

高等学校教学用书

矢算概論

И. А. 高里德凡著

高等教育出版社

高等学校教学用书



矢 算 概 論

И. А. 高里德凡著
卜 元 震 譯

高等教育出版社

本書系根据苏联国营技术理論書籍出版社 (Гостехиздат) 出版的高里德凡 (И. А. Гольдфайн) 所著“矢算概論” (Элементы векторного исчисления) 1948 年第二版譯出的。原書經苏联高等教育部审定为高等工業学校教学参考用書。

本書原由商务印書館出版, 自 1957 年 4 月起改由本社出版。

矢 算 概 論

И. А. 高里德凡著

卜元震譯

高等教育出版社出版 北京琉璃廠 170 号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第 054 号)

商务印書館上海厂印刷 新华書店总經售

群

統一書号 13010·305 开本 850×1168 1/32 印張 4 14/16 字數 118,000 印數 4,301—6,300

1957 年 4 月新 1 版 1958 年 3 月上海第 3 次印刷 定价 (8) 羊 0.60

目 錄

序言

第一篇 矢量代数

第一章 矢量的加法与減法	7
1. 数量	7
2. 矢量	7
3. 矢量加法	9
4. 几何和的性質	11
5. 矢量減法	12
6. 用数量乘矢量的乘法	13
7. 共綫矢量	14
8. 單位矢量	15
9. 共面矢量	15
10. 矢量的分量及射影	17
11. 射影法	22
12. 射影的性質	25
13. 点的矢徑	26
第二章 矢量的乘積	29
1. 两个矢量的数性積	29
2. 数性積在力学上的意义	29
3. 数性積的性質	30
4. 用矢量的射影表示数性積	33
5. 两个矢量的矢性積	35
6. 矢性積在物理与力学上的意义	36
7. 矢性積的性質	38
8. 用矢量的射影表示矢性積	42
9. 三个矢量的乘積	44
10. 数量矢性積	44
11. 二重矢性積	46
12. 关于矢量方程式的概念	48
13. 極矢和軸矢	49

第二篇 矢量分析

第三章 变矢	51
1. 关联数量变元的变矢	51
2. 矢量对于数性变元的導数	53
3. 矢量的導数的力学意义	55
4. 矢量的微分規則	56
5. 單位矢的導数	57
6. 矢量的導数在两个方向的分解	58
7. 矢量的微分	59
8. 矢性函数的定積分和不定積分	60
9. 面積矢	60
10. 微分几何上的应用	65
11. 加速度矢分解为切綫分量和法綫分量	77
第四章 場論	79
1. 引言	79
2. 数量場	79
3. 数量場的等值面和梯度	80
4. 梯度的性質	86
5. 矢量場	90
6. 矢流	92
7. 矢量的散度	97
8. 高斯-奧斯特洛格拉特斯基定理	98
9. 用矢量的射影表示它的散度	101
10. 散度的性質	104
11. 矢量的綫積分与环流	108
12. 矢量的旋度	115
13. 用矢量的射影表示旋度	119
14. 矢量的旋度的性質	121
15. 史托克司定理	125
16. 位矢場	128
17. 漢弥尔登算子	132
第五章 調和函数	135
1. 格林公式与調和函数	135
2. 調和函数的性質	138
3. 格林函数	143
4. 狄里赫立問題在球內的解 卜受桑積分	145
附 錄 曲綫座标	149

序 言

作者过去几年在全苏函授工业学院动力系教学，本书是将当时的讲义经修改而成，内容有矢量代数、矢量分析以及动力学院的学生所要求的基本概念，但是在任何专业的技术大学中，当学习解析几何和分析的适当的各章时，也是有用的。

在这教材中，所叙述的内容是相当广的，所有的定理都经详细证明，而且强调矢量固有的特征。在叙述场论的初步时，特别注意说明它的物理意义。基本定理的证明是几何的形式而强调它们的物理意义。

