數學譯叢

混合型微分方程

A. B. 比察捷 著

科學出版社

數 學 譯 叢

混合型微分方程

A. B. 比察捷 著
孫 和 生 譯
吳 新 謀 校

科 學 出 版 社
1955年5月

А. В. Бицадзе

К ПРОБЛЕМЕ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

Труды математического института имени В. А. Стеклова том 41

内 容 提 要

本書係根據蘇聯科學院出版社（Издательство академии наук СССР）出版的斯捷克洛夫數學研究所彙刊（Труды математического института имени В.А.Стеклова）第四十一卷比察捷（А.В.Бицадзе）著"混合型微分方程"（К проблеме уравнений смешанного типа）譯出.

混合型方程式的研究與近代超聲速空氣動力學的研究有着密切關係，在微分方程方面是一個新開闢的極爲寬廣的領域，它已成爲目前蘇聯在微分方程研究方面發展的生長點．本書是作者在這方面工作的初步總結，它可作爲我國數學界研究混合型方程的入門及有着指導作用的文獻．

混 合 型 微 分 方 程

翻譯者	孫 和 生
出版者	科 學 出 版 社 北京東四區朝陽門大街117號
印刷者	北 京 新 華 印 刷 廠
總經售	新 華 書 店

書號：0203　　1955年5月第一版
譯）126　　1955年5月第一次印刷
（京）0001—3,780　　開本：787×1092 1/25
字數：46,000　　印張：3 3/25

定價：(8)五角一分

作者爲中譯本而作的序言

在連續介質力學中，現在常常遇見混合（橢圓-雙曲）型方程．這種方程的邊界問題的適定性與數學研究，肯定地是數學物理中具有現實意義的問題之一．對這個問題的意義更在於若干混合問題（例如問題 M）導致橢圓方程的完全新型的邊界問題．

本工作是由拉夫倫捷夫(M. A. Лаврентьев)院士提出的最簡單形式的、混合型方程的一系列混合問題的研究底嘗試．

我很高興，我的微薄的工作能和使用偉大的中國人民的語言的廣大的讀者——數學家們見面．

安·比察捷(A. Бицадзе)

1954 年 9 月 10 日於莫斯科

目　錄

緒　言

很多重要的氣體動力學問題都可歸結爲二階混合型方程的邊值問題；它的解的存在域是由二部分組成的，在其一部分上方程是屬於橢圓型，而在另一部分上則屬於雙曲型。

然而到現在關於確定邊界條件使混合型方程的解存在且唯一的問題還沒有滿意地解決。

在這方面 F.脫立谷米（F. Tricomi）得到了第一個基本結果〔1〕。他觀察方程

$$y\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

直綫 $y=0$ 稱爲它的蛻型綫，而且在 $y>0$ 半平面上它是橢圓型，在 $y<0$ 半平面上是雙曲型。

假設 D 是由下面兩部分所圍成的區域，一部分是以 $A(0,0)$，$B(1,0)$ 爲端點而整個在上半平面中的約當（Jordan）光滑曲綫 σ，另一部分是方程(1)的特徵綫 L_1: $x-\frac{2}{3}(-y)^{3/2}=0$ 及 L_2: $x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}=1$。

脫立谷米研究下面的問題：要求方程(1)在域 D 上滿足邊界條件

$$U=\varphi \quad 在\ \sigma\ 上,$$
$$U=\psi(x) \quad 在\ L_1\ 上$$

的正則解，其中 φ 和 ψ 都是已知函數（脫立谷米問題）。

註：本書所有出現的方括號〔〕係指書末文獻號數，圓括號（）係指文中式子號數。

脫立谷米所指的方程(1)在域D上的正則解$U(x,y)$，即爲在閉域$\overline{D}$上是連續的，且在此閉域上除A，B點外到處有連續的一階微商，而在A，B點附近$\frac{\partial U}{\partial y}$可以是小於$^5/_6$級的無窮大.

著作〔1〕對脫立谷米問題作了詳細的研究. 可惜在這篇著作中對於問題解的唯一性定理的證明是不正確的.

在著作〔2〕中脫立谷米對唯一性定理給了另外一個證明，但顯然從著作本身可看出作者還沒有注意到在〔1〕中的不正確性.

