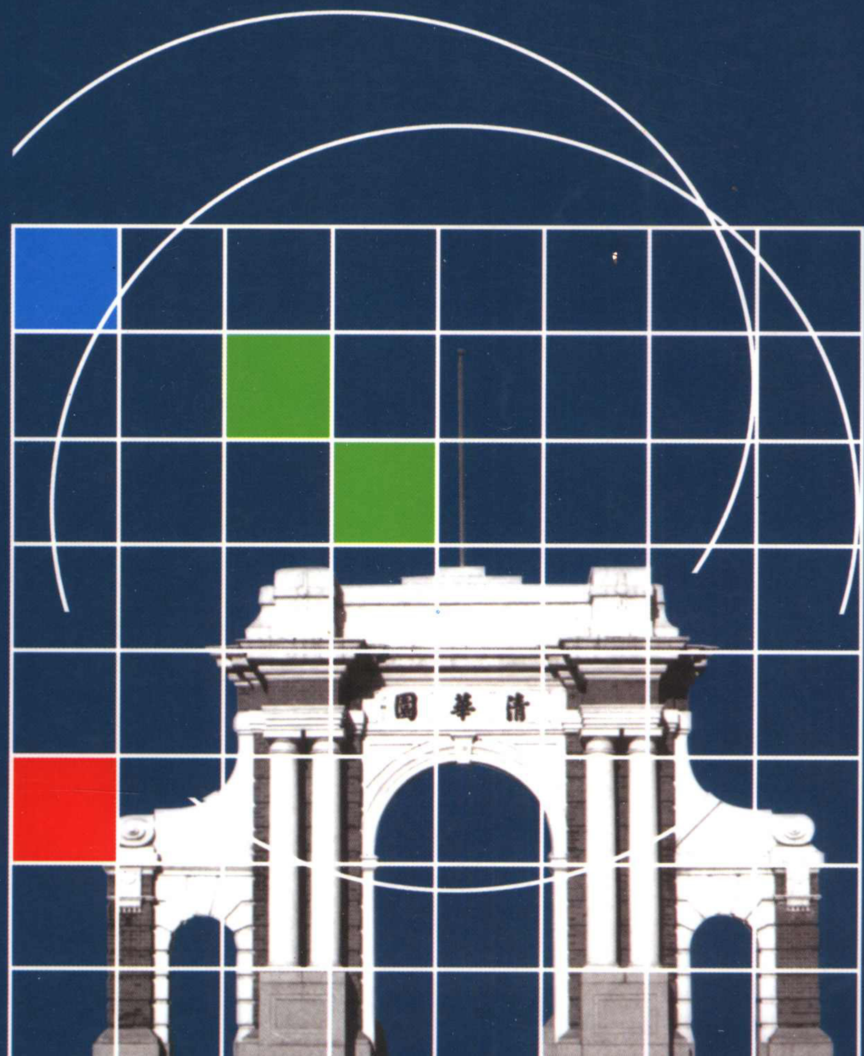
2002年工商管理硕士入学考试用书

MBA 入学联考数学模拟试题

陈秉正 主编



兵器工业出版社

MBA入学联考数学模拟试题

陈秉正　主编

兵器工业出版社

内 容 简 介

本书是根据 MBA 考生的实际需要，紧扣最新《MBA 联考大纲》，结合编者多年从事 MBA 教学及考前辅导的经验和体会编写而成。全书共有 20 套模拟试题。试题考点全面、丰富多样、难易适中；具有针对性、适用性、典型性和权威性。本书特别适用于 MBA 考生及同等学力申请工商管理硕士学位者，也适用于其他相关专业的硕士考生，同时还可作为 MBA 入学联考考前数学辅导教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

MBA 入学联考数学模拟试题/陈秉正主编. －北京：兵器工业出版社，2001.7
ISBN 7-80172-005-9

Ⅰ.M… Ⅱ.陈… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-试题
Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 26034 号

出版发行：兵器工业出版社
责任编辑：贺 岩
责任技编：魏丽华
社 址：100089 北京市海淀区车道沟 10 号
经 销：各地新华书店
印 刷：天津新华印刷二厂
版 次：2001 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
印 数：1—3000

