李世智　编著

电磁辐射与散射问题的矩量法

电子工业出版社

电磁辐射与散射问题的矩量法

李 世 智 编著

電 子 工 業 出 版 社

内 容 提 要

本书系统而深入地讨论了电磁辐射与散射问题的矩量法。全书分十章由浅入深地介绍了矩量法原理、线辐射体散射体、天线阵、弯曲导线的辐射与散射、导电板和柱体的散射及微带天线、小孔耦合与缝隙辐射、波导相控阵、导线网格模型、混合技术及计算举例等内容。

本书是一本为研究与应用矩量法，用之解决电磁辐射与散射问题的入门书，可作天线、无线电物理专业的研究生和高年级大学生的教材，也可供有关专业的科研人员、工程技术人员参考。

电磁辐射与散射问题的矩量法

李 世 智 编 著

责任编辑 梁祥丰

电子工业出版社出版（北京市万寿路）

长春新华印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

开本：850×1168 1/32 印张：8.75 字数：235千字

1985年3月第1版 1985年3月第1次印刷

印数：8500 册 定价：2.40元

统一书号：15290 · 60

序　言

用解析法求解电磁场辐射与散射的边值问题，有时可以得到精确的函数表达式，并能根据参量的变化，推断出解答的变化趋势。但是这种方法所能解决的问题不多，满足不了不断增长的工程方面的需要。于是人们就致力于研究求解复杂边值问题的近似方法和数值方法。麦克斯韦早在 1897 年就曾尝试用积分方程的数值解来计算矩形金属板间的电容量。在计算机出现以前，应用数值法求解更复杂的边值问题并非易事。以简单的线天线为例，人们求解直导线上的电流分布时，曾采用了变分法、微扰法、渐近法等。然而，要用这类方法来处理弯曲导线问题已更难，更不用说求解飞机天线等复杂问题了。随着高速度大容量计算机的发展，数值方法的应用日益广泛，过去看来难解的问题，现在已能比较容易求得足够精确的数值解了。

矩量法是有效数值方法之一。我们知道，电磁场的许多边值问题，可以化为齐次或非齐次积分方程和偏微分方程求解。以积分方程为例：

$$Lf = g$$

式中，L 为积分算子，f 为未知量，g 为已知量。将 f 用基函数展开如下：

$$f = \sum_{n=1}^{N} a_n f_n$$

a_n为未知量 f 的展开系数（一般为复数）。f_n为第 n 项基函数。若选一个检验函数 w_m，分别与积分方程等号的两边求内积，便得矩阵方程如下：

$$\sum_{n=1}^{N} a_m \langle w_m, Lf_n\rangle = \langle g, w_m\rangle$$

求解上述矩阵方程，得到未知量展开系数a_n后，可求得f，问题即得到解决。这种方法，目前已得到了广泛的应用。但关于电磁辐射与散射的文章，多发表在各种技术刊物和专题报告中，而且仅仅阅读这些文献，对于初学者是不易系统地掌握这种方法的。为了推广矩量法的应用，使初学者能够较快地系统地掌握这一方法，看来写一本专门的书籍，还是必要的。

本书第一章介绍了矩量法原理。使读者从具体电磁场问题和数学方法两个方面，来理解矩量法的原理，为学习后面的内容打下基础。

第二章按照从易到难、循序渐进的原则，从最简单的直导线辐射与散射问题开始讲述，并介绍了三种积分方程。

第三章着重介绍了天线阵。其内容包括串联振子、并联振子、圆周阵、平面阵等。此外，对天线加载问题、有限导电率问题、导体被薄介质层包围的问题作了介绍，为解决地下、水下天线打下了基础。并以圆周阵为例介绍了最优化方法。最后，介绍了如何估计上机时对计算机容量的要求及如何节省机时。这一章应当是学习的重点。

第四章介绍了处理弯曲导线的边值问题的方法，从原则上讲，可用这一章的方法，来处理任意形状的线天线与散射体。

第五章以导电板与柱体散射为例，介绍了处理两维问题的方法。这一方法，可以推广来处理有限导电率的柱体散射，和任意极化入射时的柱体边值问题，并介绍了微带天线的矩量法解。

为了解决飞行器天线的设计、电磁闪电脉冲的屏蔽、及原子爆炸后电磁脉冲透入车辆、飞机、船舶、导弹内对电子设备的影响等问题，小孔耦合与缝隙辐射引起了人们的注意。第六章通过例子说明了处理这类问题的方法。

