出版说明

高等职业教育的不断发展为更多的中等职业学校学生升入大学深造提供了条件。为了满足广大中等职业学校学生准备升学考试的需要，做好考试的复习工作，我室组织部分教师编写了《高等职业教育升学考试数学复习指南》(以下简称《指南》)。该书主要有以下几个特点：

1. 具有较强的针对性和实用性。

该书以教育部新修订的《中等职业学校数学教学大纲(试行)》为编写依据，参照《2002 年山东省高等职业教育对口招生数学考试纲要》，参考近几年《各类全国成人高等学校复习考试大纲》，特别注意针对目前中等职业学校学生的实际，从不同起点、不同层次进行了基础知识的变通，使读者易于入门。

2. 注重基础知识的挖掘和基本能力的培养。

该书每章都设有[考试知识点]和[本章要点]，使读者能明确《考纲》和《教学大纲》的具体要求。每节设有的[知识点]，详细介绍了相关基本知识内容，为读者解决数学基本问题打下了良好的基础。

3. 注重解决数学综合问题能力的培养。

该书每节设有[典型例题]、[点评]，精选了部分有代表性且有一定难度的例题，帮助读者提高对数学理论知识的再认识，有助于理清解题思路，掌握解题技巧，提高解题能力。

4. 注重题组练习，强化应试能力的培养。

该书每节都配备了一定数量的练习题，题目由浅入深，便于读者巩固基本知识点；每章设有[自我检测题]，书后还设计了[综合练习题]，题目从内容到形式都与近几年高职考试和成人高考的命题要求相吻合，利于提高读者的应试能力。

本书也可作为中等职业学校数学教师的教学参考用书。

参加本书编写的教师有：刘昌义、陈正连、王宏庆、王萍、苏毅、朱林。青岛市教育局职业技术教育教研室教研员李励信组织了本书的编写工作。

由于时间仓促，编者水平有限，本书难免存在缺点和错误，恳请各位教师和同学们批评指正，以便进一步修订与完善。

青岛市职业技术教育教研室

目　录

第一章　代数式、方程和方程组

[考试知识点]

1. 实数概念运用　　2. 实数绝对值概念运用　　3. 解方程和方程组
4. 因式分解运用　　5. 二次根式运用
6. 一元二次方程根的判别式和根与系数关系的综合运用

[本章要求]

1. 理解实数、相反数、倒数、绝对值和算术平方根的概念，会进行有关计算.

2. 理解整式、分式和二次根式的概念，掌握它们的性质和运算法则.

3. 掌握一元一次方程、一元二次方程、分式方程和无理方程的解法，并能灵活运用一元二次方程根的判别式以及根与系数的关系解决有关问题.

4. 掌握二元一次方程组、三元一次方程组、二元二次方程组的解法，会解分式方程组和无理方程组.

第一节　数与式

[知识点]

1. 实数　有理数(有限小数或循环小数)与无理数(无限不循环小数)统称为**实数**.

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\\text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\end{cases}$$

2. 数轴　规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做**数轴**. 如图 1－1.

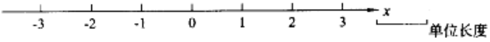

图 1－1

实数与数轴上的点是一一对应的，即数轴上每一个点表示唯一的一个实数；反之，每一个实数可用数轴上唯一的一个点来表示.

3. 相反数　符号不同的两个数 a 与 $-a$，称其中一个数是另一个数的**相反数**，规定零的相反数是零.

4. 倒数　1 除以某数的商称做这个数的**倒数**. 零没有倒数.

5. 实数的绝对值　实数 a 的绝对值，用符号 $|a|$ 表示，其定义：一个正实数的绝对值是它本身；一个负实数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零. 即：

$$|a|=\begin{cases}a,\text{当 } a>0 \text{ 时.}\\0,\text{当 } a=0 \text{ 时.}\\-a,\text{当 } a<0 \text{ 时.}\end{cases}$$

注意 $|a|\geqslant 0$，即$|a|$是非负数.

6. 平方根与算术平方根

(1)**平方根** 如果 $x^2=a(a\geqslant 0)$，那么 x 就叫做 a 的**平方根**.

正数 a 的平方根有两个，它们互为相反数，记作$\pm\sqrt{a}$.

(2)**算术平方根** 正数 a 的正的平方根$\sqrt{a}$，也叫做**算术平方根**. 规定零的算术根是零，即$\sqrt{0}=0$.

注意 ①若 $a\geqslant 0$，则$\sqrt{a}\geqslant 0$，即$\sqrt{a}$是非负数. ②对于任意实数 a，有$\sqrt{a^2}=|a|$.
③在实数范围内，负数没有平方根.

7. 代数式 用运算符号(加、减、乘、除、乘方，开方)把数或表示数的字母连结而成的式子，叫做**代数式**.

(1)代数式的分类

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\ \text{多项式}\end{cases}\\ \text{分式}\end{cases}\\ \text{无理式}\end{cases}$$

(2)代数式的值 用数值代替代数式里的字母，计算后所得的结果，叫做**代数式的值**.

8. 单项式和多项式

(1)**单项式** 由字母与数字相乘而成的代数式.

(2)**多项式** 几个单项式的代数和.

9. 整式 由字母与数字的加、减、乘而成的代数式叫做**整式**.

整式包括单项式和多项式.

(1)**整式的加减** 主要指去括号，合并同类项.