著作〔1〕中在證明脫立谷米問題解的存在定理時主要的基礎是一個先決的存在定理:《要方程(1)存在一個(且僅有一個)正則解，並在由Ox軸上的AB間隔與通過A，B點而整個在橢圓域中的任意曲綫σ所組成的邊界上取任何已給的連續值，只要: 1°曲綫σ的一部分是正規曲綫$x^2+\frac{4}{9}y^3=x$上兩個任意小的弧AA'及BB'而其餘部分則向外離開正規曲綫; 2°未知解在σ上所取的值是弧長s的已知函數，它具有一階微商，且在A，B點附近是連續而有限的.》(原著第96頁)

令$\tau(x)=U(x,0)$，$\nu(x)=\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}\Big|_{y=0}$，($U(x,y)$是未知解)脫立谷米建立了下面的關係式:

$$\tau(x)=\varphi_1(x)+\frac{3^{2/3}\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)}{4\pi^2}\int_0^x\frac{\nu(t)dt}{(t-x)^{1/3}},$$

其中$\varphi_1(x)$是以$\psi(x)$所表示的函數. 在此基礎上來解脫立谷米問題，最後就化爲從某一異積分方程求函數$\nu(x)$ $(0<x<1)$. 這異積分方程當σ爲正規曲綫時取下面的簡單形式

$$\nu(x)+\frac{1}{\sqrt{3}\pi}\int_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{2/3}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\,dt=f(x), \qquad (2)$$

其中 $f(x)$ 是以 φ 及 ψ 所表示的函數，而積分是依柯西(Cauchy)主值有意義的．脫立谷米用了十分複雜的計算獲得了積分方程(2)的反演公式．

同樣當 σ 的一部分是正規曲綫的兩個任意小弧 AA' 及 BB' 而其餘部分是向外離開正規曲綫時，脫立谷米利用積分方程(2)的反演公式成功地得到了定義函數 $\nu(x)$ 的第二類弗萊特霍姆(Fredholm)積分方程，它的可解性可由唯一性定理導出．

脫立谷米於另一著作[3]中，在證明了先決的存在定理的基礎上，成功地避免了加在曲綫 σ 上的特別限制．

繼脫立谷米的結果之後的發展是蓋萊爾希旦脫 (Gellerstedt)的工作[4, 5, 6]．蓋萊爾希旦脫觀察下面的混合型方程

$$y^{2m-1}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0\,(m\text{ 是自然數}). \tag{3}$$

同時當在雙曲域中特徵綫的兩部分上 (在蓋萊爾希旦脫的工作中主要地就是取了兩部分)已給了未知解的值，而在橢圓域中的正規曲綫

$$\left(\frac{2}{2m+1}\right)^2 y^{2m+1}+x^2=1$$

上已給了有界值的情況下，他研究了方程(3)及脫立谷米問題．

蓋萊爾希旦脫亦將求解上述情況下的問題化爲解異積分方程的問題，並且應用了著名的卡勒曼 (Carleman) 概念[7]將它解了出來．

脫立谷米的積分方程(2)是蓋萊爾希旦脫方程的特別情況．蓋萊爾希旦脫用了十分簡單的方法得到了它的積分方程的反演公式．但要知道脫立谷米的積分方程(2)的反演公式曾被 С.Г. 米赫林(С.Г.Михлин)[8]用了同樣的方法得到過，這或許是 С.Г. 米赫林沒有知道著作[6]的緣故．

從事於混合型方程研究的蘇聯數學家有 M. A. 拉符倫提夫（М.А.Лаврентьев）院士，Ф.И.弗朗格爾（Ф.И.Франкль）[17, 18]及К.И.巴秉柯（К.И.Бабенко）[19]．特別需要注意К.И.巴秉柯的研究．

M.A.拉符倫提夫院士首先注意到綫性二階混合型（橢圓-雙曲型）方程最簡單也是最典型的表示式是方程

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\operatorname{sgn} y\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0, \tag{4}$$

它的蛻型綫是軸 $y=0$.

