拓扑学

孙克宽 郭驼英 梁肇军

C B J J

2002 · 武汉

华中师范大学出版社

(鄂)新登字 11 号

图书在版编目(CIP)数据

拓扑学/孙克宽　郭驼英等编.
—武汉:华中师范大学出版社,2002.1
ISBN 7-5622-2499-4/O.133

Ⅰ.拓…　Ⅱ.①孙…　②郭…　③梁…
Ⅲ.拓扑-高等学校-教材　Ⅳ.O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 083304 号

拓扑学
孙克宽　郭驼英　梁肇军

华中师范大学出版社出版发行
(武昌桂子山　邮编:430079　电话:027-87876240)
新华书店湖北发行所经销　　武汉理工大学印刷厂印刷

责任编辑:曾太贵　　封面设计:新视点
责任校对:罗　艺　　督　　印:方汉江

开本:850 mm×1168 mm　1/32　　印张:9.25　字数:235 千字
版次:2002 年 1 月第 2 版　　2002 年 1 月第 1 次印刷
印数:1-1500　　定价:14.00 元

本书如有印装质量问题,可向承印厂调换。

前　　言

优质橡皮膜可作弯曲、拉伸和压缩等等各种各样的变形，只要在变形过程中既不增加也不减少橡皮膜的点，不使原来不同的点重叠为同一个点，也不使橡皮破裂．通过这种变形，橡皮膜可以从它原来的形状变成许多新形状．物体作类似于橡皮膜上述变形的现象，现实世界中是普遍的．这种变形的数学抽象即所谓几何图形的拓扑变换，图形在拓扑变换下保持不变的性质就是图形的拓扑性质．拓扑学就是一门研究图形的拓扑性质的学科，它是几何学的一个崭新分支．

拓扑学作为一个学科出现，从 Poincaré 1895 年相继发表的一系列论文算起，至今还不到 100 年．今天它已经发展成为包括点集拓扑（又名一般拓扑）、代数拓扑和微分拓扑等重要分支的庞大学科．拓扑学是近代数学一个十分重要的分支，它的发展不仅深刻地影响着数学其他分支，而且在其他学科和社会实践中也得到了日益广泛的应用．由于此，许多高等院校有关专业都先后开设了这门课．

本书是根据我系本科生、研究生拓扑基础课的教学需要而编写的一本拓扑学入门教材．曾在我系多次试用．全书共 10 章，包括点集拓扑、微分流形、代数拓扑三部分内容的初步知识．第 1～3 章介绍点集拓扑最必要的初步知识，第 4、5 两章介绍微分流形和切丛的基本概念，第 6～9 章是代数拓扑的初步知识，包括基本群、覆盖空间、单纯复形、奇异同调和某些经典的应用，第 10 章讲外微分式和 De Rham 上同调．

参照 1980 年全国教材会议拟订的拓扑学教学大纲，我们在编写本书时考虑到以下两点：

第一，鉴于微分流形在现代数学中的重要性，我们压缩了点集拓扑的某些内容，加进了微分流形的初步内容，力求将点集拓扑、微分流形、代数拓扑三部分内容的初步知识有机地融为一体，使读者对拓扑学有一个较为完整的了解；同时各部分又各有相对独立性，以便根据需要灵活取舍教材．学过点集拓扑之后，想了解微分流形的初步知识，可选学第 4、5 两章和第 10 章前两节．要了解代数拓扑初步则可选学第 6～9 章．

第二，在同伦群中选取基本群，在同调群中选取奇异同调群，在上同调群中选取 De Rham 上同调作为例子，由浅入深作较详细的介绍，着眼于让学生了解代数拓扑的基本思想方法．把单纯同调群对奇异同调群放在类似于棱道群对基本群的地位进行介绍，我们认为这样作，较有利于让学生接受奇异同调论，较早地接触一点较近代的处理方法．

本书的编写得到了我校李修睦、邓宗琦教授的鼓励和支持，刘世泽副教授参与了编写大纲的讨论工作，河南大学刘亚星教授，中国科学技术大学徐森林教授，武汉大学杨文茂、张敦穆教授、中南民族学院张群教授都曾看过本书部分初稿，给予我们鼓励和不少教益，在此一并致谢．

本书初稿由孙克宽、郭驼英合编，修改稿第 0～3 章由郭驼英、第 4、5 两章由梁肇军、第 6～10 章由孙克宽执笔．虽经多次试用修改，但限于作者水平，一定还有许多不足之处，恳切希望读者批评指正．

编　者

目　　录

第 0 章　集合与映射

集合论的初步知识假定读者业已具备. 本章仅列举本书常用的术语、结论和符号.