封面设计：傅光辉
责任校对：仝 静 王 绛
责任印制：王京华
开 本：787×1092 1/16
印 张：8.75
字 数：207.48 千字
定 价：18.00 元

前言

随着全国MBA入学联考制度的进一步推行和招生院校的逐步扩大，考生人数大幅度增加，竞争日趋激烈。广大考生迫切希望考前多做一些权威性、针对性、适用性强的模拟试题，更好地准备应试。为满足考生的这一需要，由清华大学、北京大学、对外经济贸易大学等MBA招生院校多年从事MBA教学的专家、教授紧扣最新《MBA联考大纲》，编写了《MBA入学联考模拟试题》丛书。本丛书分为英语、数学、管理、语文与逻辑四个分册。

数学分册的特色是：第一，本书在内容、题型、试题结构、难度等方面紧扣最新《MBA联考大纲》；第二，本书模拟试题成套、系统、完整，全面覆盖了《MBA联考大纲》所要求的考点；第三，本书具有权威性、针对性、适用性、典型性和综合性。

使用本书的有利之处是：由于MBA招收的大部分学员是在职人员，考生大多工作忙、时间紧，因此考前在系统复习的基础上认真模拟本书试题，"真枪实弹"地演习，既有利于考生在短时间内抓住重点、巩固要点、发现弱点、解决难点，也有利于考生尽快掌握各种题型的解答技巧，提高解题速度和正确率，以达事半功倍之目的。

提请考生在使用本书过程中，第一，要注意在全面系统复习的基础上严格按三个小时的答题时间模拟本书试题；第二，要注意点面结合、举一反三、触类旁通、灵活运用，不要死记硬背参考答案。

本书共有20套模拟试题，**由清华大学经济管理学院陈秉正副教授主编，清华大学经济管理学院程佳惠教授和李端敏教授审稿**。希望并相信本书能够助广大MBA考生一臂之力。

本书在编写过程中参阅了其他有关资料，限于篇幅，不能一一注明，在此一并致谢。

编　者

2001年6月

目　录

模拟试题 1

一、选择题：本大题共 20 个小题，每小题 2 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项正确，请在答题卡上按要求把所选项涂黑.

1. 设 $f(x)=(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$，则 $f'(4)=$

(A)2　　(B) -2　　(C)3　　(D) -3

2. 函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & 0<x\leqslant 1 \\ 2-x, & 1\leqslant x<3 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处间断是因为

(A) $f(x)$ 在点 $x=1$ 处无定义　　(B) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ 不存在

(C) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ 不存在　　(D) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在

3. 设 $F(x)=\dfrac{x^2}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 为连续函数，则 $\lim\limits_{x\to a}F(x)=$

(A) a^2　　(B) $a^2 f(a)$　　(C)0　　(D) $f(a)$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=$

(A) e^2　　(B) e^{-2}　　(C) e　　(D) e^{-1}

5. 函数 $y=4\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$ 的极小值为

(A) -4　　(B) 4　　(C) -8　　(D) 8

6. 设 $a\neq 0$，则 $\displaystyle\int(ax+b)^{100}\mathrm{d}x=$

(A) $\dfrac{a^{100}}{100}(ax+b)^{101}+C$　　(B) $\dfrac{1}{101b}(ax+b)^{101}+C$

(C) $\dfrac{1}{101a}(ax+b)^{101}+C$　　(D) $\dfrac{a}{101}(ax+b)^{101}+C$

7. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$ 相比，有关系式

(A) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x<\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$　　(B) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x>\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$

(C) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$　　(D) $\left[\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x\right]^2=\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$

8. 已知 $z=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{y}{x}}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

(A) $\dfrac{\ln 3}{x}\cdot 3^{\frac{y}{x}}$　　(B) $\dfrac{\ln 3}{x}\cdot 3^{\frac{x}{y}}$　　(C) $\dfrac{\ln x}{3}\cdot x^y$　　(D) $\dfrac{\ln y}{3}\cdot y^x$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[9]{3}\cdot\sqrt[27]{3}\cdots\sqrt[3^n]{3})=$