(2)**整式的乘除** 正数指数幂的运算法则：

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；　$(a^m)^n=a^{mn}$；

$(ab)^n=a^nb^n$；　$a^m\div a^n=a^{m-n}$.　$(a\neq 0,m>n)$

(3)单项式乘以单项式 以它们系数的积作为积的系数，以它们相同字母的指数的和作为积里同一字母的指数，只在一个单项式里含有的字母，连同它的指数写在积里.

(4)单项式乘以多项式 先将单项式乘以多项式的各项，然后再相加.

(5)多项式乘以多项式 先分别将一个多项式的每一项乘以另一个多项式的每一项，然后再相加.

(6)单项式除以单项式 把被除式的系数、幂分别除以除式的系数，同底数幂作为商的因式，对于只在被除式里含有的字母，则连同它的指数作为商的一个因式.

(7)多项式除以单项式 先把多项式的每一项除以单项式，再把所得的商相加.

(8)多项式除以多项式 先把两个多项式都按同一字母降幂排列，若被除式有缺项，留出空位(或补 0)，用竖式演算.

例如：计算$(9x^2+2x^3+5)\div(4x-3+x^2)$

解：

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x+1 \\ \hline
x^2+4x-3 & 2x^3+9x^2\qquad +5 \\
 & 2x^3+8x^2-6x \\ \cline{2-2}
 & \qquad x^2+6x+5 \\
 & \qquad x^2+4x-3 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad 2x+8
\end{array}$$

所以商式是 $2x+1$，余式是 $2x+8$.

(9)常用的乘法公式

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$　　$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$　　$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$.

10. 分式　设 A、B 为两个整式，且 B 含有字母，则式子 $\dfrac{A}{B}$ 叫做**分式**.

如果没有特别说明，通常认为所给定分式中分母的值不为零.

(1)基本性质　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{a\times m}{b\times m}$，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{a\div m}{b\div m}$（$m$ 为不等于零的整式）.

(2)符号法则　$\dfrac{-a}{b}=\dfrac{a}{-b}=-\dfrac{a}{b}=-\dfrac{-a}{-b}$.

(3)分式的运算.

①约分　$\dfrac{ma}{mb}=\dfrac{a}{b}$.

②分式的加减　$\dfrac{a}{c}\pm\dfrac{b}{c}=\dfrac{a\pm b}{c}$　　$\dfrac{a}{b}\pm\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad\pm bc}{bd}$.

③分式的乘除　$\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$　　$\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}=\dfrac{ad}{bc}$.

④分式的乘方　$(\dfrac{a}{b})^n=\dfrac{a^n}{b^n}$（$n$ 为正整数）.

11. 有理式　整式和分式统称为**有理式**.

12. 无理式　含有字母的开方运算的代数式叫做**无理式**.

13. 二次根式

(1)**定义**　式子 $\sqrt{a}\,(a\geqslant 0)$ 叫做**二次根式**.

由定义得，二次根式 $\sqrt{a}\,(a\geqslant 0)$ 就是 a 的算术平方根的表示式.

(2)**性质**　①$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\,(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$　②$\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\,(a\geqslant 0,b>0)$.

(3)**最简二次根式**

满足下列两个条件的二次根式叫做**最简二次根式**：

①被开方数的每一个因式的指数都小于根指数 2；

②被开方数不含分母.

(4)**同类根式**　根指数和被开方数都相同的最简二次根式叫做**同类根式**.

(5)**二次根式的运算**

①加减法　先把各个根式化为最简二次根式，然后分别合并同类根式.

②乘除法　根据二次根式的性质运算，乘法把被开方数相乘，根指数不变；除法把被开方数相除，根指数不变.

③有理化因式　如果两个无理式的乘积是一个有理式，则称其中一个无理式为另一个无理式的**有理化因式**.

④分母有理化　如果代数式的分母是无理式，用分母的有理化因式同乘以分子和分母，将分母化为有理式的变形过程，叫做**分母有理化**.

14. 因式分解　把一个多项式化成几个整式积的形式，叫做**因式分解**或**分解因式**.

因式分解常用方法：提取公因式法；应用公式法；分组分解法；十字相乘法等.

[典型例题]

例 1　选择题

(1)下列命题中错误的是(　　).

(A) 零不是偶数　(B) 零是整数　(C) 零的相反数是零　(D) 零没有倒数

(2)下列数 4、3.14、$-\sqrt{3}$、$\sqrt{9}$、0.333…、$\sqrt{(-2)^2}$ 中无理数的个数是(　　).

(A) 1 个　(B) 2 个　(C) 3 个　(D) 4 个

(3)设 a 是一个有理数，则下列各式中正确的是(　　).

(A) $a>-a$　　(B) $|-a|\geqslant a$　　(C) $|a|>a$　　(D) $|a|=a$

(4)如果 a、b 都是有理数，且 $a-b$ 是一个正数，那么(　　).

(A) a、b 一定都是负数　　(B) b 一定比 a 大

(C) a、b 一定都是正数　　(D) a 一定比 b 大

解：(1)A　(2)A　(3)B　(4)D

例 2　填空题

(1)$1-\sqrt{2}$ 的相反数是____________.

(2)两个互为相反数的和是________.

(3)不为零的两个互为倒数的积是________.

(4)绝对值大于 3 而小于 6 的所有整数是________________.

(5)在前十个自然数的算术平方根中，是有理数的，共有________个.

(6)若 $a^2>a$，则实数 a 的取值范围是__________________.

解：(1)$\sqrt{2}-1$　(2)0　(3)1　(4)$-4,-5,4,5$　(5)3　(6)$a<0$ 或 $a>1$

例 3　填空题

(1)如果 $|2x+3|+|x+y|=0$，那么 $x=$______，$y=$______.

