續對數簡法（求表捷術之一）

戴煦撰

中華書局

數之用。乘除加減而已。乘與除對。加與減對。而乘除之與加減。則兩不相通。對數欲以加減代乘除。故求之殊不易。鄂士戴先生著爲簡法。別立開方製表。得表後以累除代開。後復捨開方而用假設數。求定準數。較舊已簡。顧其開平方用遞乘遞除。竊謂此乃開諸乘方通法。不獨平方。以語鄂士。翼日各以所立術互質。允若合符。說詳自序。鄂士既得此通法。乃續行推衍。分倍大折小率。以示其綱。求對數根以總其要。參之用數借數以濟其窮。于是法愈簡。得數亦愈密。書成。屬序于余。余維加減不通于乘除。而妙能通之者。惟遞加數。數中遞加一、得諸根。遞加根、得平積。遞加平積。得立積。乃至多乘積。加既由根而得積。減亦由積而得根。蓋加卽乘。減卽除矣。且逐層皆屬方廉隅。遞以次層乘之。首層除之。得自上而下逐層。而其數皆倍。遞以首層乘之。次層除之。得自下而上逐層。而其數皆半。是則諸乘方連比例。與夫假數折半眞數開方之蘊。悉錯綜參伍。默而寓之於一圖。開方通法。卽從此數轉變而出者。故能抉乘除加減之根。而操乎其所不得遁。遞加之爲數。誠妙矣哉。此數舊稱廉率。亦曰三角堆。惜未有表章而推闡之者。今鄂士以此闡對數。逐次乘除法。遞加根也。二數三數至多數。遞加積也。根定而積從。于此探對數之眞源。卽于此顯遞加之神應。讀是書者果因端竟委而觀其通。會心當自不遠也。道光丁未巧夕前一日。梅侶弟項

名達題于印蓮小室

前歲之秋。予以對數簡法呈梅侶項先生。翼日謂予曰。連比例遞求法。可開平方。亦可開諸乘方。會得二術。屬稿未定。予歸而思之。亦得二術。以呈先生。而先生亦以定稿見示。其逐數皆正一術。與予正負相間者不同。其第一數正。而以下皆負、一術。則若合符節焉。於是開諸乘方。遂有三術。予思既有三術。必更有一術。因補衍之。將呈先生而先生適以補衍一術見示。又若合符節焉。惟先生以乘數加一爲廉率。而予以連比例率推之。復一一脗合。因以其法。用代累乘求積。亦無不可通。乃知廉率本通於連比例率也。夫對數開平方多次。以開方舊法至十二乘。已屬繁重。斷難開至億兆乘。故以平方代開耳。今開諸乘方。既通爲一法。可不必代開。由是因繁得簡。復推得開極多位九乘方之法。而對數之簡法出矣。蓋前術用假設對數。乃立天元一術。卽西人之借根方。但天元一可乘而不受除。常寄除法爲母。今須累除數百次。則寄母極繁。不可算。不得不徑用除法。既用除法。則數百次之畸零累積。其差甚大。故難求至多位。不如連比例遞求法之所差極微也。至對數還原。卽代累乘求積之法而變通之。因亦類坿焉。丙午秋八月。鄂士戴煦識於脩汲齋。

續對數簡法總目

續對數簡法

論率

對數生於連比例率。如設一數爲本數第一率。命爲方根。則其自乘之積。爲倍大第二率。再自乘之積。爲倍大第三率。三自乘之積。爲倍大第四率。故以本數之對數二乘之。卽自乘積之對數。三乘之。卽再乘積之對數。四乘之。卽三乘積之對數。若反言之。則設一數爲本數第一率。命爲方積。而其開平方之根。爲折小第二率。開立方之根。爲折小第三率。三乘方之根。爲折小第四率。故以本數之對數二除之。卽平方根之對數。三除之。卽立方根之對數。四除之。卽三乘方根之對數。推之多乘。其倍大折小之率。莫不皆然。然倍大各率。與連比例率相應。而折小各率不相應者。（謂二率平方積自乘。一率方根除之。得三率立方積。二三率平方立方二積相乘。一率方根除之。得四率三乘方積。推之各率皆然。折小各率則不然。）蓋倍大之率。率數也。故求對數用乘法。折小之率。率分也。故求對數用除法。倍大不僅率數。亦有率分。如以二率之二除一率之一。得〇五。卽倍大第二率之率分。以三率之三除一率之一。得〇三三三零。卽倍大第三率之率分。折小不僅率分。亦有率數。如〇五。卽折小第二率之率數。〇三三三零。卽折小第三率之率數。其倍大折小同率之率分率數。恆兩兩反對。其每率之率分率數。恆與第一率之一爲三率連比例而必以一爲中率。故以率分除之。或以率數乘之。得數必同。且不特此也。率有整。亦有零。整率者。如倍大折小一二三四等率。非率分爲整數。卽率數爲整數。零率者。如有一數較本數