(A) $3^{\frac{1}{2}}$　　(B) $2\sqrt{3}$　　(C) $\mathrm{e}\sqrt{3}$　　(D) $3^{\frac{1}{2}}-\sqrt{3}$

10. 若 $f(x)=\begin{cases}2ax+b & x\geqslant 0\\ xe^{x} & x<0\end{cases}$,且 $f(x)$在 $x=0$ 可导,则 a,b 等于

(A) $a=\frac{1}{2}$,b 任意　(B) $a=0$,b 任意　(C) $a=0,b=0$　(D) $a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}$

11. 若 $\begin{vmatrix}1 & x & x^2 & \cdots & x^n\\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n\end{vmatrix}=0$,且 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 各不相同,则上述方程

(A) 没有实根　(B) 没有有理根　(C) 有 n 个相等实根　(D) 有 n 个不等实根

12. 四元线性方程组 $\begin{cases}x_1=0\\ x_3-x_4=0\\ x_3+x_4=0\end{cases}$ 的基础解系是

(A) $(0\ 0\ 0\ 0)^{\mathrm{T}}$　(B) $(0\ 8\ 0\ 0)^{\mathrm{T}}$

(C) $(0\ 1\ -1)^{\mathrm{T}}$　(D) $(0\ 8\ 0\ 0)^{\mathrm{T}}$ 和 $(0\ 1\ 0\ 0)^{\mathrm{T}}$

13. 设当事件 A 与 B 同时发生时,事件 C 必发生,则

(A) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$　(B) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$

(C) $P(C)=P(AB)$　(D) $P(C)=P(AB)\cdot P(C|AB)$

14. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 均为 n 维向量,那么下列结论正确的是

(A) 若 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=0$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关

(B)若对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\neq 0$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关

(C) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关,则对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=0$

(D) 若 $o\boldsymbol{\alpha}_1+o\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+o\boldsymbol{\alpha}_m=0$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关

15. 若 $A\supset B,A\supset C,P(A)=0.8,P(\bar{B}+\bar{C})=0.6$,则 $P(ABC)=$

(A) 0.4　(B) 0.6　(C) 0.2　(D) 0.7

16. $\int_0^1\ln(x^2+1)\mathrm{d}x=$

(A)$\ln2+2+\frac{\pi}{2}$　(B)$\ln2-2+\frac{\pi}{2}$

(C)$\ln2+2-\frac{\pi}{2}$　(D)$\ln2-2-\frac{\pi}{2}$

17. 设四阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2,则其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩=

(A)2　(B)-2　(C)0　(D)4

18. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2+bx+1})=2$,则 $a+b=$

(A)14　(B)-10　(C)12　(D)-12

19. 设随机变量 X 的概率密度是 $p(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$,其中 $-\infty<x<+\infty$,则 $E(X^2)=$

(A)0　(B)1　(C)-2　(D)2

20. 已知随机变量 $X-N(2,3^2)$,则 $3x-2$ 的数学期望为

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

二、填空题：本大题共 6 个小题，每小题 2 分，共 12 分，请将答案写在答题纸上.

21. 若 a 为实数，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\dfrac{n-1}{n}}\right)=$__________.

22. 设 $z=\dfrac{v}{u}$，$u=\mathrm{e}^x$，$v=1-\mathrm{e}^{2x}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=$__________.

23. 已知 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为可逆矩阵，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 为分块矩阵，则 $\boldsymbol{X}^{-1}=$__________.

24. 齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$ 只有零解，则 λ 应满足的条件为__________.

25. 一射手对同一目标独立地进行四次射击，若至少命中一次的概率为 $\dfrac{80}{81}$，则该射手的命中率为__________.

26. 任何一个连续型随机变量的概率密度函数 $p(x)$ 一定满足__________.

三、计算题：本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分.

27. 求内接于椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，两边平行于坐标轴的最大矩形的面积.

28. 设方程 $x^{2k}+2ax+b=0$（k 是大于 0 的整数）

(1)当 a,b 满足何种关系时，方程有唯一实根；

(2)当 a,b 满足何种关系时，方程无实根.