本书第一次是由全苏函授工业学院出版。在本版，除去无关重要的文字修改外，有下面几点的更改。在“矢量代数”部分增加矢量形式的比屋萨伐定律，在场论部分中，按照新的方式叙述矢量的旋度，并且增加调和函数和曲线坐标两章，对于这些增补部分，我们并不想叙述得很完善，而主要的目的是引起读者从实用的观点来注意这些重要的数学部分，要进一步认识这几章的内容，介绍读者去读书末所列的书籍。

II. 高里德凡。

第一篇 矢量代数

第一章 矢量的加法与减法

1. 数量 某些物理量基本上由其对应度量系统所测得的数值决定,例如物体的体积由其所含单位立方数决定,温度由度数决定,电量由库伦来测定等等。

基本上由数值决定的量称为数量。

数量可为正量或负量,例如温度高于零度是正,而低于零度是负,电量同样有正有负。但是有些数量(体积、质量)则恒为正。数量是代数量,并且对它们可施行任何代数运算:加減乘除等。

2. 矢量 某些物理量的确定,除了知道它们的数值外,还必须指出它们的方向。例如只说有 5 kg 的力是不充分的,还须要指出力的作用方向,对于速度、加速度等等,也是同样情形。

除了数值,还具有方向的量称为矢量,简称矢。

在几何上,我们用具有箭头的线段表示矢量(圖 1)。箭头指出矢量的方向,而且在选定的比例尺下,线段的长度是表示矢量的数值。

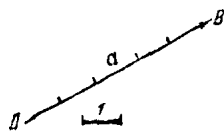


圖 1.

一般用 a, b, c (开始的三个拉丁字母,用闊版鉛字印刷),或者用 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (上面帶有短划的拉丁字母,用普通鉛字印刷)表示矢量,或者也可以用 $\overline{AB}$ 表示矢量,其中 A 是始点, B 是終点。

以后主要采用第一种方法表示矢量。

矢量的数值,取正号的,叫做矢量的長或模,或绝对值,用 $|a|$

或 a (普通鉛字) 或 $|\vec{a}|$ 來表示它; 矢量的模是正數量。

註: 我們應用記号時, 對於表示量的字母必須極端注意, 用闊版鉛字印刷的字母是表示矢量, 用普通鉛字印刷的字母是表示數量; 其中矢量與它的模, 用同一字母表示, 所不同的是用對應的闊版與普通鉛字印刷。

置有矢量的直線稱為**矢量荷載者**。

在講到矢量運算之前, 我們先介紹下列的定義:

定義 1. 如果矢量的長(模)等於零, 那麼這矢量就等於零。

這樣的矢量也稱為零矢, 零矢的始點與它的終點相重合, 而矢量本身變為一點。

定義 2. 如果兩個矢量有等模、平行而且同向, 那麼這兩個矢量是彼此幾何相等。

因此, 例如矢量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ (圖 2) 就是幾何相等:

$$\vec{a} = \vec{b}$$

矢量 $\vec{a}$ 與 $\vec{c}$ (圖 2) 却不幾何相等, 因為雖然它們的模相等, 但是它們的方向不同。因此從兩個矢量模的相等還不能得出矢量本身的幾何相等。

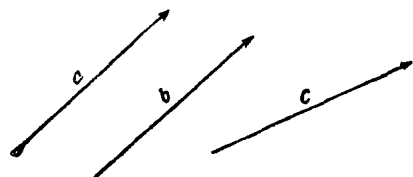


圖 2.

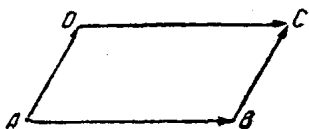


圖 2a.

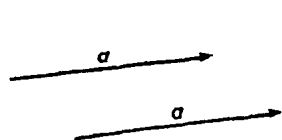


圖 2b.

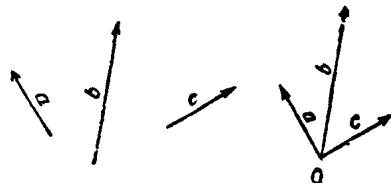


圖 2c.