本書是研究 M.A.拉符倫提夫的方程（4）的一系列混合型邊界問題．

在第一章中定出了下面混合問題的解，即當方程(4)的未知解的值在混合域 D 的橢圓部分的邊界 σ 上及方程（4）的一條特徵綫上爲已知時，要求方程（4）的滿足這些邊界條件的解（參看圖 1）．這個類似於脫立谷米問題的混合問題今後我們稱之爲問題 T．

當 σ 是滿足李雅普諾夫（Ляпунсв）條件的光滑曲綫，而未知解 U 在其上所取的已知值 φ 又是可微分的，則利用共形映照可將問題 T 化爲拉普拉司（Laplace）方程的狄立克雷（Dirichlet）問題[9]．

在第二章中提出並解決了三個推廣問題 T 的混合型問題．即 1）混合問題 T_1，當方程（4）的未知解的值在曲綫 σ 上及所定義的特徵綫的綫段上爲已知（參看圖 2）；2）混合問題 T_2，當未知解的值在雙聯混合域的橢圓部分邊界 σ_1，σ_2 上及方程(4)所定義的特徵綫上爲已知（參看圖 3）；3）混合問題 T_3，當在 σ 上未知解的法微商的值爲已知，而在特徵綫上已給解的值．

對問題T, T_1, T_2, T_3有十分重要的極值原理．這個原理在作者著作〔11〕中初次建立．此後對脫立谷米方程的同樣原理亦曾在著作〔10〕中出現．上述原理在第一章§2中有最簡單的敍述．

第三章是討論一般混合問題M，即當未知解的值在σ上及在特徵三角形ACB的內部所定義的曲綫L上為已知時求方程(4)的解(參看圖4)．

這一章的某些結果曾發表在沒有詳細證明的著作〔9, 11, 12〕中．

最後趁此機會對我的導師M.A.拉符倫提夫院士表示誠懇地感謝，他對這著作的完成給了很大的幫助．

第一章　問題T

在這一章中我們用三種不同方法來解脫立谷米型問題，所謂脫立谷米型問題就是在序中提到的對M.A.拉符倫捷夫方程

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\operatorname{sgn} y\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0 \tag{1.1}$$

而言的問題T.

下面我們就來定義這問題.

§1.定義問題T　設D是xy平面上的單聯域，它在上半平面$y>0$的邊界是以$A(0,0)$，$B(1,0)$爲端點的約當曲綫σ，它在下半平面$y<0$的邊界是方程(1.1)的特徵綫AC: $y=-x$及CB: $y=x-1$(圖1).

以D_1, D_2分別表示D在$y>0$及$y<0$中的部分. 因爲方程(1.1)在D_1上屬於橢圓型，而在D_2上屬於雙曲型，因此就分別稱它們爲混合域D的橢圓部分(或簡稱橢圓域)及雙曲部分(或簡稱雙曲域). 這兩域的共同邊界AB稱爲方程(1.1)的蜕型綫.

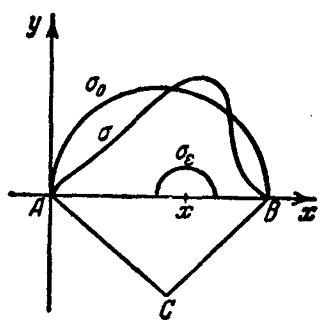

圖 1

問題T. 要定義函數$U(x,y)$具有下列性質: 1) $U(x,y)$是方程(1.1)在D上當$y\neq 0$時的解; 2)在閉域$\overline{D}$上連續; 3)偏微商$\frac{\partial U}{\partial x}$及$\frac{\partial U}{\partial y}$在$D$的內部連續，且在$A$, B點附近可以是低於一級的無窮大; 4)在曲綫σ上及在一條特徵綫上，例如在AC上，所

取的值爲已知:

$$U=\varphi \quad 在\ \sigma\ 上, \tag{1.2}$$

$$U=\psi(x) \quad 在\ AC\ 上. \tag{1.3}$$

$$\varphi(0)=\psi(0).$$

對於問題T有特殊的極值原理，它對解決這問題有着重要的作用.

§2.極值原理 若問題T的解在特徵綫AC或CB上取零值，則它在蜺型綫上的開間隔AB上不能有正的極大及負的極小.

下面就來證明這原理.

方程(1.1)在D_2的一般解是

$$U(x,y)=f(x+y)+f_1(x-y), \tag{1.4}$$

其中$f(t)$和$f_1(t)$是在$[0,1]$上連續的兩個任意函數，且在$(0,1)$上均具有二階微商.

