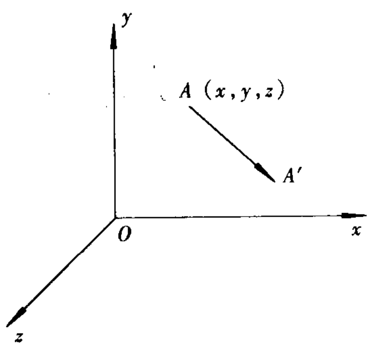


图 2.1

有些物理量需要建立在选定的坐标系中，用若干个独立的物理量才能表达出来。如图 2.1 所示，空间中某点 A 的几何位置需用参照坐标系中 3 个独立的坐标 (x,y,z) 表示出来。又如，在力的作用下，点 A 移动到点 A'，此位移在 x、y、z 方向上的分量分别为 u、v、w，即 A 点的位移需要 3 个独立的物理量 (u,v,w) 才能表示出来。

此类物理量均是由 3 个独立的量组成的集合，称为一阶张量，亦称为矢量或向量。简单地说，一阶张量是指既有大小又有方向的物理量。

在弹塑性力学中，有些物理量如应力、应变等是由 9 个独立的物理量组成的集合，如

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

这类物理量称为二阶张量。依次类推，n 阶张量应是由 3^n 个分量组成的集合。

2.2 张量的计算

2.2.1 下标记号法

下标记号法是张量的一种最简洁的表示方法。用此方法可将一阶张量和二阶张量表示如下：

①A 点的坐标 (x,y,z) 可表示为 $x_i(i=1,2,3)$；

②A 点位移 (u,v,w) 可表示为 $u_i(i=1,2,3)$；

③应力张量 $\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$ 可表示为 $\sigma_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3)$；

④应变张量$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$可表示为$\varepsilon_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3)$。

以上表明，一阶张量的下标应是1个，二阶张量的下标应是2个。依此类推，n阶张量的下标应是n个。n阶张量可表示为

$$a_{i_1 i_2 \cdots i_n}(i_1=1,2,3;i_2=1,2,3;\cdots\cdots;i_n=1,2,3)$$

2.2.2 张量的加减、乘积

1.张量的加减

同阶的张量才可以做加减法运算。设有两个n阶张量

$$\boldsymbol{A}=a_{i_1 i_2 \cdots i_n}(i_1=1,2,3;i_2=1,2,3;\cdots\cdots;i_n=1,2,3)$$

$$\boldsymbol{B}=b_{i_1 i_2 \cdots i_n}(i_1=1,2,3;i_2=1,2,3;\cdots\cdots;i_n=1,2,3)$$

这两个n阶张量的和或差也是n阶张量，即

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}$$

其中，$\boldsymbol{C}=c_{i_1 i_2 \cdots i_n}=a_{i_1 i_2 \cdots i_n}\pm b_{i_1 i_2 \cdots i_n}(i_1=1,2,3;i_2=1,2,3;\cdots\cdots;i_n=1,2,3)$ (2.1)

2.张量的乘积

与张量加减法运算不同，不同阶的张量也可以做乘除运算。设$\boldsymbol{A}$为m阶张量，$\boldsymbol{B}$为n阶张量，即

$$\boldsymbol{A}=a_{i_1 i_2 \cdots i_m}(i_1=1,2,3;i_2=1,2,3;\cdots\cdots;i_m=1,2,3)$$

$$\boldsymbol{B}=b_{j_1 j_2 \cdots j_n}(j_1=1,2,3;j_2=1,2,3;\cdots\cdots;j_n=1,2,3)$$

它们的积为$\boldsymbol{T}$，是$m+n$阶张量，即

$$\boldsymbol{T}=t_{i_1 i_2 \cdots i_m j_1 j_2 \cdots j_n}=a_{i_1 i_2 \cdots i_m}b_{j_1 j_2 \cdots j_n} \tag{2.2}$$

$$(i_1=1,2,3;i_2=1,2,3;\cdots\cdots;i_m=1,2,3;j_1=1,2,3;j_2=1,2,3;\cdots\cdots;j_n=1,2,3)$$

2.2.3 求和约定

在用下标记号法表示张量的某一项时，如有两个下标相同，则表示对此下标从1~3求和。例如

$$a_i b_i=a_1 b_1+a_2 b_2+a_3 b_3 \tag{2.3}$$

$$\varepsilon_{ii}=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}&=\sigma_{i1}\varepsilon_{i1}+\sigma_{i2}\varepsilon_{i2}+\sigma_{i3}\varepsilon_{i3}\\&=\sigma_{11}\varepsilon_{11}+\sigma_{12}\varepsilon_{12}+\sigma_{13}\varepsilon_{13}+\sigma_{21}\varepsilon_{21}+\sigma_{22}\varepsilon_{22}+\sigma_{23}\varepsilon_{23}+\sigma_{31}\varepsilon_{31}+\sigma_{32}\varepsilon_{32}+\sigma_{33}\varepsilon_{33}\end{aligned} \tag{2.5}$$