平行四边形的对边是几何相等的矢量(圖 2a):

$$\overline{AB} = \overline{DC} \quad \text{及} \quad \overline{AD} = \overline{BC}.$$

以后我們对几何相等的矢量不加区别, 并且用同一符号来表示它們(圖 2b)。

由此推得, 矢量可以平行移动到任意一点, 因而当研究几个矢量时, 我們总可以將它們的始点移到一点 O (圖 2c)。而把这一点看作它們的公共始点, 这种情形, 我們以后將常常用到。

我們必須注意, 當我們采納这些定义时, 不能將力与矢量同样看待, 因为力的作用点只能沿着力的作用綫移动, 而不能移向任意点。

註: 兩矢量的几何相等就意味着它們具有同一数值, 平行而且同指向。因此几何相等, 按照它的性質來說, 与一般代数相等是截然不同的。虽然如此, 几何相等一如代数相等亦用符号 $=$ 表示。它們的区别如下: 所給等式是几何相等或是代数相等, 就視等式兩边是矢量还是数量。

同样, 我們指出, 大小的概念只能应用于数量, 因此只有矢量的模才能適用不等式。

3. 矢量加法 假設我們有几个矢量, 例如四个矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 和 $\mathbf{d}$ (圖 3)。

这些矢量的几何和可了解为矢量 $\mathbf{e}$, 它的作法如下:

取任意点 O , 作与矢量 $\mathbf{a}$ 几何相等的矢量 $\overline{OA}$; 再以得到的 A 点做始点; 作与矢量 $\mathbf{b}$ 几何相等的矢量 $\overline{AB}$, 余类推(圖 3)。这样的作圖法直至取尽所有的矢量为止, 在已知的情況就是取尽矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ 。結果就得到折綫 $OABCD$ 。这折綫的封閉綫 OD 就是所求的几何和。

$$\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} \quad (\text{多边形規則})$$

或

$$\mathbf{e} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}.$$

其中，两个矢量的几何和(圖 3a)，就是由这两个矢量所構成的平行四边形的对綫(平行四边形規則)；不在一个平面上的三个矢量的几何和，就是由它們所組成的平行六面体的对綫(圖 3b)。

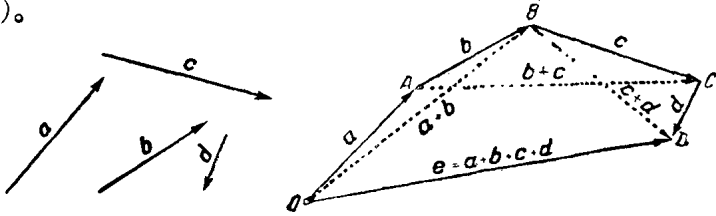


圖 3.

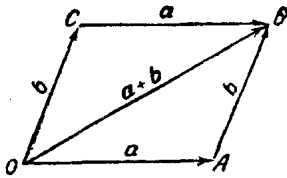


圖 3a.

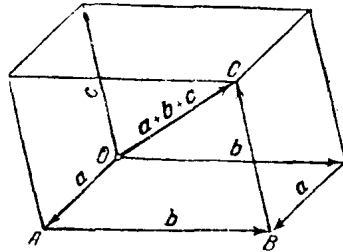


圖 3b.

因为折綫的封閉綫小于或等于折綫的周界，所以几何和的模小于或等于各項矢量的模的算術和：

$$|a+b+c+d| \leq |a| + |b| + |c| + |d|$$

如果在作圖时，各項矢量構成封閉多边形，那么几何和就等于零。这可以从定义 1 直接得出。因此，如果三个矢量 a, b, c 的几何和等于零，那么它們就可以構成三角形(圖 4)。

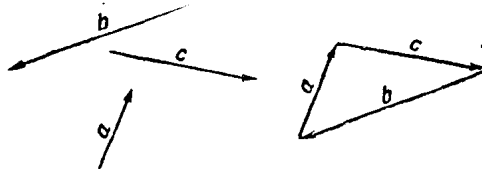


圖 4.