§0.1　集合与符号

集合是数学中最基本的概念之一,它的精确含义在公理集合论中用公理来规定. 本书满足于通常的描述性定义,即具有某种共同特点的对象的总体叫做集合. 集合常用大写字母 A、B、C 等来表示,这些对象叫做集合的元素或点,常用小写字母 x、y 等来表示. 具有性质 p 的所有 x 之集合记为 $\{x \mid p(x)\}$,例如

$\mathbf{N}=\{x \mid x$ 是自然数$\}$——**自然数集**.

$\mathbf{Z}=\{x \mid x$ 是整数$\}$——**整数集**.

$\mathbf{Q}=\{x \mid x$ 是有理数$\}$——**有理数集**.

$\mathbf{R}=\{x \mid x$ 为实数集$\}$——**实数集**.

$A(n)=\{1,2,\cdots,n\}$——从 1 到 n 的自然数段.

没有元素的集合称为**空集**记作 $\varnothing$.

$x \in A$ 表示 x 是集 A 的元素,读作"x 属于 A";$x \notin A$ 表示 x 不是集 A 的元素,读作"x 不属于 A".

设 A、B 为二集合:

(1) 若 $x \in A \Rightarrow x \in B$,则称 A 是 B 的**子集**,记作 $A \subset B$(A 含于 B)或 $B \supset A$(B 包含 A). 显然空集 $\varnothing$ 含于任何集 A 中,即 $\varnothing \subset A$.

(2) 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称 A 与 B **相等**,记为 $A=B$;否则,称 A 不等于 B,记为 $A \neq B$.

(3) 若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$,则称 A 是 B 的**真子集**.

我们常常要讨论以集合为元素的集合,为了强调这种特点,这类集合常称为**集族**,用花写字母 $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C}$ 等表示.

例如 $\mathscr{A}=\{\{1\},\{1,2\},\varnothing\}$ 是一个集族,它有三个元素 $\{1\}$,$\varnothing$ 和 $\{1,2\}$.应当注意:$2\in\{1,2\}\in\mathscr{A}$,但是 $2\notin\mathscr{A}$.集族 $\{\varnothing\}$ 与空集 $\varnothing$ 是不同的.

给定集 X,由 X 的一切子集构成的集族叫做 X 的**幂集**,记为 2^X.例如集 $X=\{1,2\}$,X 的幂集 $2^X=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$.

由于习惯,也是为了叙述简明,下述符号本书也常采用:

$\exists\, x$——表示存在一个 x 或至少有一个 x.

$\exists\, 1x$—存在惟一的 x.

$\forall\, x$——任给 x 或对每一个 x.

s.t.——使得.

$A\Rightarrow B$——若 A 则 B.

$A\Leftrightarrow B$——命题 A 为真的充要条件是 B 真,或 A 成立当且仅当 B 成立.

§0.2 集合的运算

在讨论某一具体问题时,所考虑的集合都是某一"特定集合"的子集,我们称这个"特定集合"为**基础集**.不同的具体问题有不同的基础集.例如在平面几何中,我们所讨论的所有图形都是"全平面"这样一个特定集合的子集,此时"全平面"就是基础集.而在立体几何中,"三维空间"是基础集.

0.2.1 定义 设 X 是基础集,A 和 B 都是 X 的子集.

(1) 集合 $\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ 称为 A 与 B 的**并集**,记作 $A\cup B$,读作 A 并 B.

(2) 集合 $\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$ 称为 A 与 B 的**交集**,记作 $A\cap B$,读作 A 交 B.

(3) 集合 $\{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$ 称为 A 与 B 的**差集**，记作 $A \setminus B$，读作 A 减去 B. $X \setminus A$ 简记为 A^c，称为 A 的**补集或余集**.

我们所考虑的集合，一般都是某一基础集的子集. 在讨论中，有时不必指出基础集，有时读者从条件中就可知道基础集，因此基础集这个名词常常省略.

0.2.2 定理　若 A、B、C 为集合，则

(1) $A \cup A = A$,　$A \cap A = A$.　**(等幂律)**

(2) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.　**(交换律)**

(3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.　**(结合律)**

(4) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$,

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.　**(分配律)**

(5) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.　**(De Morgan 律)**　▌

0.2.3 定理　设 A、B 是 X 的子集，则

(1) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$.

(2) $A \cup A^c = X$,　$A \cap A^c = \emptyset$.

(3) $(A^c)^c = A$,　$A \setminus B = A \cap B^c$.　▌

我们还可以由两个集合的并集与交集推广到任意多个集合的并集与交集，使得前者是后者的特例.