29. 讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+2\displaystyle\int_1^x\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t-1\quad(x>0)$ 的单调性、极值和凹凸性.

30. 已知线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2\end{cases}$

(1)a,b 为何值时，方程组有解？

(2)方程组有解时，求出方程组的导出组的一个基础解系.

31. 设有三维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(k,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,k,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,k,k^2)$，问 k 取何值时，

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表达式唯一；

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表达式不唯一；

(3) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

32. 甲乙二人下象棋，假定每局比赛甲胜乙的概率为 0.6，乙胜甲的概率为 0.4，问采取五局三胜的比赛规则，甲胜的可能性多大？

33. 已知 $u=(1+xy)^z$，求在点 $(1,2,3)$ 的三个一阶偏导数.

34. 设随机变量 X 服从 $[0,4]$ 上的均匀分布，求 $Y=|X-2|$ 的分布函数及概率密度.

参考答案

一、选择题

1.A　2.D　3.B　4.C　5.B　6.C　7.B　8.A　9.D　10.A　11.D
12.B　13.B　14.B　15.A　16.B　17.C　18.B　19.D　20.D

二、填空题

21. $\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{2}{3}\right)a$　　22. $-\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}$　　23. $\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$

24. $\lambda\neq 1$　　25. $\frac{2}{3}$　　26. $0\leqslant p(x)\leqslant 1$

三、计算题

27. **解:** 如图 1-1 所示内接矩形的面积为

$$S(x)=4xy=4x\,\frac{b}{a}(\sqrt{a^2-x^2})=\frac{4b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$(0\leqslant x\leqslant a)$

$$S'(x)=\frac{4b}{a}\left[\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]=\frac{4b}{a}\cdot\frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\quad(x\neq a)$$

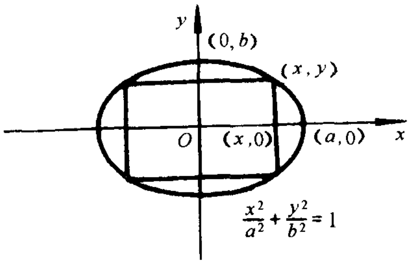


图 1-1

$S'(x)=0$ 的两个根是 $x_1=-\frac{a}{\sqrt{2}}$,

$x_2=\frac{a}{\sqrt{2}}$(x_1 不合题意)

又 $S(0)=0, S(a)=0$,故 $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 时得到最大矩形

面积 $S=2\sqrt{3}ab$.

28. **解:** (1)设 $f(x)=x^{2k}+2ax+b$,

则 $f'(x)=2kx^{2k-1}+2a$

由实系数多项式的性质知,要偶次方多项式 $f(x)$ 有唯一实根,则这个根必定是重根,因此,此根必定也是 $f'(x)$ 的根,而 $f'(x)=0$ 有唯一实根 $x=-\left(\frac{a}{k}\right)^{\frac{1}{2k-1}}$,因此 a,b 满足关系 $\left(\frac{a}{k}\right)^{\frac{2k}{2k-1}}-2a\left(\frac{a}{k}\right)^{\frac{1}{2k-1}}+b=0$.

(2) $f'(x)$ 在 $-\left(\frac{a}{k}\right)^{\frac{1}{2k-1}}$ 的左边小于 0,右边大于 0,因此 $f(x)$ 在 $-\left(\frac{a}{k}\right)^{\frac{1}{2k-1}}$ 处有唯一

的极小值,因此若 $b>-\left(\frac{a}{k}\right)^{\frac{2k}{2k-1}}+2a\left(\frac{a}{k}\right)^{\frac{1}{2k-1}}$,方程无实根 .

29. **解:** $f(x)=\frac{1-2x}{x^2}+1$,

由 $f'(x)=\frac{2(x-1)}{x^3}=0$,解得 $x=1$;又由 $f''(x)=\frac{2(3-2x)}{x^4}=0$,解得 $x=\frac{3}{2}$,

列表讨论如下:

x	$(0,1)$	1	$\left(1,\frac{3}{2}\right)$	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	下凸↘	极小值 0	上凹↗	$\frac{1}{9}$	上凸↗

当 $x=1$ 时,$f(1)=0$ 是极小值;函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{3}{2}$ 左边凹,右边凸;函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调下降,在 $(1,+\infty)$ 单调上升 .