(2)计算：当 $x>0$ 时，$\dfrac{|x|}{x}=$______，当 $x<0$ 时，$\dfrac{|x|}{x}=$______.

(3)当____________时，$|a-b|+a-b=0$.

(4)计算：$(-\dfrac{1}{3})^{2000}\times 3^{2001}=$________.

解：(1)$-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}$　(2)$1,-1$　(3)$a\leqslant b$　(4)3

例 4　已知 $|x-8y|+(4y-1)^2=0$，求 $(x+2y)^3$ 的值.

解：$\because |x-8y|+(4y-1)^2=0$，$\therefore \begin{cases} x-8y=0 \\ 4y-1=0 \end{cases}$，

解得：$x=2, y=\dfrac{1}{4}$，$\therefore (x+2y)^3=(2+\dfrac{1}{2})^3=\dfrac{125}{8}$.

例 5　已知 $x^2+y^2-4x-2y+5=0$，求 $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{3\sqrt{y}-2\sqrt{x}}$ 的值.

解：　$x^2+y^2-4x-2y+5=0$，

即 $(x^2-4x+4)+(y^2-2y+1)=0$，即 $(x-2)^2+(y-1)^2=0$，$\therefore$ $x=2, y=1$

即 $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{3\sqrt{y}-2\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{3-2\sqrt{2}}=7+5\sqrt{2}$.

例 6　已知 a、b、c 为实数，且 $a^2+b^2+c^2-2(a+b+c)+3=0$

求 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 的值.

解：　$\because a^2+b^2+c^2-2(a+b+c)+3=0$，

$\therefore (a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)+(c^2-2c+1)=0$.

即 $(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=0$，$\therefore a=b=c=1$

故 $a^3+b^3+c^3-3abc=1+1+1-3=0$.

例 7　计算 $(\sqrt{3}x-\sqrt{2})(2\sqrt{6}x^2-2\sqrt{2}x-\sqrt{3})$

解：　原式 $=6\sqrt{2}x^3-2\sqrt{6}x^2-3x-4\sqrt{3}x^2+4x+\sqrt{6}$

$=6\sqrt{2}x^3-2(\sqrt{6}+2\sqrt{3})x^2+x+\sqrt{6}$.

例 8　计算 $(4x+3y)^2(4x-3y)^2$

解：　原式 $=[(4x+3y)(4x-3y)]^2=(16x^2-9y^2)^2=256x^4-288x^2y^2+81y^4$.

例 9　分解因式 $x^6-x^4+2x^3+2x^2$

解：原式 $=x^4(x^2-1)+2x^2(x+1)=x^4(x+1)(x-1)+2x^2(x+1)$

$=x^2(x+1)[x^2(x-1)+2]=x^2(x+1)(x^3-x^2+2)$

$=x^2(x+1)(x^3+x^2-2x^2-2x+2x+2)-x^2(x+1)[x^2(x+1)-2x(x+1)+2(x+1)]=x^2(x+1)^2(x^2-2x+2)$.

例 10 化简 $x-\frac{1}{1-x}-\frac{x^3-3x+1}{x^2-1}$

解： 原式$=\frac{x(x^2-1)}{x^2-1}+\frac{x+1}{x^2-1}-\frac{x^3-3x+1}{x^2-1}=\frac{x^3-x+x+1-x^3+3x-1}{x^2-1}=\frac{3x}{x^2-1}$.

［**点评**］本节内容虽然高职试题中不直接考查，但是复习好数学的基础知识，因此要重点复习知识的运用.

练习一

1. 选择题

(1)若$\sqrt{-(a+1)^2}$为实数，则实数 a（　　）.

(A) 不存在　(B) 只有一个　(C) 只有二个　(D) 有无数个

(2)若$-a>-|a|$，则（　　）.

(A) $a<0$　(B) $a>0$　(C) $a=0$　(D) $a\geqslant 0$

(3)$[-2(-x^{n-1})]^3=$（　　）.

(A) $-2x^{3n-3}$　(B) $-6x^{n-1}$　(C) $8x^{3n-3}$　(D) $-8x^{3n-3}$

(4)已知$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=a$，则$\frac{x^2+1}{x}$的值是（　　）.

(A) a^2　(B) a^2-2　(C) a^2-4　(D) $2-a^2$

(5)若 $xy=b$，且$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=a$，则$(x+y)^2=$（　　）.

(A) $(a+2b)^2$　(B) a^2+b^2　(C) $ab(b+2)$　(D) $b(ab+2)$

(6)下列四个命题中，正确的是（　　）.

(A) 若$\sqrt{a}=a$，则 $a=0$　(B) 若$|a|=a$，则 $a=0$

(C) 若$-a=a$，，则 $a=0$　(D) 若$\frac{1}{a}=a$，则 $a=1$

2. 填空题

(1)一个数的绝对值恰好是这个数的平方，这个数是________.

(2)$-\frac{7}{10}$是________的立方根.

(3)计算$\frac{|x|}{x}-\frac{x}{|x|}=$________.

(4)若$\sqrt{2x+1}+|3y-5|=0$，则 $xy=$________.

(5)$0.25^{1999}\times 4^{2000}=$________.

(6)已知$\frac{1}{x}=\frac{2}{y+z}=\frac{3}{z+x}$，则$\frac{2y+z}{x}=$________.

(7)$(1-\sqrt{2})^{1999}\cdot(1+\sqrt{2})^{2000}=$________.

(8)计算$\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}=$________.