問題 1. 設四边形的对角綫互相平分, 証明它是平行四边形(圖 5)。

解 按照已知条件可得矢量等式:
 $\overline{AO} = \overline{OC}$, $\overline{BO} = \overline{OD}$, 由此可知 $\overline{AO} + \overline{OD} = \overline{BO} + \overline{OC}$, 或 $\overline{AD} = \overline{BC}$ 。

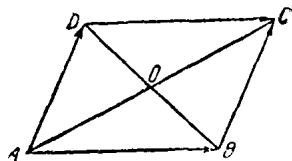


圖 5.

这就是說, AD 与 BC 相等而且平行, 亦即四边形 $ABCD$ 是平行四边形。

註: 各項矢量可以不在一个面上。这样我們的敘述仍旧正确, 不必作任何改变, 在这样情况, 所得折綫不过是空間折綫而已; 圖 3b 就是这种情形。

4. 几何和的性質 1° 几何和与各項的次序无关。

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \text{ (交換律)}.$$

其实从圖 3a 可以得到:

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad \text{及} \quad \overline{OB} = \overline{OC} + \overline{CB} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

即是

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

2° 在矢量几何相加时, 各項矢量可以結合成个别的組合。

例如,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) + \mathbf{d}$$

(結合律)。

实际上, 从圖 3 可得:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overline{OB} \quad \text{及} \quad \mathbf{c} + \mathbf{d} = \overline{BD}.$$

由此,

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \overline{OB} + \overline{BD} = \overline{OD} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}.$$

同样,

$$\mathbf{b} + \mathbf{c} = \overline{AC},$$

因此

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) + \mathbf{d} = \overline{OA} + \overline{AC} + \overline{CD} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d},$$

証訖。

5. 矢量減法 所謂兩個矢量 a 和 b 的幾何差是指這樣的一個新的矢量而言, 它与矢量 b (減數) 的和等于矢量 a (被減數), 也就是說, 如果 $a - b = c$ (圖 6), 即得:

$$a = b + c.$$

由此可得矢量差 c 的如下的作圖法:

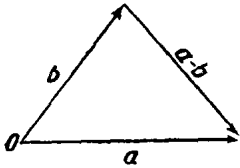


圖 6.

將 a, b 兩個矢量取共同始點 O , 从矢量 b 的終點到矢量 a 的終點引一矢量, 即得所求矢量差 c (圖 6)。

幾何差的模大于或等于模的差:

$$|a - b| \geq |a| - |b|.$$

因为任意三角形的一边大于其他兩边的差。

在平行四边形中, 有一个对角綫是平行四边形兩边的几何和; 而另一对角綫就是幾何差(圖 6a)。所以兩個矢量的幾何差的模可以大于它們几何和的模(圖 6b)。

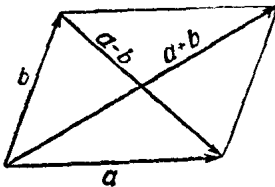


圖 6a.

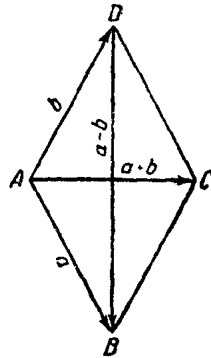


圖 6b.

定义 与矢量 a 相逆的矢量称为逆矢量 ($-a$), 它平行于矢量 a , 而且同模, 但是指向相反(圖 7)。

从逆矢量的定义可以得到:

$$a + (-a) = 0.$$

定理 为要減去矢量 b , 則与逆矢量 ($-b$) 相加即可:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}).$$

証 設 $\overline{OB} = \mathbf{b}$, $\overline{AC} = (-\mathbf{b})$, $\overline{OA} = \mathbf{a}$ (圖 7a)。

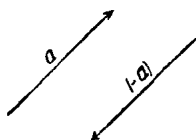


圖 7.