第七章介绍了由有限个单元组成的波导相控阵的矩量法解。并介绍了单元在扫描过程中的反射系数的算法。这是一种较准确的分析方法。

第八章讲述了用导线网格模型来处理电磁场三维边值问题的方法。例如可以分析电小尺寸的飞机上天线的辐射等。

第九章介绍了混合技术。即将矩量法与几何绕射理论、物理光学方法结合起来，因此，可以扩展矩量法的应用。这是一个较灵活的处理问题的方法。

第十章以线天线为例，介绍了编写计算机源程序的过程和方法，以及应注意的事项。读者可应用提供的程序上机，学会矩量法的初步应用。

每章后面提供了少量习题，目的是为了巩固已学的知识。此外，列出了参考文献，以便查阅。

在编写过程中，天线教材编委会的谢处方教授、汪茂光、周朝栋、林宗琦、张钧、徐坤生副教授等提出了许多宝贵的意见。全书由张钧副教授审阅，并提出修改意见，作者在此深表谢意。

本书的出版得到了北京工业学院电子工程系张德齐、楼仁海教授和高本庆同志的支持。在完稿过程中，苗德山同志绘制了全部草图，并担任了抄写的工作，在此一并致谢。

作　者

一九八四・四

目　　录

第一章　预备知识

§1-1　引　　言

在进行自然科学与工程问题的研究过程中，需要求解微分方程、积分方程以及其他泛函方程的数学问题。对于边界不复杂的问题可用解析法得到精确解。但在实际工作中却常常会遇到较复杂的边值问题，用解析法不能求得解答。所以对于求解数学物理问题的近似方法，工程师们是很感兴趣的。六十年代以来，由于电子计算机和近代技术物理的发展更加促进了数值方法的新发展。数值法可将微分方程化为差分方程，或将积分方程中的积分化为有限求和建立代数方程组，也可将微分方程或积分方程用矩量法求解。

要深入理解从微分方程或积分方程化为代数方程组的理论，有兴趣的读者可以参阅有关的专著[1][2]，本章§1-8提供了关于线性空间的一些基本知识，阅读这一部分内容有助于学习和应用矩量法。

在本章中将介绍矩量法原理、基函数与检验函数的选择、算子的近似、线性方程组求逆及其解的稳定性、数值解正确性的检查、抽象希尔伯特空间①、算子方程的表示方法②，作为学习本书的预备知识。

§1-2　矩量法原理

根据线性空间的理论，N个线性方程的联立方程组、微分方程、差分方程、积分方程都属于希尔伯特空间中的算子方程[2]，

---

①②　供参考用

这类算子方程可化为矩阵方程求解，由于在求解过程中，需要计算广义矩量，故称此种方法为矩量法[1]。

矩量法是将算子方程化为矩阵方程，然后求解该矩阵方程的方法。

现有算子方程如下：

$$L(f)=g$$

L为算子，正如前面所述，算子可以是微分方程、差分方程或积分方程。g是已知函数如激励源，f为未知函数如电流，假定算子方程的解存在且是唯一的，于是，有逆算子L^{-1}存在，则使$f=L^{-1}(g)$成立。L与L^{-1}互为逆算子。

算子L的定义域为算子作用于其上的函数f的集合。算子L的值域为算子在其定义域上运算而得的函数g的集合。

假定两个函数f_1和f_2以及两个任意常数a_1和a_2，若下面的关系存在

$$L(a_1f_1+a_2f_2)=a_1L(f_1)+a_2L(f_2)$$

则L称为线性算子。

在应用矩量法处理问题的过程中，需要求内积$\langle f,g\rangle$的运算。现定义内积如下：

在希尔伯特空间H中两个元素f和g的内积是一个标量（实数或复数），记为$\langle f,g\rangle$，内积的运算满足下面的关系：

（1）$\langle f,g\rangle=\langle g,f\rangle$

（2）$\langle a_1f+a_2g,h\rangle=a_1\langle f,h\rangle+a_2\langle g,h\rangle$

（3）$\langle f,f^*\rangle>0$　若$f\neq 0$

$\langle f,f^*\rangle=0$　若$f=0$

式中a_1和a_2为标量，f^*为f的共轭量。

对于所有算子L定义域中的f，若有下面的关系成立

$$\langle Lf,g\rangle=\langle f,L^a g\rangle$$

则L^a称为L的伴随算子。若$L^a=L$则L叫做自伴算子。因而L^a的定义域就是L的定义域，而且有下面的关系式成立

$$\langle Lf, g\rangle = \langle f, Lg\rangle$$

在求解电磁场问题时，我们常常用到上述的关系。例如根据互易原理，假设在线性媒质中有两组频率相同的源，分别用$\boldsymbol{J}^a$，$\boldsymbol{M}^a$与$\boldsymbol{J}^b$，$\boldsymbol{M}^b$表示($\boldsymbol{J}$表示电流源，$\boldsymbol{M}$表示磁流源)，由a源产生的场用$\boldsymbol{E}^a$，$\boldsymbol{H}^a$表示，由b源产生的场用$\boldsymbol{E}^b$，$\cdot\ \boldsymbol{H}^b$表示，则有

$$\langle La, b\rangle = \iiint_v (\boldsymbol{E}^a \cdot d\boldsymbol{J}^b - \boldsymbol{H}^a \cdot d\boldsymbol{M}^b)\,dv$$