30. **解:** (1)将原方程组的增广矩阵进行初等变换

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&a\\3&2&1&1&-3&0\\0&1&2&2&6&b\\5&4&3&3&-1&2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&a\\0&1&2&2&6&3a\\0&0&0&0&0&b-3a\\0&0&0&0&0&2-2a\end{pmatrix}$$

于是,当 $b-3a=0$ 且 $2-2a=0$,即 $a=1$ 且 $b=3$ 时,$r(A)=r(A)$,故 $a=1,b=3$ 时,方程组有解 .

(2)当 $a=1,b=3$ 时,有

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-5&-2\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

因此,原方程组的同解方程组为 $\begin{cases}x_1-x_3-x_4-5x_5=-2\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3\end{cases}$

导出组的基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

31. **解:** 设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$

得线性方程组 $\begin{cases}kx_1+x_2+x_3=1\\x_1+kx_2+x_3=k\\x_1+x_2+2x_3=k^2\end{cases}$

其系数行列式 $|A|=\begin{vmatrix}k&1&1\\1&k&1\\1&1&2\end{vmatrix}=2k(k-1)$

(1)当 $k\neq 0$ 且 $k\neq 1$ 时，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，方程组有唯一解，即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一地线性表示；

(2)当 $k=1$，则方程组的增广矩阵与系数矩阵有相同的秩，故有无穷多组解，即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表示法不唯一；

(3)当 $k=0$ 时，方程组的增广矩阵与系数矩阵的秩不同，此时方程组无解，即 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

32. **解**:将比赛一次看成一次试验，比赛五局看成五重伯努利试验

设 A 表示事件“甲胜”，则甲获胜的可能结果是：

A_1　3:0（赛三局，甲都胜）

A_2　3:1（赛四局，前三局中甲二胜一负，第四局甲胜）

A_3　3:2（赛五局，前四局中甲二胜二负，第五局甲胜）

则 $A=A_1+A_2+A_3$，于是有

$$
\begin{aligned}
P(A)&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)\\
&=0.6^3+C_3^2\times 0.6^2\times 0.4\times 0.6+C_4^2\times 0.6^2\times 0.4^2\times 0.6\\
&=0.68256
\end{aligned}
$$

33. **解**:$\dfrac{\partial u}{\partial x}=z(1+xy)^{z-1}\cdot y=yz(1+xy)^{z-1}$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=z(1+xy)^{z-1}\cdot x=xz(1+xy)^{z-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=(1+xy)^{z}\cdot\ln(1+xy)$$

$$\therefore\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,2,3)}=2\times 3\times(1+1\times 2)^{3-1}=54$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,2,3)}=1\times 3\times(1+1\times 2)^{3-1}=27$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,2,3)}=(1+1\times 2)^{3}\ln(1+1\times 2)=27\ln 3$$

34. **解**:X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4},0\leqslant x\leqslant 4,\\ 0,其他.\end{cases}$$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $y>2$ 时，$F_Y(y)=1$；当 $0<y<2$ 时，

$$F_Y(y)=P\{|X-2|\leqslant y\}=P\{2-y\leqslant X\leqslant 2+y\}=\frac{1}{2}y$$

故 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0,y<0,\\ \dfrac{1}{2}y,0\leqslant y\leqslant 2,\\ 1,y>2.\end{cases}$$

Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2},0\leqslant y\leqslant 2,\\ 0,其他.\end{cases}$$

模拟试题 2

一、选择题:本大题共 20 个小题,每小题 2 分,共 40 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项正确,请在答题卡上按要求把所选项涂黑.