開平方根則不足．較本數開立方根則有餘．其率分必爲二而下帶畸零小餘．或較本數自乘積則有餘．較本數再乘積則不足．其率數亦必爲二而下帶畸零小餘．而以此種帶畸零之率分或率數爲首率．一爲中率．求其末率．必仍帶畸零．是此種倍大折小之率分率數．皆帶畸零而成零率矣．若今所用之對數．正眞數之率數也．（非率分）而其本數第一率爲一〇．故一〇之對數爲一．卽一率之一．而一〇〇爲本數倍大第二率．其對數亦爲二．一〇〇〇爲本數倍大第三率．其對數亦爲三．若一以上．一〇以下．（自二至九）則不滿一率．故對數首位爲〇．而下帶畸零．一〇以上．一〇〇以下．（自十一至九十九）則不滿二率．故對數首位爲一．而下帶畸零．此卽所謂零率也．知對數之爲連比例率數．而求對數之法．可得而言矣．

倍大率

率數	一率	率分
一〇〇〇	方根	一〇〇〇
	二率	
二〇〇〇	平方積	〇五〇〇
	三率	
三〇〇〇	立方積	〇三三三
	四率	
四〇〇〇	三乘方積	〇二五〇
	五率	
五〇〇〇	四乘方積	〇二〇〇
	六率	
六〇〇〇	五乘方積	〇一六六
	七率	
七〇〇〇	六乘方積	〇一四二
	八率	
八〇〇〇	七乘方積	〇一二五
	九率	
九〇〇〇	八乘方積	〇一一一
	十率	
十〇〇〇	九乘方積	〇一〇〇

折小率

率數	一率	率分
一○○○	方積	一○○○
	二率	
○五○○	平方根	二○○○
	三率	
○三三三	立方根	三○○○
	四率	
○二五○	三乘方根	四○○○
	五率	
○二○○	四乘方根	五○○○
	六率	
○一六六	五乘方根	六○○○
	七率	
○一四二	六乘方根	七○○○
	八率	
○一二五	七乘方根	八○○○
	九率	
○一一一	八乘方根	九○○○
	十率	
○一○○	九乘方根	十○○○

以本數爲積求折小各率

第一術

法檢本率乘數之開方初商表。取其較小於本數者。以其根爲第一數正。　次以本數爲除法。以初商實減本數。其減餘數爲乘法。其所求第幾率。名爲率分。乃以乘法乘第一數。除法除之。又以率分除之。爲第二數正。　以乘法乘第二數。除法除之。又以率分加一、乘之。二因率分除之。爲第三數正。　乘法乘第三數。除法除之。二因率分加一、乘之。三因率分除之。爲第四數正。　乘法乘第四數除法除之。三因率分加一、乘之。四因率分除之。爲第五數正。　如是遞求至應求位數。乃并諸正數。得所求。

按．此術項氏所定．

第二術

法檢本率乘數之開方初商表．取其較小於本數者．以其根爲第一數正． 次以初商實爲除法．以初商實減本數．其減餘數爲乘法．乃以乘法乘第一數．除法除之．又以率分除之．爲第二數正． 乘法乘第二數．除法除之．又以率分減一、乘之．二因率分除之．爲第三數負． 乘法乘第三數．除法除之．二因率分減一、乘之．三因率分除之．爲第四數正． 乘法乘第四數．除法除之．三因率分減一、乘之．四因率分除之．爲第五數負． 如是遞求至應求位數．乃幷諸正數．又幷諸負數、減之．得所求．

按．此術予所定．

第三術

法檢本率乘數之開方初商表．取其較大於本數者．以其根爲第一數正． 次以初商實爲除法．初商實內減本數．其減餘數爲乘法．乃以乘法乘第一數．除法除之．又以率分除之．爲第二數負． 乘法乘第二數．除法除之．又以率分減一、乘之．二因率分除之．爲第三數負． 乘法乘第三數．除法除之．二因率分減一、乘之．三因率分除之．爲第四數負． 乘法乘第四數．除法除之．三因率分減一、乘之．四因率分除之．爲第五數負． 如是遞求至應求位數．乃幷諸負數．減第一正數．得所求．