3. 解答题

(1)计算 $(2-x)^2(4+2x+x^2)^2$　　(2)化简$\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3+x^2-x-1}$

(3)计算下列各式

①$\sqrt{7+2\sqrt{10}}$　②$\sqrt{4-2\sqrt{3}}$　③$\sqrt{2-\sqrt{3}}$

(4)若$\frac{1}{2}<x<2$，求$\sqrt{4x^2-4x+1}+2|x-2|$的值.

练习二

1. 选择题

(1)下列说法正确的是(　　).

(A) 正数和负数互为相反数　　(B) 任何数都有倒数

(C) 任何数都有相反数　　(D) 绝对值等于本身的数一定是正数

(2)若$(-a)^{15}>0$,则一定有(　　).

(A) $a>0$　　(B) $a<0$　　(C) $a=0$　　(D) a 为有理数

(3)设 n 为自然数,则$(-1)^n+(-1)^{n+1}$的值为(　　).

(A) 0　　(B) 2　　(C) -2　　(D) 2 或-2

(4)要使$(x^2+ax+5)(-6x^3)$的展开式中,不含 x^4 的项,则 a 应等于(　　).

(A) 1　　(B) -1　　(C) $\frac{1}{6}$　　(D) 0

(5)若 $a+b=10,ab=5$,则 a^2+b^2 的值为(　　).

(A) 100　　(B) 90　　(C) 15　　(D) 95

(6)若 $a^2+b^2=16,a+b=4$,则 ab 的值是(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) -2

(7)使分式$\frac{-5}{1-2x}$的值为正的条件是(　　).

(A) $x<0$　　(B) $x>0$　　(C) $x<\frac{1}{2}$　　(D) $x>\frac{1}{2}$

(8)若 $0<x<1$,则有(　　).

(A) $\sqrt[3]{x}<x$　　(B) $\sqrt[3]{x}\leqslant x$　　(C) $\sqrt[3]{x}>x$　　(D) $\sqrt[3]{x}\geqslant x$

(9)$2\sqrt{23},3\sqrt{11},4\sqrt{6},10$ 从大到小排列应是(　　).

(A) $10>3\sqrt{11}>4\sqrt{6}>2\sqrt{23}$　　(B) $2\sqrt{23}>3\sqrt{11}>4\sqrt{6}>10$

(C) $4\sqrt{6}>3\sqrt{11}>10>2\sqrt{23}$　　(D) $3\sqrt{11}>10>4\sqrt{6}>3\sqrt{23}$

(10)若 x,y 为实数,且 $y=\frac{1}{2}+\sqrt{8x-1}+\sqrt{1-8x}$,则$\frac{x}{y}$等于(　　).

(A) 2　　(B) 4　　(C) $\frac{1}{4}$　　(D) $\frac{1}{2}$

2. 填空题

(1)若 $x+\frac{1}{x}=2$,则 $x^3+\frac{1}{x^3}=$________.

(2)若 $a+b=3,c+d=4,ab=1,cd=2$,则代数式$(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ 的值是________.

(3)a、b 为有理数,若 $x^2+\frac{1}{2}x+a=(x+b)^2$,则 $a=$______,$b=$______.

(4)若 $1<x<2$,则代数式$\frac{|x-2|}{x-2}-\frac{|x-1|}{x-1}+\frac{|x|}{x}$的值是________.

(5)若 $x\neq0$,且$\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x}=\frac{1}{4}$,则$\frac{3x}{22}$的值为________.

(6)当 $x=$__________,$\sqrt{7+2x}$有最小值是________.

(7)若 $x<0,y<0$,则$\sqrt{-12(x+y)^3}$化简得________.

(8)当 x________时,$\frac{\sqrt{x}}{2-|x|}$有意义.

(9)如果$\frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2}=-1$,那么 x 的取值范围是________.

(10)若$|a-\sqrt{a^2}|=-2a$,则 a________.

3. 解答题

(1)计算：$a-2a+3a-4a+\cdots+101a$.

(2)已知$(x+1)^2+|3x-y+1|=0$成立，求代数式$-xy^2+4x^2y$的值.

(3)当$a<0$时，化简$|a|-2|a-1|-5a+4$.

(4)化简：$a^3\cdot a^4\cdot a+(a^2)^4+(-2a^4)^2$.

(5)化简：$(1-a)(1+a^2)-(a+1)(a^2-1)-2(4-a^3)$.

(6)已知$x+y=3,xy=1$，求$4(x-y)^2-(x-y)^4+70$的值.

(7)已知$x-\dfrac{1}{x}=2$，求$3-x^2-\dfrac{1}{x^2}$的值.

(8)已知$x+y=6,xy=-7$，求x^2+y^2的值.

(9)已知$a^2+b^2=3ab$，求证$a^4+b^4=7a^2b^2$.

(10)已知$(2p+q+1)^2$和$|3p+q-1|$互为相反数，求$p^2-\dfrac{1}{2}q$的值.

(11)已知$\sqrt{1-x}$与$\sqrt{x-1}$都是二次根式，求$\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1}$的值.

(12)已知$x=\sqrt{3}-1$，求$\dfrac{x+2}{x}-\dfrac{3}{x+1}$的值.

第二节　方程和方程组

[知识点]

1. 一元一次方程及其解法

(1)**一般形式**　$ax+b=0(a\neq 0)$

(2)**解法**　①去分母，②去括号，③移项，④合并同类项，⑤方程两边都除以未知数的系数，化为$x=C$的形式.

2. 一元二次方程及其解法

(1)**一般形式**　$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$.

(2)**解法**　①因式分解法，②配方法，③公式法.

求根公式：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

(3)**根的判别式** $\Delta=b^2-4ac$.