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{kn}=e^{-3}$,则 $k=$

(A) $\frac{3}{2}$　(B) $\frac{2}{3}$　(C) $-\frac{3}{2}$　(D) $-\frac{2}{3}$

2. 函数 $y=f(x)$在 $x=a$ 点连续是$f(x)$在 $x=a$ 点有极限的

(A) 充分条件　(B) 充要条件　(C) 必要条件　(D) 无关条件

3. 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$,则$[f(0)]'=$

(A) a_n　(B) a_0　(C) $a_0n!$　(D) 0

4. 若曲线 $y=f(x)=x^n$ 上点(1,1)处的切线交 x 轴于$(t,0)$,则 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(t)=$

(A)e　(B)e^{-1}　(C)e^2　(D)e^{-2}

5. $\int_a^x f'(2t)dt=$

(A) $2[f(x)-f(a)]$　(B) $f(2x)-f(2a)$

(C) $2[f(2x)-f(2a)]$　(D) $\frac{1}{2}[f(2x)-f(2a)]$

6. 设 $z=x^3-3x-y$,则它在点(1,0)处

(A) 取得极大值　(B)无极值　(C) 取得极小值　(D) 无法判断

7. 若 $x=\ln\frac{z}{y}$,是$\frac{\partial z}{\partial x}=$

(A) 1　(B) e^x　(C) ye^x　(D) y

8. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异$(n\geqslant2)$,$\boldsymbol{A}^*$是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则

(A) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{A}$　(B) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n+1}\boldsymbol{A}$

(C) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$　(D) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n+2}\boldsymbol{A}$

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵,且$|\boldsymbol{A}|=2$,则$|4\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^*|=$

(A) $4\frac{1}{2}$　(B) 12　(C) 6　(D)108

10. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{ax}=\int_{-\infty}^{a}te^t dt$,则 $a=$

(A) 2　(B) 1　(C)0　(D) -2

11. 函数_______在其定义域内可导

(A) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$　(B) $f(x)=\sqrt{x-1}$

(C) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}(x-1) & x<-1\\ \frac{2}{3}x & x\geqslant 1\end{cases}$ (D) $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\leqslant 0\\ x-1 & x>0\end{cases}$

12. 设在区间$[a, b]$上，$f(x)>0$，$f'(x)<0$，$f''(x)<0$，设 $S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$S_2=f(b)(b-a)$，$S_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$，则

(A) $S_1<S_2<S_3$ (B) $S_1<S_3<S_2$ (C) $S_3<S_1<S_2$ (D) $S_2<S_3<S_1$

13. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，则$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}$为

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

14. 对于任意两事件 A 和 B，则 $P(A-B)=$

(A) $P(A)-P(B)$ (B) $P(A)-P(B)+P(AB)$

(C) $P(A)-P(AB)$ (D) $P(A)+P(\bar{B})-P(A\bar{B})$

15. 设 A、B 为两个随机事件，且 $P(A)=0.4$，$P(A+B)=0.7$，A、B 互不相容，则 $P(B)=$

(A) 0.7 (B) 0.3 (C) 0.5 (D) 0.6

16. 若 $\int_0^a x(2-3x)\mathrm{d}x=2$，则 $a=$

(A)1 (B)-1 (C)2 (D)-2

17. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则行列式$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*|=$

(A)$|\boldsymbol{A}|$ (B)$|\boldsymbol{A}|^{-1}$ (C)$|\boldsymbol{A}|^{n}$ (D)$|\boldsymbol{A}|^{-n}$

18. 已知曲线 $y=x^3+3x^2-5$，则曲线平行于直线 $-9x+y=-1$ 的切线的切点坐标为

(A)$(-3,-5)$和$(1,-1)$ (B)$(3,-5)$和$(1,-1)$

(C)$(3,5)$和$(1,-1)$ (D)$(-3,-5)$和$(1,1)$

19. 若随机变量 $X\sim p(x)$，且 $p(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1\\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2\\ 0, & 其他\end{cases}$

则 $p\{x\leqslant 1.5\}=$

(A)$\int_0^{0.5}(2-x)\mathrm{d}x$ (B)$\int_1^{1.5}(2-x)\mathrm{d}x$

(C)$\int_{-\infty}^{1.5}(2-x)\mathrm{d}x$ (D)0.875

20. 在下列函数中，可以作为某个随机变量的分布函数的是

(A)$F(x)=\frac{1}{1+x^2}$ (B)$F(x)=\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}x+\frac{1}{2}$

(C)$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-x}), & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$ (D)$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$，其中$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=1$

二、填空题：本大题共6个小题，每小题2分，共12分，请将答案写在答题纸上.