如果所有的源都包含在有限的体积内，根据互易原理可以知道

$$\langle La, b\rangle = \langle a, Lb\rangle$$

上式可以说是互易原理的数学描述，我们称之为反应守恒性质。这是自伴算子的一个很好的例子。

下面用线性空间和算子的概念来解释矩量法的含意。

假定有一算子方程为第一类弗雷德霍姆(Fredholm)积分方程，如下：

$$\int_a^b G(z, z')\boldsymbol{f}(z')\,dz = \boldsymbol{g}(z)$$

式中$G(z, z')$为核，$\boldsymbol{g}(z)$为已知函数，$\boldsymbol{f}(z')$为未知函数。

首先，用线性的独立的函数$\boldsymbol{f}_n(z)$来近似表示未知函数，其中$n = 1, 2, 3\cdots N$，即

$$\boldsymbol{f}(z') \approx \sum_{n=1}^{N} a_n \boldsymbol{f}_n(z')$$

a_n为待定系数（可为复数)，$\boldsymbol{f}_n(z')$为算子域内的基函数，N为正整数，N的大小根据要求的计算精度来确定。将$\boldsymbol{f}(z')$的近似表达式代入算子方程的左端，并将积分与求和的次序颠倒，则得

$$\sum_{n=1}^{N} a_n L[\boldsymbol{f}_n(z')] \approx \boldsymbol{g}(z)$$

由于$\boldsymbol{f}(z')$用近似式表示，因之算子方程左端的近似值与其右端精确值$\boldsymbol{g}(z)$之间存在下列关系

$$\varepsilon(z) = \sum_{n=1}^{N} a_n L[\boldsymbol{f}_n(z')] - \boldsymbol{g}(z)$$

$\varepsilon(z)$称之为残数。

上式中等号左右边的第一项与第二项可以用希尔伯特空间的矢量来表示，因此上式可表示为两个矢量的差为$\varepsilon(z)$，如图1-1所示。

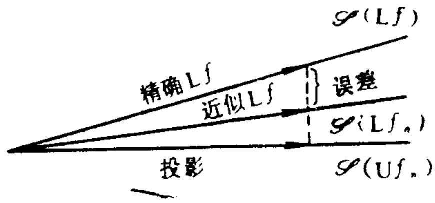

图 1-1 矩量法在函数空间的图形表示

图中$\mathscr{S}(Lf)$表示L的值域，$\mathscr{S}(Lf_n)$表示由Lf_n张成的空间，w_m为我们所选取的检验函数，而$\mathscr{S}(w_m)$表示由检验函数w_m张成的空间。

现将$\varepsilon(z)$的表示式的两端与检验函数w_m求内积，即两端的矢量在$\mathscr{S}(w_m)$空间上的投影可表示为

$$\langle w_m, \varepsilon\rangle = \sum_{n=1}^{N} a_n \langle w_m, L[f_n(z)]\rangle - \langle w_m, g(z)\rangle$$

若令残数矢量对检验函数空间$\mathscr{S}(w_m)$的投影为零，即

$$\langle w_m, \varepsilon\rangle = 0$$

这就意味着w_m与ε正交，或Lf的精确值在$\mathscr{S}(w_m)$上的投影等于其近似值在$\mathscr{S}(w_m)$上的投影。当近似值随着N的增加而趋于精确值，随之ε也趋于最小。这样，由于获得投影的方法使误差化为最小，所以矩量法是一种使误差化为最小的方法。由于误差正交于投影，所以它是二阶无限小，由变分法可得到与此相同的结论[3]。这样，可写出下列矩阵方程

$$\mathbf{I}\cdot\mathbf{Z} = \mathbf{V}$$

Z中之元素为：

$$Z_{mn} = \langle w_m, L[f_n(z)]\rangle$$

V中之元素为：

$$V_m = \langle \boldsymbol{w}_m, \boldsymbol{g} \rangle$$

中之元素为待求之未知量展开式中的系数a_n。前面已经讲过，如果我们选择基函数$\boldsymbol{f}_n$使

$$\boldsymbol{f}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \boldsymbol{f}_n(z)$$