①当$\Delta>0$时，方程有两个不相等的实数根.

②当$\Delta=0$时，方程有两个相等的实数根.

③当$\Delta<0$时，方程没有实数根.

(4)**根与系数的关系(韦达定理)**

如果方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的两个根是x_1,x_2，

那么$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a},x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

3. 分式方程及其解法

(1)**分式方程**　分母含有未知数的方程叫做**分式方程**.

(2)**解法**　①去分母法，②换元法，③其他的方法

注意：解分式方程会产生增根，必须进行检验.

4. 无理方程及其解法

(1)**无理方程**　根号下含有未知数的方程，叫做**无理方程**.

(2)**解法**　①乘方法(去根号法)，②换元法.

注意：解无理方程会产生增根，必须进行检验.

5. 二元一次方程组及其解法

(1)**一般形式**$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$

(2)**解法**:①代入消元法,②加减消元法.

注意:若$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$时,方程组有唯一解;

若$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$时,方程组无解;

若$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$时,方程组有无数个解.

6.三元一次方程组及其解法

(1)**一般形式**$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$

(2)**解法** ①代入消元法,②加减消元法

注意:方程组有唯一解、无解、无数个解三种情况.

7.二元二次方程组及其解法

(1)**一般形式** $\begin{cases}a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0\\a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+d_2x+e_2y+f_2=0\end{cases}$

(a_1,b_1,c_1,d_1,e_1,f_1不全为零,a_2,b_2,c_2,d_2,e_2,f_2不全为零).

(2)**解法**

①代入消元法;②加减消元法;③根与系数的关系法;④消去常数项法;⑤因式分解法;⑥两个方程相对应的项系数成比例法.

[典型例题]

例1 选择题

(1)关于x的方程$2Kx^2+(8K+1)x=-8K$有两个实数根,则K的取值范围是( ).

(A) $K>-\frac{1}{16}$ (B) $K\geqslant-\frac{1}{16}$且$K\neq0$

(C) $K=-\frac{1}{16}$ (D) $K>-\frac{1}{16}$且$K\neq0$

(2)关于x的方程$2x^2-(m+2)x+3m=5$的两个根互为负倒数,则m的值是( ).

(A) $\frac{4}{3}$ (B) -2 (C) 1 (D) -1

(3)若关于x的方程$ax^2-(2a+1)x+(a+1)=0$的两根差为1,则a的取值是( ).

(A) 1 (B) -1 (C) ±1 (D) 不能确定

(4)已知a、b、c为$\triangle ABC$的三边,且关于x的一元二次方程$(c-b)x^2+2(b-a)x+(a-b)=0$有两个相等实数根,则这个三角形是( ).

(A) 等边三角形 (B) 直角三角形

(C) 等腰三角形 (D) 不等边三角形

(5)若关于x的方程$x^2+2(a+1)x+a^2+4a-5=0$有实数根,则a的正整数值有( ).

(A) 1,2 (B) 0,1,2 (C) 0,1,2,3 (D) 1,2,3

(6)方程$\frac{2x^2}{x-1}-\frac{2x+7}{3}+\frac{4-6x}{x-1}=0$的根的个数是( ).

(A) 1个 (B) 2个 (C) 3个 (D) 4个

(7)方程$\sqrt{x-3}=\sqrt{4-2x}$的解的情况是( ).

(A) 一定无解 (B) 一定有解$x=3$

(C) 一定有解$x=\frac{1}{3}$ (D) 以上答案都不对

(8)关于x,y的方程组$\begin{cases}4x+4Ky+1=0\\8y-4x=1\end{cases}$有无数组解,则$K$的值是( ).

(A) $K=-2$　　(B) $K\neq-2$　　(C) $K<-2$　　(D) $K>-2$

解:(1)B　(2)C　(3)C　(4)C　(5)D　(6)A　(7)A　(8)A

例 2　填空题

(1)当 $m=$______时,关于 x 的方程 $(m-2)x=5(x+1)$ 的根是 -3.

(2)若 $5x^2-7xy-6y^2=0$,则 $\frac{x}{y}=$________.

(3)若关于 x 的方程 $6mx^2+3nx+2=0$ 和 $24mx^2+10nx+7=0$ 有公共根是 $\frac{1}{2}$,则 $m=$________,$n=$________.

(4)若关于 x 的方程 $(m-1)x^2-2mx+m=3$ 有两个实数根,则 m 的取值范围是________.

(5)已知关于 x 的方程 $(m+3)x^2+(2m+5)x+m=0$.

①若方程有且仅有一个根,则 $m=$________,此时方程的根是________,这时方程是一元________次方程.

②若方程有两个相同的实数根,则 $m=$________,此时方程的根是________.

(6)已知 x_1、x_2 是方程 $\frac{x(x+1)}{2}=\frac{2}{3}+x$ 的两个根,不解方程求以下各式的值:

①$x_1+x_2=$________,$x_1x_2=$________,$9x_1\cdot5x_2=$________.

②$x_1^2+x_2^2=$________,$-\frac{5}{x_1}-\frac{5}{x_2}=$________.

③$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=$________,$\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}=$________.

④$(x_1+6)(x_2+6)=$________,$(\frac{4}{x_1}+x_2)(\frac{3}{x_2}-x_1)=$________.

⑤$(4x_1-5x_2)(4x_2-5x_1)=$________,$-3x_1^2x_2-3x_1x_2^2=$________.

⑥$x_1^3+x_2^3=$________,$x_1^4+x_2^4=$________.

⑦$(x_1-x_2)^2=$________,$x_1-x_2=$________.