因爲

$$U=0 \quad 在\ AC\ 上, \tag{1.3$_0$}$$

因此由(1.4)得$f_1(2x)+f(0)=0$, $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$或$f_1(t)=-f(0)$, $0\leqslant t\leqslant 1$. 將此代入(1.4)，我們就得在D_2中滿足條件(1.3$_0$)的方程(1.1)的解是

$$U(x,y)=f(x+y)-f(0). \tag{1.5}$$

特別當$y=0$時由(1.5)得

$$U(x,0)=f(x)-f(0), \quad 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{1.6}$$

方程(1.1)在D_1的解是調和函數. 設$V(x,y)$是在D_1與函數$U(x,y)$共軛的調和函數，且滿足

$$V(0,0)=0 \tag{1.7}$$

由於柯西－黎曼條件及$\frac{\partial U}{\partial x}$和$\frac{\partial U}{\partial y}$通過$AB$時的連續性，我們由(1.5)得

$$\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial V}{\partial x}=f'(x),$$

經積分後由(1.7)得

$$V(x,0)=-f(x)+f(0),\quad 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{1.8}$$

由(1.6)及(1.8)我們有

$$U(x,0)+V(x,0)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{1.9}$$

令$F(z)=U(x,y)+iV(x,y)$，$z=x+iy$，在D_1內是解析的．

由於(1.9)，函數$F(z)$可經AB解析拓展至D_1的對稱域D_1^*，且

$$F(z)=\begin{cases}U(x,y)+iV(x,y) & (y\geqslant 0),\\ -V(x,-y)-iU(x,-y) & (y\leqslant 0).\end{cases} \tag{1.10}$$

令D^*表由D_1，D_1^*及開間隔AB三者所組成的域的全部．

設K是以$(\xi,0)$爲心，ε爲半徑整個在D^*中的圓．令C_K及$\bar{C}_K$分別表K的上半圓周及下半圓周．

函數$F(z)$在圓K中的值是由它的實值部分在C_K上的值唯一定義的．事實上，$U(x,y)$是圓K中全純函數$F(z)$的實的部分，而$F(z)$是由下面的複變函數論問題（黎曼–希爾貝脫(Hilbert)問題[13]）* 的解所唯一定義，即：要求在圓K內是全純的而在閉圓$\bar{K}$上是連續的函數$F(z)$，它具有邊界條件：

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}F(z)&=U(x,y), & z\in C_K,\\ \operatorname{Im}F(z)&=-U(x,-y), & z\in \bar{C}_K.\end{aligned} \tag{1.11}$$

這問題唯一的解是

* 亦可參閱М.А.Лаврентьев и Б.В.Шабат, Методы теории функций комплексного переменного第三章，第三節——譯者註．

$$F(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{C_k}\frac{\sqrt{(z-\xi+\varepsilon)(\xi+\varepsilon-z)}}{\sqrt{(t-\xi+\varepsilon)(\xi+\varepsilon-t)}}\frac{U(t)dt}{t-z}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\overline{C}_k}\frac{\sqrt{(z-\xi+\varepsilon)(\xi+\varepsilon-z)}}{\sqrt{(t-\xi+\varepsilon)(\xi+\varepsilon-t)}}\frac{U(\bar{t})dt}{t-z}, \tag{1.12}$$

其中帶有根號的函數我們取它當 $|z|$ 甚大時 $\sqrt{(z-\xi+\varepsilon)(\xi+\varepsilon-z)}=iz+\cdots\cdots$ 的一支.

由(1.12)直接得到特殊的中值公式

$$U(\xi,0)=\mathrm{Re}F(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}}\,U(\vartheta)d\vartheta, \tag{1.13}$$

其中 $t-\xi=\varepsilon e^{i\vartheta}$, 且根號是取正的.

由公式 (1.13) 就導出函數 $U(x,y)$ 在開間隔 AB 上既無正的極大又無負的極小.

注意一 若邊界條件(1.3_0)代以

$$U(x,y)=0 \quad 在\ CB\ 上,$$

則(1.9)就將代以

$$U(x,0)-V(x,0)=0, \quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

在此情況下(1.13)就變爲

$$U(\xi,0)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\frac{\vartheta}{2}}\,U(\vartheta)d\vartheta. \tag{1.14}$$

由此也就導出在此情況下的極值原理仍爲正確.

注意二 極值原理也可由下面的事實導出, 即由於併合條件: $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{y=+0}=\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{y=-0}$; $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=+0}=\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=-0}$, 從(1.5)所得的

$$\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}=0 \tag{1.15}$$

在開間隔 AB 上亦成立.