0.2.4 定义　设 $\mathscr{A}$ 为集族，则 $\mathscr{A}$ 中所有元素之并是集合

$\{x \mid \exists A \in \mathscr{A}$ **s.t.** $x \in A\}$，记作 $\bigcup\{A \mid A \in \mathscr{A}\}$ 或 $\bigcup\limits_{A \in \mathscr{A}} A$.

$\mathscr{A}$ 中所有元素之交是集合

$\{x \mid \forall A \in \mathscr{A}$ 有 $x \in A\}$，记作 $\bigcap\{A \mid A \in \mathscr{A}\}$ 或 $\bigcap\limits_{A \in \mathscr{A}} A$.

若 $\mathscr{A} = \{A_1, \cdots, A_i, \cdots\}$，也可记 $A_1 \cup \cdots \cup A_i \cdots = \bigcup\limits_{i \in N} A_i$ 及 $A_1 \cap \cdots \cap A_i \cdots = \bigcap\limits_{i \in N} A_i$.

0.2.5 定理　设 φ、φ_1、φ_2 为集族，A 为集合，则

(1) $\left(\bigcup_{s\in\varphi_1} S\right)\cup\left(\bigcup_{s\in\varphi_2} S\right)=\bigcup_{s\in\varphi_1\cup\varphi_2} S$,

$\left(\bigcap_{s\in\varphi_1} S\right)\cap\left(\bigcap_{s\in\varphi_2} S\right)=\bigcap_{s\in\varphi_1\cup\varphi_2} S$.

(2) $A\cap\left(\bigcup_{s\in\varphi} S\right)=\bigcup_{s\in\varphi}(A\cap S)$,

$A\cup\left(\bigcap_{s\in\varphi} S\right)=\bigcap_{s\in\varphi}(A\cup S)$.

(3) $A\in\varphi\Rightarrow\bigcap_{s\in\varphi} S\subset A\subset\bigcup_{s\in\varphi} S$. = ▌

0.2.6 **定理** 若 X 为集合,$\varphi\subset 2^X$,则

(1) 当 φ 是空族时,有 $\bigcup_{s\in\varphi} S=\varnothing$, $\bigcap_{x\in\varphi} S=X$.

(2) (De Morgan 公式)

$\left(\bigcup_{s\in\varphi} S\right)^c=\bigcap_{s\in\varphi} S^c$, $\left(\bigcap_{s\in\varphi} S\right)^c=\bigcup_{s\in\varphi} S^c$.

证明 仅证(1).若有 $x\in\bigcup_{s\in\varphi} S$,则 $\exists\, S\in\varphi$ **s.t.** $x\in S$,这与 φ 为空族矛盾,所以 $\bigcup_{s\in\varphi} S=\varnothing$. 若有 $x\in X$ **s.t.** $x\notin\bigcap_{s\in\varphi} S$,则 $\exists\, S\in\varphi$ **s.t.** $x\notin S$,这也与 φ 为空族矛盾,所以 $\bigcap_{s\in\varphi} S=X$. ▌

§0.3 关 系

0.3.1 **定义** n 个集合 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的**笛卡尔积**定义为

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} X_i &= X_1\times X_2\times\cdots\times X_n\\ &=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in X_i,\ i=1,2,\cdots,n\}.\end{aligned}$$

若 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\prod_{i=1}^{n} X_i$,则 x_i 叫 x 的第 i 坐标.

n 个集合 X 的笛卡尔积 $X\times\cdots\times X$ 常记作 X^n.

例如 $\mathbf{R}$ 是实数集,$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\mathbf{R}^2$ 表示平面上的全体点集.

S^1 是平面上的单位圆,$I=[0,1]=\{x\in\mathbf{R}\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$,则 $S^1\times I$ 表示以 S^1 为底,以 I 为高的圆柱面上的点集.

0.3.2 **定义** 设 X、Y 为集合,X 与 Y 的笛卡尔积 $X\times Y$ 的每一子集 R 都称为从 X 到 Y 中的**关系**.若 $(x,y)\in R$,则称 x 与 y

是 R-**相关的**,并记作 xRy.

0.3.3 **定义**　从集合 X 到 X 中的关系常简称为**集合 X 中的关系**.设 R 是集合 X 中的关系,并且满足:

(1) **反身性**　$\forall x\in X$,有 xRx.

(2) **对称性**　$\forall x,y\in X, xRy\Rightarrow yRx$.

(3) **传递性**　$\forall x,y,z\in X, xRy, yRz\Rightarrow xRz$.