⑧$(3x_1-2)(3x_2-2)=$________,$(3x_1-5)(5x_2-\frac{25}{3})=$________.

(7)若关于 x 的方程 $\frac{3}{x-5}-\frac{a^2}{x^2-25}=1$ 有一个增根是 5,则 a 的值是________,此时方程的根是________.

(8)方程 $\sqrt{x+2}=x$ 的解是________.

解:(1)$\frac{16}{3}$　(2)2 或 $-\frac{3}{5}$　(3)$-\frac{1}{3}$,-1　(4)$m\geqslant\frac{3}{4}$ 且 $m\neq1$

(5)①-3,一②$-\frac{25}{8}$,$x_1=x_2=-5$

(6)①1,$-\frac{4}{3}$,-60;②$\frac{11}{3}$,$\frac{15}{4}$;③$\frac{33}{16}$,$-\frac{11}{4}$;④$40\frac{2}{3}$,$-8\frac{2}{3}$;⑤-128,4;⑥5,$\frac{89}{9}$;

⑦$\frac{19}{3}$,$\pm\frac{1}{3}\sqrt{57}$;⑧-14,$-\frac{10}{3}$;(7)$\pm\sqrt{30}$,-2;(8)2

例 3　已知方程 $3x^2-3x+K=0$ 的一个根为 -1,求这个方程的另一个根及 K 的值.

解法一:由韦达定理,设另一个根为 x_1,则 $-1+x_1=-\frac{-3}{3}=1$

可得 $x_1=2$,由 $-1\cdot2=\frac{K}{3}$,可得 $K=-6$.

解法二:因为 -1 是方程的根,所以它满足方程:

$3\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)+K=0$,可得 $K=-6$.

由韦达定理,设另一个根为 x_1,可得:$-1\cdot x_1=\frac{-6}{3}$,得 $x_1=2$.

例 4 已知方程 $x^2+(2K+1)x+K^2-2=0$ 的两实数根的平方和等于 11,求 K 的值.

解:由韦达定理,可得

$x_1+x_2=-(2K+1)\ldots\ldots$①　　$x_1\cdot x_2=K^2-2\ldots\ldots$②

①式两端平方:

$(x_1+x_2)^2=(2K+1)^2$,$x_1^2+2x_1x_2+x_2^2=(2K+1)^2$

$x_1^2+x_2^2=(2K+1)^2-2x_1x_2\ldots\ldots$③

把②代入③,得 $x_1^2+x_2^2=(2K+1)^2-2(K^2-2)$,

由已知条件,得$(2K+1)^2-2(K^2-2)=11$, 解得 $K=-1\pm\sqrt{3}$

当 $K=-1-\sqrt{3}$ 时,已知方程 $x^2+[2(-1-\sqrt{3})+1]x+(-1-\sqrt{3})^2-2=0$ 的根的判别式 $\Delta=[2(-1-\sqrt{3})+1]^2-4\times1\times[(-1-\sqrt{3})^2-2]=5-4\sqrt{3}<0$,

此时,方程没有实数根,故不合题意

当 $K=-1+\sqrt{3}$ 时,已知方程 $x[2(-1+\sqrt{3})+1]x+(-1+\sqrt{3})^2-2=0$ 的根的判别式 $\Delta=[2(-1+\sqrt{3})+1]^2-4\times1\times[(-1+\sqrt{3})^2-2]=5+4\sqrt{3}>0$,

此时,方程有两个不相等的实数根,符合题意,所以 $K=-1+\sqrt{3}$.

例 5 解下列方程

(1) $16(5x-3)^2=9$　　(2) $(2x+1)^2-(x-3)(2x-1)=3x$

(3) $6x^2+(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})x-\sqrt{6}=0$　　(4) $(x^2-2x-2)(x^2-2x-5)+2=0$

解:(1)展开,整理得 $80x^2-96x+27=0$,

方程左边分解因式得,$(20x-9)(4x-3)=0$

方程的解是 $x_1=\frac{9}{20}$,$x_2=\frac{3}{4}$.

(2)展开,整理得 $x^2+4x-1=0$,据求根公式得　$x_1=-2+\sqrt{5}$,$x_2=-2-\sqrt{5}$.

(3)方程左边分解因式得　$(3x-\sqrt{2})(2x+\sqrt{3})=0$,

方程的解是 $x_1=\frac{\sqrt{2}}{3}$,$x_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(4)设 $y=x^2-2x$,原方程化为　$(y-2)(y-5)+2=0$,

展开,整理得 $y^2-7y+12=0$

方程左边分解因式得　$(y-3)(y-4)=0$

解得　$y_1=3$,$y_2=4$,

当 $y_1=3$ 时,$x^2-2x=3$,解得 $x_1=3$,$x_2=-1$,

当 $y_2=4$ 时,$x^2-2x=4$,解得 $x_3=1+\sqrt{5}$,$x_4=1-\sqrt{5}$,

∴原方程的解是 $x_1=3$,$x_2=-1$,$x_3=1+\sqrt{5}$,$x_4=1-\sqrt{5}$.

例 6 已知方程 $2x^2-2Kx+1=0$ 和方程 $x^2-(K+2)x+5=0$ 有一个公共根,求这个公共根及实数 K 的值.

解:　设公共根为 x_0,由题意得方程组

$$\begin{cases}2x_0^2-2Kx_0+1=0\ldots\ldots\ldots①\\x_0^2-(K+2)x_0+5=0\ldots\ldots\ldots②\end{cases}$$

①$-2\times$②得　$4x_0-9=0$　　解得　$x_0=\frac{9}{4}$

将 $x_0=\frac{9}{4}$ 代入①得,$K=\frac{89}{36}$,∴公共根 $x_0=\frac{9}{4}$,实数 $K=\frac{89}{36}$.

