中央人民政府高等教育部推薦

高等學校教材試用本

實變函數論

上册

И. П. НАТАНСОН 著

徐瑞雲 譯

商務印書館

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本

實變函數論

下册

И. П. 那湯松著
徐瑞雲譯
陳建功校訂

商務印書館

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的那湯松(И. П. Натансон)著"實變函數論"(Теория функций вещественной переменной)1950年版譯出的。原書經蘇聯高等教育部審定爲高等學校教學參考書。

全書共十七章，中譯本分上下兩册出版。

實 變 函 數 論

上 册

徐 瑞 雲 譯

商 務 印 書 館 出 版

上海河南中路二一一號

中國圖書發行公司 發 行

商務印書館北京廠 印 刷

(53211.1A)

1953年8月初版 版面字數242,000

印數1—2,500 定價¥17,000

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的那湯松（И. П. Натансон）著"實變函數論"（Теория функций вещественной переменной）1950年版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲高等學校教學參考書。

全書共十七章，中譯本分上下兩册出版。

實變函數論

下册

徐瑞雲譯

商務印書館出版
上海河南中路二一一號

中國圖書發行公司 總經售

商務印書館北京廠 印刷
（53211·1B）

1953年11月初版 版面字數227,000
印數1—4,500 定價¥15,000

序　言

本書是適用於我國大學現行教學大綱的一本教科書。鑒於函數理論對於培養數學家日趨重要，我在本書中(用小型鉛字排印)放入了一系列超出大綱範圍的問題。但爲了不使本書篇幅過大起見，我還不得不放棄了很多重要的材料：例如微分的理論，更一般的積分理論，若干接觸到複變函數論的問題等等。我準備另寫一些專門的書來討論這些問題。

在大學中，實變函數論是在三年級開始講授的。所以我假定讀者對解析學的基本概念已能靈活掌握。凡在任何一本詳盡的微積分書中講到的一些概念，例如無理數、極限理論、連續函數的最重要的性質，微分、積分、級數等都假定已爲讀者所熟知。

書中大部分的章後都附有習題。這些習題一般說來是相當難的，有時需要經過很大的努力才能解決。但是對於要想切實地通曉這門知識的讀者，我仍然建議他們務必盡最大的努力至少解決其中一部分的問題。

本書是我以前所寫的"實變函數論的基礎"所改編的，該書於 1941 年在列寧格勒大學出版，因本數不多，不久卽行銷完。我早有意於再版，並且這個願望已經部分地實現了，這就是"拉强西卡學派"出版部曾用烏克蘭譯文刊印了該書。譯者是基也輔斯克大學的副教授 С. И. 助賀維次基。他添加了各種細緻的補充，並且還加添了原書中所沒有的三章，講述高度空間的點集和多變函數論等問題。在本版中，除了包含上述的補充而外，還添加了很多新的材料：汎函數解析初步（按照最近頒

佈的綜合大學教學大綱所要求的範圍)、半連續函數理論、測度問題的不可解性，以及有關在積分號下取極限的詳細討論等等。

在本書中，讀者可以找到我國學者所發明的許多結果(Д. Ф. 葉果洛夫和 Н. Н. 盧洵關於可測函數的基本定理，С. Н. 褒恩斯坦的多項式，Н. Н. 盧洵和 А. Н. 柯爾莫廓洛夫關於三角級數的定理，П. И. 羅曼諾夫斯基和 Д. К. 法捷耶夫關於奇異積分的定理等等)。但是這些結果遠不能代表俄羅斯數學家在實變函數論發展中的全部貢獻，因爲本書所說的多是函數論中較初等的部分，而蘇聯學者對這門學問的研究已經達到很高深的地步。爲了給讀者一個較完整的關於實際事情的輪廓起見，我在本書末章簡括地講了些俄國和蘇聯數學家在實變函數論方面的貢獻。

Е. Я. 列滅士教授曾經對於上述的烏克蘭譯本加以評論並且提出了一系列寶貴的意見，我在從事於新版的修正時也採納了這些意見。此外，我很感激 Н. К. 巴里教授、Д. К. 法捷耶夫教授，尤其是 Г. М. 菲赫秦戈里文教授所提出的許多意見和批評。對於一切被提到的各位我都致以衷心的謝意。

И. 那湯松

1949, 3, 12, 於列寧格勒

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本的說明

充分學習蘇聯的先進經驗，根據國家建設需要，設置專業，培養幹部，是全國高等學校院系調整後的一項重大工作。在我國高等學校裏，按照所設置的專業試用蘇聯教材，而不再使用以英美資產階級教育內容爲基礎的教材，是進一步改革教學內容和提高教學質量的正確方向。