将求和约定用于含偏导数的项

$$a_{i,i}=\frac{\partial a_i}{\partial x_i}=\frac{\partial a_1}{\partial x_1}+\frac{\partial a_2}{\partial x_2}+\frac{\partial a_3}{\partial x_3} \tag{2.6}$$

$$\sigma_{ij,j}=\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}=\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1}+\frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2}+\frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} \tag{2.7}$$

在某一项中不重复出现的下标称为自由标号，可取从1至3的任意值。例如，在物体内某点的静力平衡方程为

$$\sigma_{ij,j}+f_i=0$$

其中 i 是自由标号,可以从1取到3。上式代表3个方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}+f_1=0\\ \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3}+f_2=0\\ \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}+f_3=0\end{aligned}\right\}$$

上式等价为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+f_x=0\\ \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+f_y=0\\ \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+f_z=0\end{aligned}\right\}\tag{2.8}$$

2.2.4 张量的内积

设有 m 阶张量 $\boldsymbol{A}$ 和 n 阶张量 $\boldsymbol{B}$,即

$$\boldsymbol{A}=a_{i_1i_2\cdots i_m}(i_1=1,2,3;i_2=1,2,3;\cdots\cdots;i_m=1,2,3)$$

$$\boldsymbol{B}=b_{j_1j_2\cdots j_n}(j_1=1,2,3;j_2=1,2,3;\cdots\cdots;j_n=1,2,3)$$

从张量 $\boldsymbol{A}$ 和张量 $\boldsymbol{B}$ 中各取出1个下标,约定求和一次后成为一个$(m+n-2)$阶张量。此张量称为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的内积,用 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 表示。例如:

$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=a_{ij}c_j$ 表示二阶张量 $\boldsymbol{A}$ 和矢量(一阶张量) $\boldsymbol{C}$ 做内积。该内积是一阶张量。

$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=a_{ij}b_{jk}$ 为二阶张量 $\boldsymbol{A}$ 和二阶张量 $\boldsymbol{B}$ 做内积。该内积是二阶张量。

$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{B}=d_ib_i$ 是矢量 $\boldsymbol{D}$ 和矢量 $\boldsymbol{B}$ 做内积。该内积是一个标量:

$$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{B}=d_ib_i=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\tag{2.9}$$

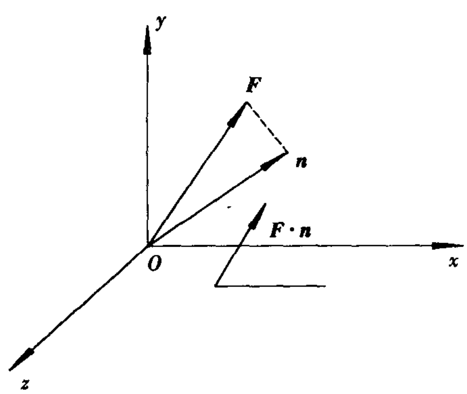


图2.2

一阶张量与一阶张量的内积运算还可以按下式进行

$$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{D}|\cdot|\boldsymbol{B}|\cdot\cos(\langle\boldsymbol{D},\boldsymbol{B}\rangle)\tag{2.10}$$

其中,$|\boldsymbol{D}|$表示矢量 D 的模,$|\boldsymbol{B}|$表示矢量 B 的模,$\langle D,B\rangle$表示矢量 D 和矢量 B 的夹角。如图2.2,在直角坐标系 $Oxyz$ 中,$\boldsymbol{F}$ 表示一作用力 $\boldsymbol{F}(F_1,F_2,F_3)$,$\boldsymbol{n}$ 表示某方向,方向余弦为(n_1,n_2,n_3),且$|\boldsymbol{n}|=1$,则

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}=F_1n_1+F_2n_2+F_3n_3=|\boldsymbol{F}|\cdot\cos(\langle\boldsymbol{F},\boldsymbol{n}\rangle)\tag{2.11}$$

由式(2.11)可知,$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 方向上的投影。

2.3 坐标变换

设 $Ox_1x_2x_3$是一直角坐标系,$Ox'_1x'_2x'_3$是旋转坐标轴后得到的新坐标系。新旧坐标系间存