例 7 解方程 $x-3-\frac{4x^2+7x}{x-3}=3(1-x)$

解:　去分母得 $(x-3)^2-(4x^2+7x)=3(1-x)(x-3)$

展开,整理得 $25x-18=0$　解 $x=\frac{18}{25}$,

经检验，$x=\frac{18}{25}$是原方程的根.

例 8 解方程$\sqrt{2+\frac{3}{x}}+1=2\sqrt{\frac{x}{2x+3}}$

解： 将方程变形：$\sqrt{\frac{2x+3}{x}}+1=2\sqrt{\frac{x}{2x+3}}$,

令 $y=\sqrt{\frac{2x+3}{x}}$，上述方程可变得 $y+1=\frac{2}{y}$,

去分母，整理得 $y^2+y-2=0$ 解得 $y_1=1, y_2=-2$

当 $y=1$ 时，$\sqrt{\frac{2x+3}{x}}=1$, 解得 $x=-3$

当 $y=-2$ 时，$\sqrt{\frac{2x+3}{x}}=-2$，无解.

经检验，$x=-3$ 是原方程的根.

例 9 解方程组$\begin{cases}\frac{x}{4}-\frac{y}{2}=\frac{7}{8}\ldots\ldots① \\ x+2y=\frac{9}{2}\ldots\ldots②\end{cases}$

解： ①×4 得 $x-2y=\frac{7}{2}\ldots\ldots③$

②+③得，$2x=8$，解得 $x=4$

②－③得，$4y=1$，解得 $y=\frac{1}{4}$,

∴原方程组的解为$\begin{cases}x=4 \\ y=\frac{1}{4}\end{cases}$.

例 10 解方程组$\begin{cases}z=x+y.\ldots\ldots\ldots① \\ 2x-3y+5z=5.\ldots\ldots② \\ 3x+y-z=2.\ldots\ldots\ldots③\end{cases}$

解： 由①得 $x+y-z=0.\ldots\ldots\ldots④$

③－④得 $2x=2$，解得 $x=1$，将 $x=1$ 代入①、②得

$\begin{cases}z=1+y.\ldots\ldots⑤ \\ -3y+5z=3.\ldots\ldots⑥\end{cases}$，将⑤代入⑥得，$y=-1$,

将 $y=-1$ 代入⑤得 $z=0$,

∴原方程组的解为$\begin{cases}x=1 \\ y=-1 \\ z=0\end{cases}$.

例 11 当 $x>3, y<1$ 时，解方程组$\begin{cases}|2-x|+5|y-1|=13 \\ |1-x|+3|7-y|=28\end{cases}$

解： 当 $x>3$ 时，$|2-x|=x-2, |1-x|=x-1$

当 $y<1$ 时，$|y-1|=1-y, |7-y|=7-y$

∴原方程组可变得$\begin{cases}x-2+5(1-y)=13 \\ x-1+3(7-y)=28\end{cases}$

上述方程组整理得$\begin{cases}x-5y=10.\ldots\ldots① \\ x-3y=8.\ldots\ldots②\end{cases}$

①－②解得 $y=-1$，将 $y=-1$ 代入①解得 $x=5$

∴原方程组的解为 $\begin{cases}x=5 \\ y=-1\end{cases}$.

例 12 解方程组$\begin{cases}3xy+x=4.\dots\dots ①\\ xy-x=2.\dots\dots ②\end{cases}$

解： ②×3 得 $3xy-3x=6.\dots\dots ③$

①+②得 $4xy=6.\dots\dots\dots ④$

①-③得 $4x=-2$，解得 $x=-\frac{1}{2}$，

将 $x=-\frac{1}{2}$ 代入④得 $y=-3$，

∴ 原方程组的解为$\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\ y=-3\end{cases}$

例 13 设 a、b 为方程 $x^2+mx+m^2+a=0$ 的两根，求 a^2+ab+b^2+a 的值.

解法一：由已知及一元二次方程根与系数的关系，得$\begin{cases}a+b=-m.\dots\dots\dots ①\\ a\cdot b=m^2+a.\dots\dots ②\end{cases}$

由①，得 $(a+b)^2=m^2.\dots\dots ③$

把③代入②，得 $ab=(a+b)^2+a$， $ab=a^2+2ab+b^2+a$

所以 $a^2+ab+b^2+a=0$.

解法二：$a+b=-m$，$m=-(a+b).\dots\dots ④$

因为 a 是方程的根，于是有 $a^2+ma+m^2+a=0.\dots\dots ⑤$

把④代入⑤，得 $a^2-a(a+b)+(a+b)^2+a=0$

$a^2-a^2-ab+a^2+2ab+b^2+a=0$

所以 $a^2+ab+b^2+a=0$.

说明：以上两种解法的要点都是“消去”m，找出 a、b 的关系式，进而整理即得.

例 14 m 取什么值时，方程 $2x^2+(m-3)x+1-m=0$ 有两个相等的实数根？并求出这时方程的根.

分析：本问题归结为判别式 $\Delta=0$ 求 m 的值，再据 m 值求此时方程的根.

解：因为 $\Delta=(m-3)^2-4\cdot 2\cdot(1-m)=m^2-6m+9-8+8m=m^2+2m+1=(m+1)^2=0$，所以 $m=-1$，

这时方程变为 $2x^2-4x+2=0$，$x^2-2x+1=0$，$(x-1)^2=0$，$x_1=x_2=1$

即：这时方程的根是 $x_1=x_2=1$.