按．前開平方七術．即此法．

第四術

法檢本率乘數之開方初商表。取其較大於本數者。以其根爲第一數正。　次以本數爲除法。初商實內減本數。其減餘數爲乘法。乃以乘法乘第一數。除法除之。又以率分除之。爲第二數負。　乘法乘第二數。除法除之。又以率分加一、乘之。二因率分除之。爲第三數正。　乘法乘第三數。除法除之。二因率分加一、乘之。三因率分除之。爲第四數負。　乘法乘第四數。除法除之。三因率分加一、乘之。四因率分除之。爲第五數正。　如是遞求至應求位數。乃并諸正數。又并諸負數、減之。得所求。

按。前二術予所定。與項氏所定暗合。

以本數爲根求倍大各率。

第一術

法任截本數幾位。依本率乘數累乘之。爲第一數正。　次以本數爲除法。本數內減截去數爲乘法。其所求第幾率名爲率數。乃以乘法乘第一數。除法除之。又以率數乘之。爲第二數正。　乘法乘第二數。除法除之。又以率數加一、乘之。二除之。爲第三數正。　乘法乘第三數。除法除之。率數加二、乘之。三除之。爲第四數正。　乘法乘第四數。除法除之。率數加三、乘之。四除之。爲第五數正。　如是遞求至單位下。乃并諸正數。得所求。

第二術

法任截本數幾位.依本率乘數累乘之.爲第一數正.　次以截去數爲除法.本數內減截去數.其減餘數爲乘法.乃以乘法乘第一數.除法除之.又以率數乘之.爲第二數正.　乘法乘第二數.除法除之.率數減一、乘之.二除之.爲第三數正.　乘法乘第三數.除法除之.率數減二、乘之.三除之.爲第四數正.　乘法乘第四數.除法除之.率數減三、乘之.四除之.爲第五數正.　如是遞求至率數減盡而止.乃并諸正數.得所求.

第三術

法任截本數幾位.於末位加一.依本率乘數累乘之.爲第一數正.　次以截去數加一、爲除法.截去數加一、內減本數.其減餘數爲乘法.乃以乘法乘第一數.除法除之.又以率數乘之.爲第二數負.　乘法乘第二數.除法除之.率數減一、乘之.二除之.爲第三數正.　乘法乘第三數.除法除之.率數減二、乘之.三除之.爲第四數負.　乘法乘第四數.除法除之.率數減三、乘之.四除之.爲第五數正.　如是遞求至率數減盡而止.乃并諸正數.又并諸負數.減之.得所求.

第四術

法任截本數幾位.依前術加一.依本率乘數累乘之.爲第一數正.　次以本數爲除法.截去數加一、內減本數.其減餘數爲乘法.乃以乘法乘第一數.除法除之.又以率數乘之.爲第二數負.　乘法乘第二數.除法除之.率數加一、乘之.二除之.爲第三數正.　乘法乘第三數.除法除之.率數加二、乘之.三除之.爲第四

數負。乘法乘第四數。除法除之。率數加三、乘之。四除之。爲第五數正。　如是遞求至單位下。乃并諸正數。又并諸負數、減之。得所求。

按有本數求倍大折小各率。本通爲一法。非有二義。其第二數倍大用率數乘者。緣率分、率數、與單一、爲三率連比例。率分爲首率。則單一爲中率。率數爲末率。故以率分除之之數。即同於率數乘之之數。而折小各率。率分整而率數零。故用率分爲便。倍大各率。率數整而率分零。故用率數爲便也。其第三數以率數加減一乘之。二除之者。緣連比例首率與中率之比。同於中率與末率之比。前四術。首率內加減中率乘之。倍首率除之。後四術。中率內加減末率乘之。倍中率除之。其得數必同也。以下各數。其義倣此。第二三術。與前第二三術。正負各異者。緣乘法雖云率數內減一。實一內減率數。其減餘爲負算。故乘爲負乘。既爲負乘。則乘後之正負必變。故能變逐數皆負者爲正負相間。變正負相間者爲逐數皆正也。其率數減盡而止者。凡算例以適足爲實。任以正數負數乘除之。必仍爲適足。或正負數爲實以適足數乘除之。亦爲適足。故率數減盡。則以下無數也。

又按前四術可爲開方捷法。後四術所求止須以本數累乘。即得。而挨次遞求。似乎較煩。然開方與累乘。但能求倍大折小各整率。若前八術。則凡第一數可知者。雖零率亦可求。用之對數。爲尤要也。