则关系 R 称为**等价关系**.此时,若 xRy,称 x 与 y 等价.

若 R 是集合 X 中的一个等价关系,$x\in X$,则集合 $\{y\in X \mid xRy\}$ 称为 x **关于 R 的等价类**,记作 $[x]_R$ 或简记作 $[x]$.

0.3.4 **定理**　设 R 是集合 X 中的一个等价关系,那么:

(1) $\forall x\in X, [x]_R\neq\varnothing$,并且 $X=\bigcup_{x\in X}[x]$;

(2) $\forall x,y\in X, [x]\cap[y]\neq\varnothing\Rightarrow[x]=[y]$.　▌

上面的定理说明等价关系 R 将 X 分割为互不相交的非空等价类.

0.3.5 **定义**　设 R 是 X 中的等价关系,集族 $\{[x]_R \mid x\in X\}$ 称为**集合 X(关于 R)的商集**,记作 X/R.

0.3.6 **例**　设 $A\subset X$,令 $R=(A\times A)\cup\{(x,x)\mid x\in X\}$,则 R 是 X 中的一个等价关系,此时商集 X/R 常记为 X/A,即 $X/R=X/A=\{A\}\cup\big\{\{x\}\mid x\in A^c\big\}$. $\forall x\in X$,若 $x\in A$,则 $[x]=A$;若 $x\notin A$,则 $[x]=\{x\}$.　▌

§0.4　映　　射

0.4.1 **定义**　设 f 是从集合 X 到集合 Y 中的关系,若 $\forall x\in X$, $\exists 1 y\in Y$ s.t. $(x,y)\in f$,则称 f 是**从 X 到 Y 的一个映射**,记作 $f:X\to Y$. $(x,y)\in f$ 时,记作 $y=f(x)$. X 称为 f 的**定义域**,Y 称为 f 的**值域**.

0.4.2 **定义**　若 $f:X\to Y, A\subset X, B\subset Y$,则集合

$$f(A)=\{f(x)\in Y \mid x\in A\}$$

称为 A 在 f 之下的**象**,集合

$$f^{-1}(B)=\{x\in X \mid f(x)\in B\}$$

称为 B 在 f 之下的**原象**.对 $\forall y\in Y, f^{-1}(\{y\})$ 也记为 $f^{-1}(y)$.

0.4.3 定义 设 $f:X\to Y$,若 $f(X)=Y$,则称 f 为**满射**;若 $\forall y\in Y, f^{-1}(y)$ 或为空集或为独点集,则称 f 为**单射**.既单且满的映射称为**一一对应**或**双射**.

0.4.4 定理 若 $\mathscr{A}\subset 2^X, \mathscr{B}\subset 2^Y, f:X\to Y$,则

(1) $f(\bigcap\limits_{A\in\mathscr{A}} A)\subset \bigcap\limits_{A\in\mathscr{A}} f(A)$.

(2) $f(\bigcup\limits_{A\in\mathscr{A}} A)=\bigcup\limits_{A\in\mathscr{A}} f(A)$.

(3) $f^{-1}(\bigcap\limits_{B\in\mathscr{B}} B)=\bigcap\limits_{B\in\mathscr{B}} f^{-1}(B)$.

(4) $f^{-1}(\bigcup\limits_{B\in\mathscr{B}} B)=\bigcup\limits_{B\in\mathscr{B}} f^{-1}(B)$. ▌

0.4.5 定理 若 $f:X\to Y, A\subset X, B\subset Y$,则

(1) $A\subset f^{-1}(f(A))$.若 f 是单射,则 $A=f^{-1}(f(A))$.

(2) $f(f^{-1}(B))\subset B$.若 f 是满射,则 $f(f^{-1}(B))=B$.

(3) $f^{-1}(B^c)=[f^{-1}(B)]^c$.

(4) 若 f 是满射,则 $[f(A)]^c\subset f(A^c)$;若 f 是单射,则 $f(A^c)=f(X)\setminus f(A)\subset(f(A))^c$. ▌

以下 0.4.6~0.4.8 是几个特殊映射的例子.

0.4.6 定义 $1_X:X\to X$,定义为 $1_X(x)=x, x\in X$,则 1_X 叫做集合 X 上的**恒等映射**.若 $f:X\to Y, A\subset X$,按"$f|_A(x)=f(x), x\in A$."定义的映射 $f|_A$ 叫做 f 在 A 上的**限制**,此时,f 称为是 $f|_A$ 在 X 上的**开拓**.特别地,$(1_X)|_A:A\to X$ 叫做**包含映射**,也记为 $i:A\to X$.