一九五二年九月二十四日人民日報社論已經指出：'蘇聯各種專業的教學計劃和教材，基本上對我們是適用的。它是眞正科學的和密切聯系實際的。至於與中國實際結合的問題，則可在今後教學實踐中逐漸求得解決。'我們現在就是本着這種認識來組織人力，依照需要的緩急，有計劃地大量翻譯蘇聯高等學校的各科教材，並將繼續向全國推薦，作爲現階段我國高等學校教材的試用本。

我們希望：使用這一試用本及今後由我們繼續推薦的每一種試用本的教師和同學們，特別是各有關教研組的同志們，在教學過程中，對譯本的內容和譯文廣泛地認眞地提出修正意見，作爲該書再版時的參考。我們並希望各有關教研組在此基礎上逐步加以改進，使能結合中國實際，最後能編出完全適合我國需要的新教材來。

中央人民政府高等教育部

上 册 目 錄

下 册 目 錄

實變函數論

第一章 無限集

§1 集的運算

“集論”是實變數函數論的基礎。它的歷史並不悠久：有關集論的最初的重要文獻是康脫在十九世紀末葉才發表的，可是，現在集論已是數學中一門範圍很廣的學科了。在這本書裏，集論只有輔助的意義，所以我們只討論這門學科的一些基礎知識。讀者對於這方面的理論若需要深入研究，可參閱阿力山大洛夫及豪司道夫所著的書。[1)]

集是一種不可以精確定義的數學基本概念，所以我們只能給予一種描寫。凡是具有某種特殊性質的東西的全體即稱之爲集。例如自然數的全體爲一集；直線上點的全體爲一集；以實數爲係數的多項式的全體爲一集；諸如此類。

任何東西，對於某一集而言，或是屬於該集，或是不屬於該集。二者必居其一，但不可得兼。

若 A 爲某集，x 爲一個屬於 A 的東西，則稱 x 爲 A 的元素，記作：

$$x \in A.$$

若 x 不屬於 A，則寫爲

$$x \overline{\in} A.$$

1) 阿力山大洛夫，集與函數論的汎論，(1948)，(俄文)。豪司道夫，集論，(1937)，(德文)。

例如，R 爲有理數全體所成之集，則

$$\frac{3}{4}\in R,\ \sqrt{2}\,\overline{\in}\,R.$$

一個集的自身決不能作它的元素：*)

$$A\,\overline{\in}\,A.$$

不含任何元素的集，爲便利起見，稱之爲"空集"。我們用 0 表示它。例如方程式

$$x^2+1=0$$

的實根的全體就是空集。

除空集外，我們在研究中必然會遇到的還有"單元素集"。凡僅含一個元素之集稱爲單元素集。例如方程式

$$2x-6=0$$

的根的全體是一個單元素集，它是由單獨的一個元素，就是數 3，所組成的。

若集 A 的一般元素是 x，則有時寫爲：

$$A=\{x\}.$$

有時集的元素可以全部寫出的，那末可將集的元素全部寫出後外加一個花括弧。例如

$$A=\{a,b,c,d\}.$$

定義 1 兩集 A 與 B，若 A 所有的元素都是 B 的元素，則稱 A 爲 B 的子集，寫爲：

$$A\subset B \text{ 或 } B\supset A.$$

B 稱爲 A 的包括集。

例如 N 爲自然數全體的集，R 爲有理數全體的集，則

$$N\subset R.$$

*) 這個陳述，此地實際是一個公理。—— 譯者註

顯然，集的自身是它的子集：

$$A \subset A.$$

空集是任何集 A 的子集。因爲由定義 1，所謂 $A \subset B$ 乃表示凡元素不屬於 B 的也不屬於 A。

定義 2　兩集 A 與 B，若 $A \subset B$，$B \subset A$，稱 A 與 B 相等，寫爲：

$$A = B.$$

例如　$A = \{2, 3\}$，B 爲方程式

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

的根所成之集，則 $A = B$.