又按每數通用之乘法除法。若先以除法除乘法。用爲遞次乘法。則一次乘可代一乘一除。若先以乘法除除法。用爲遞次除法。則一次除可代一乘一除。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

論對數根

對數根者．諸對數之所生．卽單一下無數空位零一之對數也．舊法以一〇爲積．開方五十四次．以其方根單一下空位後所帶之零數、爲一率．單一折半五十四次、卽一兆八千餘億除單一之數．爲二率．單一下十五空位零一之一、爲三率．求得四率．爲對數根．夫以一〇爲積．開方五十四次．卽以一〇爲本數第一率．求折小第一兆八千零一十四萬三千九百八十五億零九百八十四萬一千九百八十四率也．今有本數．卽可求折小各率．則是第五十四次開方數．可以徑求矣．既可徑求．則求第一兆八千餘萬億率．不如求第一無量數率．無量數．猶云一千或一萬．何也．蓋一兆八千餘萬億率．爲第五十四次開方數之率．分其位數甚多．用連比例求得率數．亦有多位．卽第五十四次開方數之對數．而布算甚繁．一無量數．數雖極大．而仍爲一．不過一下有無數空位耳．以爲首率．用連比例求末率．必爲單位下無數空位零一．此卽求對數根四率之二率．數既爲一．可省多位乘法一次．且一無量數較一兆有零爲尤密也．

今定一〇之對數爲單一．求對數根．

法先以一〇開平方五次．或開平方三次．三乘方一次．或平方一次．三乘方二次．皆可．但取其降位易而已．得折小第三十二率一〇七四六〇七八二八三二一三一七四九七．爲對數根之用數．用數見後．第三十二率以前各率爲用數．則降位稍難．若三十二率以後皆可爲用數．不必定用三十二率也．置用數．減去首位單一．以除用數．得一四四〇三四一九二一八八六八六五三九．爲遞次除去．用數爲通用除法．用數減首位爲通用乘法．此卽前所云以乘法除除法．爲遞次除法．則一次除．可代一乘一除也．乃以除法除單一．以折小率三十二乘之．得二二二二

一六九四六九〇二四九六三二六六爲第一數正。除法除第一數。一乘之。二除之。得七七一二三八六四〇一〇六七八三〇爲第二數正。除法除第二數。二乘之。三除之。得三五六九七〇一六四九二五一二二爲第三數正。除法除第三數。三乘之。四除之。得一八五八七七八二四九九八〇五爲第四數正。除法除第四數。四乘之。五除之。得一〇三二四〇九四四二〇八三爲第五數正。如是遞求得五九七三一七三三七四一爲第六數正。三五五四六一六三一三爲第七數正。二一五九四一〇四六爲第八數正。一三三二六五三〇爲第九數正。八三二七一〇爲第十數正。五二五五七爲第十一數正。三三四五爲第十二數正。二一四爲第十三數正。一四爲第十四數正。一爲第十五數正。乃幷諸正數得二三〇二五八五〇九二九九四〇四五七七爲首率。單一爲中率。求得末率〇四三四二九四四八一九〇三二五一八一一。卽對數根也。

用數	一〇七四六〇七八二八三二一三一七四九七	
除法	一四四〇三四一九二一八八六八六五三九	
第一數	二二二一六九四六九〇二四九六三二六六	除法除之一乘二除得
二	七七一二三八六四〇一〇六七八三〇	同二三
三	三五六九七〇一六四九二五一二二	同三四
四	一八五八七七八二四九九八〇五	同四五
五	一〇三二四〇九四四二〇八三	同五六
六	五九七三一七三三七四一	同六七
七	三五五四六一六三一三	同七八
八	二一五九四一〇四六	同八九
九	一三三二六五三〇	同九十
十	八三二七一〇	同十十一
十一	五二五五七	同十一十二
十二	三三四五	同十二十三
十三	二一四	同十三十四
十四	一四	同十四十五
十五	一	
并得數首率	二三〇二五八五〇九二九九四〇四五七七	
中率	一	
末率	〇四三四二九四四八一九〇三二五一八一一	