0.4.7 定义 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为集合,$\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$

$$p_i:\prod_{j=1}^{n} X_j\to X_i \text{ 为 } p_i(x)=x_i,$$

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n)\in\prod_{i=1}^{n}X_i$$

称为笛卡尔积$\prod_{i=1}^{n}X_i$向第 i 个因子集 X_i 的**投射**,简称第 i 投射或者称为$\prod_{i=1}^{n}X_i$的第 i 个**坐标函数**.

0.4.8 **定义**　设 R 为集合 X 中的一个等价关系,

$$\pi:X\to X/R,\pi(x)=[x],x\in X.$$

称为 X 到其商集 X/R 的**自然投影**. 显然 π 是满射.

0.4.9 **定义**　若 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$,则 $\forall x\in X$,令 $g\circ f(x)=g(f(x))$,映射 $g\circ f:X\to Z$ 叫做 f 和 g 的**复合映射**.

0.4.10 **定理**　若 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$, $h=g\circ f:X\to Z$,则

(1) h 为单射$\Rightarrow f$ 为单射.

(2) h 为满射$\Rightarrow g$ 为满射.

(3) f 为单(满)射和 g 为单(满)射$\Rightarrow h$ 为单(满)射.

0.4.11 **定理**　$f:X\to Y$ 为一一对应当且仅当 $\exists g:Y\to X$ s.t. $g\circ f=1_X$ 和 $f\circ g=1_Y$. 此时 g 叫做 f 的逆映射,记为 $g=f^{-1}$.　▍

习　题

1. 设 A、B、C、D 是任意集合,证明

(1) $A=(A\cap B)\cup(A\setminus B)$,　$A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$.

(2) $A\cup B=A\cup(B\setminus A)$,　$A\cap B=A\setminus(A\setminus B)$.

(3) $A\subset B^c\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$.

(4) $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$.

(5) $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$,

$(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$.

(6) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

(7) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

(8) $A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$.

(9) $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)=(A\times D)\cap(B\times C)$.

2. 试写出 $\mathbf{R}$ 中的等价关系 R，它使得

$$\mathbf{R}/R=\{\{x\in\mathbf{R}\mid x\geqslant 0\},\{x\in\mathbf{R}\mid x<0\}\}.$$

3. 证明定理 0.4.5.

4. 设 $f:X\to Y, A\subset X, B\subset Y$，证明

(1) $f(A\cap f^{-1}(B))=f(A)\cap B$.

(2) $f(A\setminus f^{-1}(B))=f(A)\setminus B$.

5. 设 $f:X\to Y$，若 $A\subset X, B\subset Y$，则

$$(f|_A)^{-1}(B)=A\cap f^{-1}(B).$$

6. 设 $X_1=\{1,2\}, X_2=\{a,b,c\}, p_i:X_1\times X_2\to X_i(i=1,2)$ 为第 i 投射，$A_1=\{1\}, A_2=\{a,b\}$. 试写出 $p_i^{-1}(A_i)$、$A_1\times A_2$ 和 $p_i(A_1\times A_2)$.

第一章　拓扑空间与连续映射

拓扑学，俗名橡皮几何学，是在 20 世纪发展起来的一种近代几何学. 它的中心任务是研究拓扑变换下的不变量.

我们知道，在近世代数中，对任意一个集合，赋予它一个或两个适合一定条件的运算，使它成为一个群、环或域，就说这个集合具有一个代数结构，因而就可以在其中进行代数问题的研究了.

类似地，我们也希望能在任意集合上考虑连续，于是产生了"拓扑"的思想. 对任意一个集合，赋予它一个"拓扑结构"，使它成为拓扑空间，因而就可以在其中讨论连续问题了，从而可以研究拓扑变换(是特殊的连续映射)下的不变量.

这一章的主要任务是：对一个集合赋予"拓扑结构"，并考虑与其相关的一些基本概念；在拓扑空间中讨论连续问题.

§1.1　度量空间

我们之所以先讨论度量空间，是因为度量空间是一类特殊的拓扑空间，并且我们熟悉的 n 维欧氏空间又是一类特殊的度量空间.

1.1.1 **定义**　设 X 为非空集合，若 $\exists\, \rho: X \times X \to \mathbf{R}$，使 $\forall\, x, y, z \in X$ 满足：

(1) $\rho(x, y) \geqslant 0$ 并且 $\rho(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$；

(2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$；

(3) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.　(三角不等式)

则称 $\boldsymbol{\rho}$ **为** $\boldsymbol{X}$ **上的一个度量**，偶对 (X, ρ) 为**度量空间**，$\rho(x, y)$ 称为