21. 设 $f(x)=ax+b$，当 $a=$__________，b 为任意时，$f[f(x)]=x$.

22. $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{\mathrm{d}x}{e^{x}-e^{-x}}=$__________.

23. 设 $z=x^{2}\ln(y+1)$，则$\frac{\partial^{2}z}{\partial x\partial y}=$__________.

24. 已知 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，则$[\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}](\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=$__________.

25. 已知3阶方阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}\begin{bmatrix}3&2&1\\2&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-2\\1&-2&1\end{bmatrix}$ 则 $\boldsymbol{X}=$__________.

26. 设随机变量 X 的概率密度为$f(x)=\frac{A}{e^{x}+e^{-x}}$，$-\infty<x<+\infty$，则常数 $A=$__________.

三、计算题：本大题共8小题，每小题6分，共48分.

27. 设函数 $x=f(y)$的反函数 $y=f^{-1}(x)$及 $f'[f^{-1}(x)]$，$f''[f^{-1}(x)]$均存在，且 $f'[f^{-1}(x)]\neq 0$，求$\frac{d^{2}f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x^{2}}$.

28. 已知曲线 $y=a\sqrt{x}(a>0)$ 与曲线 $y=\ln\sqrt{x}$，在点$(x_0,\ y_0)$ 处有公共切线
求(1) 常数 a 的值及切点$(x_0,\ y_0)$；
(2) 两曲线与 x 轴围成的平面图形面积.

29. p、q 为大于1的常数，且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，求证对于 $x>0$，有 $\frac{1}{p}x^{p}+\frac{1}{q}\geqslant x$.

30. 设方程组$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1\\2x_1+(a+2)x_2-(b+2)x_3=3\\-3ax_2+(a+2b)x_3=-3\end{cases}$
其中 a，b 为非零常数，试讨论方程组解的情况.

31. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$($\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵)，$|\boldsymbol{A}|<1$，求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

32. 设 $\boldsymbol{A}$ 是$m\times n$ 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是$n\times m$ 阶矩阵，$\boldsymbol{E}$ 是n 阶单位阵($m>n$).已知 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，试判断 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组是否线性相关？为什么？

33. 设10件产品中有4件不合格，从中任取2件，已知所取的2件中有1件是不合格品，求另1件也是不合格品的概率.

34. 袋中有2个红球和3个绿球，n 个人轮流摸球，每个人摸出2个球，然后将球放回袋中，让下一个人摸，求 n 个人总共摸到红球的数学期望。

参考答案

一、选择题

1.C 2.A 3.D 4.B 5.D 6.B 7.C 8.C 9.D 10.A 11.A
12.D 13.C 14.C 15.B 16.B 17.C 18.A 19.D 20.B

二、填空题

21. -1 22. $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$ 23. $\frac{2x}{y+1}$

24. $2E$ 25. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix}$ 26. $\frac{2}{\pi}$

三、计算题

27. **解**：$\because f'[f^{-1}(x)]\neq 0$，$\therefore$ 由反函数导数公式得：

$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}x}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

$$\frac{d^2f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}\right\}=\frac{-\{f'[f^{-1}(x)]\}^1}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^2}$$

$$=\frac{-f''[f^{-1}(x)]\cdot[f^{-1}(x)]^1}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^2}$$

$$=\frac{-f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^2}\cdot\frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}=\frac{-f''[f^{-1}(x)]}{\{f^{-1}[f^{-1}(x)]\}^3}$$

28. **解**：画出示意图(如图 2-1)

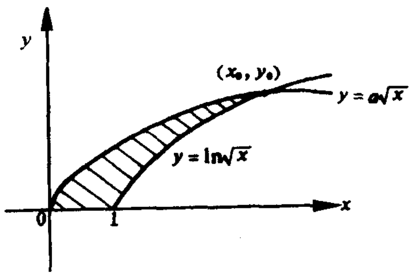


图 2-1

(1) $y'=(a\sqrt{x})'=\frac{a}{2\sqrt{x}}$

$y'=(\ln\sqrt{x})'=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2x}$

由题意得方程组$\begin{cases}\frac{a}{2\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2x_0}\\ a\sqrt{x_0}=\ln\sqrt{x_0}\end{cases}$