成立，则问题解答应当是收敛的，上述的解题过程称之为矩量法。当$\boldsymbol{w}_m = \boldsymbol{f}_m$时，则称之为伽略金(Galer. kin)法。虽然，检验函数与基函数的选择可以各种各样，但从解的稳定性和收敛快慢的观点来看，应使基函数尽可能的接近真解。

现在我们举出求解积分方程的例子，来进一步说明这种方法的基本原理[4]。我们知道对于许多电磁场问题是可以化为积分方程问题求解的[5]。

假如有一金属导体其表面电流密度为$\boldsymbol{J}$，由边界条件知道，在导体表面切向电场为零，即

$$\boldsymbol{E}_t^s + \boldsymbol{E}_t^i = 0 \tag{1-1}$$

上式中$\boldsymbol{E}_t^s$为由导体表面的电流产生的散射场的切向分量，$\boldsymbol{E}_t^i$为由导体上或导体外源的入射场在导体表面的切向分量。略去下标后式(1-1)可写成

$$-\boldsymbol{E}^s = \boldsymbol{E}^i \tag{1-2}$$

定义算子如下：

$$\mathrm{L}_{op}(\boldsymbol{J}) = -\boldsymbol{E}^s \tag{1-3}$$

将(1-2)式代入(1-3)式得

$$\mathrm{L}_{op}(\boldsymbol{J}) = \boldsymbol{E}^i \tag{1-4}$$

算子L_{op}由所研究的问题来确定，$\boldsymbol{E}^i$为已知的激励函数或源产生的入射场，$\boldsymbol{J}$为待求的函数，现令算子L_{op}为一积分算子，对于给定的问题，只有一个$\boldsymbol{J}$使下式成立

$$\boldsymbol{J} = \mathrm{L}_{op}^{-1}(\boldsymbol{E}^i) \tag{1-5}$$

在求解(1-4)式过程中，需要计算广义矩量（内积）$\langle \boldsymbol{J}, \boldsymbol{E} \rangle$，$\langle \boldsymbol{J}, \boldsymbol{E} \rangle$为沿导体表面求$\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}$的积分。

$$\langle \boldsymbol{J}, \boldsymbol{E}\rangle = \iint_s \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E} ds \tag{1-6}$$

根据线性空间的理论，它们具有下列性质

$$\langle \boldsymbol{J},\ \boldsymbol{E}\rangle = \langle \boldsymbol{E}, \boldsymbol{J}\rangle \tag{1-7}$$

$$\langle a_1\boldsymbol{J} + a_2\boldsymbol{J}, \boldsymbol{E}\rangle = a_1\langle \boldsymbol{J}, \boldsymbol{E}\rangle + a_2\langle \boldsymbol{J}, \boldsymbol{E}\rangle \tag{1-8}$$

$$\langle \boldsymbol{J}^*, \boldsymbol{J}\rangle > 0 \qquad \text{当}\boldsymbol{J} \neq 0 \tag{1-9}$$

$$\langle \boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{J}\rangle = 0$$

$a_1 a_2$为标量，*表示复共轭量，一般矩阵法求解过程分为四步如下：

(1) 将未知量展成由基函数构成的级数，即将$\boldsymbol{J}$在算子域中展成由基函数$\boldsymbol{J}_n$组成的级数。

(2) 选取与基函数内积的检验函数。

(3) 由内积构成矩阵方程。

(4) 解矩阵方程，求得未知量。

对于我们所研究的问题，当未知电流求得后，诸如辐射体的方向图、阻抗及散射体的有效散射面积等参量都可求得。

下面将较详细的论述以上的四步解题过程。

第一步首先将式（1-5）中的$\boldsymbol{J}$展开为基函数的级数，基函数的各项为$\boldsymbol{J}_1$，$\boldsymbol{J}_2, \boldsymbol{J}_3 \cdots \boldsymbol{J}_N$，因而$\boldsymbol{J}$可近似表示如下：

$$\boldsymbol{J} \approx \sum_{n=1}^{N} I_n \boldsymbol{J}_n \tag{1-10}$$

上式中I_n为待求的系数，一般为复数。当求得I_n后，便可知道总电流的幅度和相位。现将式(1-10)代入式(1-4)中去，得

$$\mathrm{L}_{op}\left(\sum_{n=1}^{N} I_n \boldsymbol{J}_n\right) = \boldsymbol{E}^i \tag{1-11}$$

由于算子的线性关系，可知

$$\sum_{n=1}^{N} I_n \mathrm{L}_{op}(\boldsymbol{J}_n) = \boldsymbol{E}^i \tag{1-12}$$