事實上，若函數 $U(x,y)$ 在 $(\xi,0)$ 有非零的極值，則必有 $\frac{\partial U(\xi,0)}{\partial\xi}=0$. 由 (1.15) 我們得 $\frac{\partial U}{\partial y}(\xi,0)=0$. 但這不可能，因爲由調和函數的性質知：若調和函數 $U(x,y)$ 在直線邊界 AB 上的點取極值，則有 $\frac{\partial U}{\partial y}\neq 0$.(*)

§3. 解的唯一性　問題 T 的解是唯一的. 事實上，若問題 T 有兩個解 $U(x,y)$ 和 $U_1(x,y)$，則 $U(x,y)-U_1(x,y)$ 將是邊界條件爲零的齊次問題的解. 因此由極值原理有 $U(x,0)-U_1(x,0)=0$, $0\leqslant x\leqslant 1$. 從而在整個域 D 上就有 $U(x,y)-U_1(x,y)=0$. 故解爲唯一的.

§4. 證明解存在　在本節中我們假定 σ 滿足李雅普諾夫條件. 卽 σ 的切綫與 x 軸的交角 α 是弧長 s 的函數，且滿足歐爾寶(HÖlder)條件：$|\alpha(s+h)-\alpha(s)|\leqslant\lambda|h|^{\kappa}$, $\lambda>0$, $0\leqslant\kappa\leqslant 1$.

並假定問題 T 的未知解 $U(x,y)$ 的偏微商在閉域 $\overline{D}$ 除 A, B 點外到處連續.

不失一般性，可假定 $\varphi(A)=\varphi(B)=\psi(A)=0$.

若我們能找到問題 T 的解 $U_1(x,y)$ 及 $U_2(x,y)$，各滿足對應的邊界條件

$$U_1=\varphi \text{ 在 } \sigma \text{ 上}, U_1=0 \text{ 在 } AC \text{ 上} \tag{1.16}$$

及

$$U_2=0 \text{ 在 } \sigma \text{ 上}, U_2=\psi(x) \text{ 在 } AC \text{ 上}, \tag{1.17}$$

則未知解就取下面的形式：$U(x,y)=U_1(x,y)+U_2(x,y)$.

令 $F_1(z)=U_1(x,y)+iV_1(x,y)$ 表 D_1 上的全純函數，滿足條件

(*)可參閱 И.Г.Петровский, Лекций об уравнениях с частными производными 第二版，第229—234頁——譯者註.

$$F_1(0)=0.$$

由(1.16)的第二個條件，我們可仿 §2 中所做的那樣，使函數 $F_1(z)$ 經 AB 解析拓展至域 D_1^*，且

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}F_1(t)=\varphi(t);\quad t=\xi+i\eta\in\sigma,\\&\mathrm{Im}F_1(t)=-\varphi(\bar{t});\quad t\in\bar{\sigma},\end{aligned}\tag{1.18}$$

其中 $\bar{\sigma}$ 是 σ 關於實軸的對稱像.

這樣一來，函數 $F_1(z)$ 的尋求，就變爲求具有邊界條件(1.18)而在 D^* 內爲全純的、在閉域 $\overline{D}^*$ 上爲連續的函數 $F_1(z)$.

因爲 D^* 是關於實軸對稱的，且包含間隔 AB，因此我們可將它共形映照至圓 $\left|z-\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{1}{2}$，使 σ 與上半圓周 σ_0 對應，而 $\bar{\sigma}$ 則與下半圓周 $\bar{\sigma}_0$ 對應[14]. 這樣，我們一開始就可假定 σ 是半圓周 σ_0.

但當邊界是圓周時，正如在 §2中我們已知道，函數 $F_1(z)$ 可寫爲

$$F_1(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{\sigma_0}\frac{\sqrt{z(1-z)}}{\sqrt{t(1-t)}}\,\frac{\varphi(t)dt}{t-z}-\frac{1}{\pi}\int_{\bar{\sigma}_0}\frac{\sqrt{z(1-z)}}{\sqrt{t(1-t)}}\,\frac{\varphi(\bar{t})dt}{t-z}.\tag{1.19}$$

在上式右端第二個積分中經一變數代換後，我們得

$$F_1(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{\sigma_0}\sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t+z-2tz}\right)\varphi(t)\,dt.\tag{1.20}$$

由 $F_1(z)$ 的表示式，我們就立即可得函數 $U_1(x,y)$.

事實上，$F_1(z)$ 的實值部分給了我們在 D_1 上的未知函數 $U_1(x,y)$，而在雙曲域 D_2 上，函數 $U_1(x,y)$ 由下式

$$U_1(x,y)=U_1(x+y,0)\tag{1.21}$$

給出。