［**点评**］方程与方程组是数学解题的重要工具，它的运用贯穿于数学的始终. 方程的解题思路是降次和变为整式方程，然后按各自的解法解. 需加强对根的判断式和根与系数关系应用的复习. 方程组的解题思路主要是消元变为一元方程或变为整式方程，然后按各自的解法解，当然还有一些特殊的解法. 掌握好本节内容，可为以后数学复习打下良好的基础.

练 习

1. 选择题

(1)已知关于 x 的方程 $x^2+2(m-4)x+m^2=6m-8$ 有两个相等实数根，则 m 的值是(　　).

(A) 4　　(B) 2 或 4　　(C) -3　　(D) 全体实数

(2)已知关于 x 的方程 $x^2+m^2-n^2-2mx=0$ 的两个根的平方和是(　　).

(A) $2(m^2+n^2)$　　(B) $4m^2+n^2$　　(C) $2(m^2-n^2)$　　(D) $4m^2-n^2$

(3)关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根如果互为相反数，那么(　　).

(A) $b\neq 0, c=0$　　(B) $b=0$　　(C) $a=c$　　(D) $a=b=c$

(4)若关于 x 的方程 $x^2-6x+m=0$ 的两根是 x_1 和 x_2，且 $3x_1+2x_2=20$，则 m 的值是(　　).

(A) 6　　(B) -6　　(C) -16　　(D) 16

(5)关于 x 的方程 $2x^2+(2-7m)x+6m=0$ 的两根之和与两根之积相等，则 m 的值是(　　).

(A) 6.5　　(B) -6.5　　(C) -2　　(D) 2

(6)下列方程中，一定无解的是(　　).

(A) $\sqrt{x+2}=x$　　(B) $x^2-x-1=0$　(C) $\frac{2}{x}=1$　　(D) $x^4+1=0$

2. 填空题

(1) x^2+6x+________ $=(x+$________$)^2$.

(2) $x^2-\frac{7}{3}x+$________ $=(x-$________$)^2$.

(3) $x^2+3x+1=(x+$________$)^2-$________.

(4) $-x^2-4x+1=-(x+$________$)^2+$________.

(5)已知方程 $3x^2-3x+1=0$ 的两个根为 x_1,x_2，则 $x_1+x_2=$________，$x_1\cdot x_2=$________，$x_1^2+x_2^2=$________.

(6)已知 x_1、x_2 为方程 $x^2-4x+1=0$ 的两个根，则

①$(x_1+1)(x_2+1)=$________.　　②$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=$________.

③$(x_1-1)(x_2-1)=$________.　　④$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=$________.

(7)已知方程 $2x^2+4x-3=0$ 的两个根为 x_1,x_2，则 $x_1^3+x_2^3=$________，　$(x_1-x_2)^2=$________.

(8)方程 $4x^2+5x-m=0$ 的两根倒数和为 $\frac{5}{21}$，则 $m=$________，两根是________.

3. 解下列方程

(1) $x^2-9=0$　　(2) $x^2-x-6=0$　　(3) $x^2-5x+6=0$

(4) $m^2+2m-8=0$　　(5) $m^2+m-72=0$　　(6) $n^2-11n+24=0$

(7) $2x^2-9x+7=0$　　(8) $2x^2-5x+2=0$　　(9) $9a^2-8a-20=0$

(10) $2x^2-4x-3=0$　　(11) $5x^2+\sqrt{2}x-4=0$

(12) $\sqrt{5}(x^2-x)=\sqrt{6}(x^2+x)$　　(13) $x^4-2x^2-3=0$

(14) $1+\frac{1}{x-3}=\frac{4-x}{x-3}$　　(15) $x^2+2x+4-\frac{6-5x+x^3}{x-2}=1$　　(16) $x+\sqrt{x-10}=10$

4. 解方程组

(1) $\begin{cases}6x-5y=8.5\\3x-4y=5\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\frac{x-2y}{3}-\frac{x+2y}{2}=-1\\5(x-2y)-4(x+2y)=-1\end{cases}$　　(3) $\begin{cases}x+y=4\\y+z=8\\z+x=6\end{cases}$

(4) $\begin{cases}\frac{2}{x-3}+\frac{5}{y-4}=1\\\frac{1}{x-3}-\frac{3}{4-y}=2\end{cases}$　　(5) $\begin{cases}\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=11\\\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-5\\\frac{4}{x}+\frac{3}{y}+\frac{1}{z}=8\end{cases}$　　(6) $\begin{cases}x-2y=3\\x^2-2xy+y^2-1=0\end{cases}$

(7) $\begin{cases}5x+4y=10\\20xy=9\end{cases}$　　(8) $\begin{cases}x^2+y^2=26\\x+y=6\end{cases}$　　(9) $\begin{cases}x^2+y^2=17\\x^2-3xy-4y^2=0\end{cases}$

(10) $\begin{cases}(2x-3)(4y-5)=9\\\frac{2x-3}{4y-5}-1=0\end{cases}$　　(11) $\begin{cases}x^2-2xy-y^2=2\\xy+y^2=4\end{cases}$　　(12) $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=8\\\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=34\end{cases}$

(13) $\begin{cases}x^2-y^2=1\\(x-\sqrt{2})^2+y^2=1\end{cases}$　　(14) $\begin{cases}y^2=8x\\x^2=8y\end{cases}$　　(15) $\begin{cases}x^2+y^2+6y-28=0\\x^2+y^2+6x-4=0\end{cases}$