按。此即以一〇爲本數第一率。依第一術求折小第一無量數率也。其第一數本爲單一。（凡求極多率者。初商恆爲單一。）以對數例以單一下之零數爲比例。而截去首位。故置第一數不用。而竟以第二數爲第一數也。其以三十二乘之者。緣用數係本數之折小第三十二率。當於求得數後。以三十二乘之。爲所求數。而以三十二乘第一數。其得數亦同也。所異者。求法既依第一術。則第二數應以一無量數加一、乘之。二無量數除之。而何以用一乘二除。不知求極多率者。無加一之差也。今試以九乘方言之。其率分爲十。其乘法十一與除法二十之比。較一與二之比。所差尚大。若兩位九乘方。（謂九十九乘方。）其率分爲百。而一百零一與二百之比。較一與二之比。所差較微。若三位九乘方。（謂九百九十九乘方。）其率分爲千。而一千零一與二千之比。較一與二之比。其差更微。由是推之。多位九乘方。則其差必極微。而可以不計矣。且非特不計已也。譬之割圓。有大弧弦。求析分小弧弦。每數乘法有分子畀之減差。析之愈小。減差愈微。若求弧綫。則有分母無分子。并此減差而無之。蓋稍有減差。則綫亦稍有觚稜。而非眞弧綫矣。求對數根亦然。必須開無窮無盡極多位九乘方。并此加差而無之。然後求至數百千位而無不合。若稍有加差。則滯於第幾率。而求至多位。反不合矣。即如開平方五十四次。而所求之對數根。不過十五六位。若欲增求一位。必須再開三四次。不能如前法之求幾位。即得幾位者。以其滯於一兆八千餘萬億率也。然則一乘二除。二乘三除。正開無窮無盡極多位九乘方之法。無以名之。姑名爲折小第一無量數率耳。

論用數

前言有本數求折小第一無量數率.可以徑求.此立法也.而法有所窮.必須先求三十二率.何也.蓋多率之開方初商表.其數極繁.惟初商單一.則任折小至多率.而初商實亦必仍爲單一.苟而求折小多率者.其首位必爲單一.故用第一第二兩術.其第一數必爲單一.而初商實猶可知.若用第三四術.則初商必爲二.而初商實即極繁而不可求矣.然即用第一二術.而其中又有窒礙.今試以一〇爲本數.依第一術求之.則以一〇爲除法.初商實一減一〇得九爲乘法.乘除法相差甚微.而位不降.位不降.即不能遞求.依第二術.則一除九乘.位不惟不降.而反升.尤不能遞求.是窒礙也.夫求折小多率者.其本數必須單一下有空位.空位後帶零數.則減餘數小而可求.今本數一〇.既非單一.又無零數.則必假一單一下有空位帶零數之數以求之.此用數之所由來也.而求用數.約有四法.以本數先求折小第幾率爲用數.其第一數以折小率若干乘之.然後遞求此一法也.以本數首位降爲單位.以自二至九自一一至一九諸數累除之爲用數.求得數後.以除法對數加之.視降幾位.再首位加幾.又一法也.以本數先求倍大第幾率.以首位降爲單位爲用數.求得數後.視降幾位.則首位加幾.然後以倍大率若干除之.又一法也.置本數.以自二至九累乘之.以首位降爲單位爲用數.求得數後.視降幾位.首位加幾.然後以乘法之對數減之.又一法也.然第一法取數不易.而有畸零.惟求對數根不得已而用之.第二法亦有畸零.第三法雖無畸零.而不可必得.蓋諸數之倍大率.不能輒得首位爲一而下有空位也.惟第四法.既無畸零.且可必得.故求用數.可以倍大率求者.則用倍大率.其不可用倍大率者.則用借數累乘法爲便也.

假如以倍大率.求二之用數.
法以二自乘九次得一千零二十四.爲二之倍大第十率.降三位得一〇二四.爲二之用數.
假如以累乘法.求七之用數.
法以七用二乘之得十四.又以八乘之.得一百一十二.又以九乘之.得一千零八.降三位.得一〇〇八.爲七之用數.
假如兼用倍大率及累乘法.求三之用數.
法以三自乘再乘.得二十七.爲三之倍大第三率.以四乘之.得一百零八.降二位.得一〇八.爲三之用數.

論借數

借數者.自二至九共八數.借爲累乘之數也.凡諸數擇八數內之數乘之.皆可得首位爲一、而下有空位.故借數不必廣求.卽八數而已足.但由用數求得之之對數.必以乘法之對數減之.則必先求借數之對數.而借數雖有八數.實止三數.何也.二五四八本通爲一數.三六九亦通爲一數.惟七則自爲一數.故有三數之對數.而八數之對數已備.有八數之對數.而諸數之用數亦無不備矣.
假如有對數根.求二與四與五與八之對數.
法依前求得二之用數一〇二四.減去單一.得〇〇二四.爲遞次乘法.乃以乘法乘對數根.得〇〇一〇四二三〇六七五六五六七八〇四三.凡乘法在單位下.則乘得數小於原數.爲第一數.正.乘法乘第一數.一乘之.二除

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com