定義 3　設 A 與 B 爲二集，又集 S 包含 A 與 B 中所有元素但不含其他元素，稱 S 爲 A 與 B 的和集，寫爲：

$$S = A + B.$$

同樣可以定義 n 個集 $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$ 的和集，可以定義一系列集 $A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots$ 的和集；更一般的，如果 ξ 表示具有某種性質的一般的記號，那末也可以定義所有 A_ξ 的和集。上面所說的諸和集寫作：

$$S = A_1 + A_2 + \cdots\cdots + A_n, \text{ 或 } S = \sum_{k=1}^{n} A_k;$$

$$S = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots\cdots, \text{ 或 } S = \sum_{k=1}^{\infty} A_k;$$

$$S = \sum_{\xi} A_\xi.$$

例如 S 爲所有正數的集，則

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1, k],$$

此處 $(a, b]$ 表示適合 $a < x \leqslant b$ 的一切 x 所成的集。

若 $A \subset B$, 則顯然的

$$A+B=B,$$

特別是

$$A+A=A.$$

定義 4 設 A 與 B 爲二集，又集 P 包含 A 與 B 的所有共同元素但不含任何其他元素，稱 P 爲 A 與 B 的通集，寫爲:

$$P=AB.$$

例如 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{3, 4, 5, 6\}$, 則

$$AB=\{3, 4\}.$$

同樣可以定義 n 個集 $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$ 的通集，也可定義一系列集 $A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots$ 的通集；更一般的，若用 ξ 表示滿足某種性質的記號，那末也可以定義所有 A_ξ 的通集。上面所說諸集的寫法是:

$$P=A_1A_2\cdots\cdots A_n, \text{或 } P=\prod_{k=1}^{n} A_k,$$

$$P=A_1A_2A_3\cdots\cdots, \text{或 } P=\prod_{k=1}^{\infty} A_k,$$

$$P=\prod_{\xi} A_\xi.$$

例如

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)=\{0\} \text{（單元素集）}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(0, \frac{1}{k}\right)=0 \text{（空集）}$$

若 $A \subset B$, 則顯然的

$$AB=A,$$

特別是

$$AA=A.$$

若二集 A 與 B 沒有共同元素，則寫爲

$$AB=0;$$

此時也稱 A 與 B 是"不相交的"。

定理 1　設 A 爲一集，$\{E_\xi\}$ 爲以 E_ξ 做元素的集，則

$$A\sum_\xi E_\xi=\sum_\xi AE_\xi.$$

證明　假設

$$S=A\sum_\xi E_\xi,\ T=\sum_\xi AE_\xi. \tag{1}$$

設 $x\in S$，則 $x\in A$ 並且 $x\in\sum_\xi E_\xi$。後者表示有 ξ_0 適合於 $x\in E_{\xi_0}$，總之 $x\in AE_{\xi_0}$，所以 $x\in T$。從而證明了

$$S\subset T.$$

反之，若設 $x\in T$，則必有 ξ_0 適合於 $x\in AE_{\xi_0}$。換言之：$x\in A$ 又 $x\in E_{\xi_0}$。由 $x\in E_{\xi_0}$ 知 $x\in\sum_\xi E_\xi$。又因 $x\in A$，所以

$$T\subset S.$$

由 $T\subset S$ 和 $S\subset T$，得着 $S=T$.

系　$A(B+C)=AB+AC.$

定義 5　設 A 與 B 爲二集，又集 R 包含屬於 A 而不屬於 B 的一切元素且除此而外無其他元素，稱 R 爲 A 與 B 的差集，寫作:

$$R=A-B.$$

例如　$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，則

$$A-B=\{1,2\}.$$

定理 2　設 A,B,C 爲三集，則

$$A(B-C)=AB-AC.$$

其證明可由讀者自行補足。

集的運算與普通算術的運算頗有相似之處，但是並不完全相同，如上面所說的關係式 $A+A=A$ 及 $AA=A$, 在算術上是不成立的。下面我們還要舉一個不相似的例子，

定理 3 關係式

$$(A-B)+B=A \tag{2}$$

當 $B\subset A$ 且僅當 $B\subset A$ 時成立。

證明 設(2)爲眞，則每一被加集均爲其和集的子集，所以 $B\subset A$。又設 $B\subset A$, 則 $(A-B)+B\subset A$。但是另一方面，關係式 $(A-B)+B\supset A$ 的成立是無條件的，所以 $B\subset A$ 含有(2).

§ 2 一對一的對應

設 A 與 B 爲兩個有限集，自然的會發生下面的問題：它們所含的元素的個數是否相同。我們可以數一下每一集所含的元素的個數是多少，從所得的數字就可以解決這個問題。但是不數也可以解決問題。例如

$$A=\{a, b, c, d, e\},$$

$$B=\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}.$$

如果我們細察下面的表：

$$\begin{array}{l|c|c|c|c|c|} A: & a & b & c & d & e \\ \hline B: & \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \end{array},$$

我們雖然不數，也曉得 A 與 B 有相同的元素的個數。

上面所說的比較法有這樣一個特性：對於一集的每一個元素，另一個集中有一個元素並且只有一個元素和它對應。這個比較法也可以用之於無限集。例如，N 爲自然數全體的集，而 M 爲所有 $\frac{1}{n}$ 的全體。用