得 $x_0=e^2$，$y_0=1$，$a=\frac{1}{e}$ 即 $a=\frac{1}{e}$，切点为 $(e^2, 1)$

(2) $S=\int_0^{e^2}\frac{1}{e}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x-\int_1^{e^2}\ln\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3e}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{e^2}-\int_1^{e^2}\ln\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

$$\xlongequal{u=\ln\sqrt{x}} \frac{2}{3}e^2-\int_0^1 2ue^{2u}du=\frac{2}{3}e^2-ue^{2u}\Big|_0^1+\frac{1}{2}e^{2u}\Big|_0^1=\frac{1}{6}e^2-\frac{1}{2}$$

29. **解**；设 $f(x)=\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}-x$，$f'(x)=x^{p-1}-1$

$x=1$ 时 $f'(x)=0$，$f''(x)=(p-1)x^{p-2}$

$\because p>1 \quad \therefore f''(x)$恒大于零

$\therefore x=1$ 时 $f(x)$取最小值

即 $f(x)\geqslant f(1)=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1=0$

$\therefore f(x)\geqslant 0$ 　即 $\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}\geqslant x$

30. **解**：$(\widetilde{A})=\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\2&a+2&-b-2&3\\0&-3a&a+2b&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&a&-b&1\\0&-3a&a+2b&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&a&-b&1\\0&0&a-b&0\end{bmatrix}$

(1) 当 $a=b$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\widetilde{\boldsymbol{A}})=2<3$，方程组有无穷多解，

有同解方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=x_3+1\\ax_2=ax_3+1\end{cases}$ 取 $x_3=0$

即有特解 $\boldsymbol{\eta}_0=\left(1-\frac{1}{a},\frac{1}{a},0\right)^T$

相应齐次方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=x_3\\ax_2=ax_3\end{cases}$ 它的基础解系为$(0,1,1)^T$

所以全部解为 $\begin{bmatrix}1-\frac{1}{a}\\\frac{1}{a}\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ （c 为任意实数）

(2) 当 $a\neq b$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\widetilde{\boldsymbol{A}})=3$，有唯一解，显然 $x_3=0$

另：$\begin{cases}x_1+x_2=1\\ax_2=1\end{cases}$ 得$\begin{cases}x_1=1-\frac{1}{a}\\x_2=\frac{1}{a}\end{cases}$ 所以唯一解为$\left(1-\frac{1}{a},\frac{1}{a},0\right)^T$

31. **解法一**：$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^T|=|\boldsymbol{A}||(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^T|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|$

$\therefore (1-|\boldsymbol{A}|)|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0 \quad \because |\boldsymbol{A}|<1 \quad \therefore (1-|\boldsymbol{A}|)\neq 0 \quad \therefore |\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$

解法二：$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|\cdot|\boldsymbol{A}^T|=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{A}^T|=|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^T|=|(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^T|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$

$\therefore |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|(1-|\boldsymbol{A}^T|)=0$ 　又 $|\boldsymbol{A}^T|=|\boldsymbol{A}|<1 \quad \therefore |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$

32. **解**：设 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2\cdots\boldsymbol{\alpha}_n]$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 m 维列向量，并设存在数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{O}$（$\boldsymbol{O}$ 表示零向量）

即 $[\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2\cdots\boldsymbol{\alpha}_n][k_1k_2\cdots k_n]^T=\boldsymbol{O}$，或 $\boldsymbol{A}[k_1,k_2\cdots k_n]^T=\boldsymbol{O}$，

$\because \boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，$\therefore$ 上式左乘矩阵 $\boldsymbol{B}$，得$[k_1,k_2,\cdots,k_n]^T=\boldsymbol{O}$，

即 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$. 因此，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关 .

33. **解**：由题意设 A_0、A_1、A_2分别表示所取的两件产品中不合格品的件数为 0，1，2