第二步定义一组检验函数w_1，$w_2, w_3 \cdots$且这些检验函数在算子L_{op}域内，对(1-11)求内积如下：

$$\sum_{n=1}^{N} I_n \langle \boldsymbol{w}_m, \mathrm{L}_{op}(\boldsymbol{J}_n) \rangle = \langle \boldsymbol{w}_m, \boldsymbol{E}^i \rangle \tag{1-13}$$

若令$\boldsymbol{w}_m = \boldsymbol{J}_m$，则这种方法称为伽略金法。这样（1-13）变为下式

$$\sum_{n=1}^{N} I_n \langle \boldsymbol{J}_m, \mathrm{L}_{op}(\boldsymbol{J}_n) \rangle = \langle \boldsymbol{J}_m, \boldsymbol{E}^i \rangle \tag{1-14}$$

第三步构成下列矩阵方程

$$\begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{J}_1, \mathrm{L}_{op}(\boldsymbol{J}_1) \rangle & \langle \boldsymbol{J}_1, \mathrm{L}_{op}(\boldsymbol{J}_2) \rangle \cdots & I_1 & & \langle \boldsymbol{J}_1, \boldsymbol{E}^i \rangle \\ \langle \boldsymbol{J}_2, \mathrm{L}_{op}(\boldsymbol{J}_1) \rangle & \langle \boldsymbol{J}_2, \mathrm{L}_{op}(\boldsymbol{J}_2) \rangle \cdots & I_2 & = & \langle \boldsymbol{J}_2, \boldsymbol{E}^i \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & I_N & & \langle \boldsymbol{J}_m, \boldsymbol{E}^i \rangle \end{pmatrix} \tag{1-15}$$

式(1-15)也可写成下面的式子

$$\mathbf{Z}\mathbf{I} = \mathbf{V} \tag{1-16}$$

(1-16)式中 Z 的元素称为广义阻抗，I 的元素称为广义电流，V 的元素称为广义电压，对于不同的问题，它们可以具有不同的含义。由(1-16)式，可得下式

$$[\mathbf{I}] = [\mathbf{Z}]^{-1} \cdot [\mathbf{V}] \tag{1-17}$$

在求解具体问题中，可以利用Z的对称性质，节省计算时间。

§1-3 基函数与检验函数的选择

在求解算子方程中，选择基函数与检验函数是很重要的，从理论上讲有许多组函数可供选择，而实际上，只有少数的函数对给定的问题是适当的。由式（1-16）知 Z 中之元素包含了两重积分，首先是$\mathrm{L}_{op}(\boldsymbol{J}_n)$，然后是$\langle \boldsymbol{J}, L(\boldsymbol{J}_n) \rangle$，这类积分一般很难用解析法来完成，因之，计算 Z 中的所有元素需要大量的计算时间，在解题时需要审慎的选择基函数f_n与检验函数$\boldsymbol{w}_m$以达到既准确又经济的目的。选择基函数时，应尽量应用有关未知函数的先验知识，使所选的基函数尽可能接近未知量的真解，且满足边界条件，这

样计算过程中收敛较快，使广义阻抗矩阵为良态的情况。

基函数一般分为两大类，一类为全域基，另一类为子域基，现举例说明如下：

一、全域基

基函数在算子L_{op}域内不为零(边界条件要求为零时除外)，如：

傅立叶级数

$$I(z)=I_1\cos(\pi z/2)+I_2\cos(3\pi z/2)+I_3\cos(5\pi z/2)+\cdots \tag{1-18}$$

幂级数

$$I(z)=I_1+I_2z^2+I_3z^4+\cdots \tag{1-19}$$

勒让德函数

$$I(z)=I_1Po(z)+I_2P_2(z)+I_3P_4(z)+\cdots \tag{1-20}$$

车比雪夫函数

$$I(z)=I_1To(z)+I_2T_2(z)+I_3T_4(z)+\cdots \tag{1-21}$$

二、子域基

基函数在算子L域内存在，但在比域内某些部分为零，如：

分段单位函数（脉冲函数）

$$J(z)=\begin{cases} I_j & z\text{在}\Delta z_j\text{内} \\ 0 & z\text{在}\Delta z_j\text{外} \end{cases} \tag{1-22}$$

三角波函数

$$J(z)=\begin{cases} \dfrac{I_j(z_{j+1}-z)+I_{j+1}(z-z_j)}{\Delta z_j} & z\text{在}\Delta z_j\text{内} \\ 0 & z\text{在}\Delta z_j\text{外} \end{cases} \tag{1-23}$$

分段正弦函数