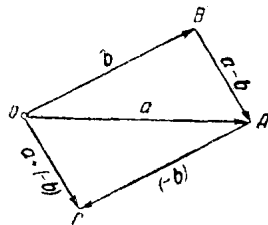


圖 7a.

当四边形 $OBAC$ 的对边 OB 与 AC 相等且平行时, 也就是說我們的四边形是平行四边形。因此,

$$\overline{BA} = \overline{OC}, \quad \text{但} \quad \overline{BA} = \mathbf{a} - \mathbf{b}, \quad \overline{OC} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}),$$

即是

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}),$$

故定理証訖。

从这个定理可以得到一个結論, 就是矢量与代数中的数完全相当; 特别是在几何等式中, 可以將个别項易号后, 从等式一端移到另外一端。例如, 如果

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{d} \quad \text{則} \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{d} - \mathbf{c}.$$

6. 用数量乘矢量的乘法 設有矢量 $\mathbf{a}$ 与数量 m 。当以数量 m 乘矢量 $\mathbf{a}$ 时, 矢量 $\mathbf{a}$ 的模改变 m 倍, 而它的指向保持不变, 或者变成反指向是决定于 m 的正負。在这样的运算以后, 可以得到新的矢量 $m\mathbf{a}$, 称为数量 m 乘矢量 $\mathbf{a}$ 的乘積 (圖 8)。我們可以得到:

$$|m\mathbf{a}| = |m| \cdot |\mathbf{a}|,$$

其中 $|m|$ 是 m 的絕對值。圖 8a 所表示的, 是矢量 $3\mathbf{a}$ 与 $-\frac{1}{2}\mathbf{a}$, 它們是以

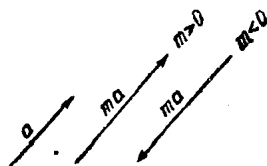


圖 8.

数量 3 及 $-\frac{1}{2}$ 乘矢量 $\mathbf{a}$ 而得到的。

用 -1 乘矢量 $\mathbf{a}$, 我們可以得到逆矢量 $(-\mathbf{a})$ 。

$$-1 \cdot \mathbf{a} = (-\mathbf{a}).$$

用数量乘矢量的乘積適合分配律

$$m(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = m\mathbf{a} + m\mathbf{b}.$$

亦即好像在普通代数中一样, 可以去括号。

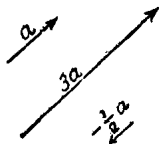


圖 8a.

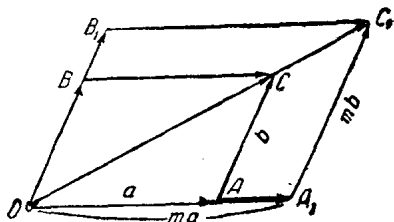


圖 8b.

实际上, 我們有:

$$\begin{aligned} \overline{OA} &= \mathbf{a}, & \overline{OA_1} &= m\mathbf{a}, \\ \overline{AC} &= \mathbf{b}, & \overline{A_1C_1} &= m\mathbf{b}. \end{aligned}$$

由此

$$OA_1 = mOA \quad \text{及} \quad A_1C_1 = mAC,$$

亦即三角形 OA_1C_1 与 OAC 相似, 因此可得:

$$OC_1 = mOC,$$

因而我們可得矢量等式:

$$\overline{OC_1} = m \overline{OC}.$$

所以

$$m\mathbf{a} + m\mathbf{b} = m(\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

7. 共綫矢量 位于平行綫上的矢量称为共綫矢量。

矢量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ (圖 9) 彼此共綫。它們可以同指向, 也可以反指向。

根据数量乘矢量的乘積的定义, 矢量 $\mathbf{a}$ 和矢量 $m\mathbf{a}$ 共綫。反之, 如果矢量 $\mathbf{a}$ 和矢量 $\mathbf{b}$ 共綫,

那么其中的一个, 例如 $\mathbf{b}$, 是用某数量 m 乘另外一个矢量 $\mathbf{a}$ 的乘積。其实, 先假設共綫矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 同指向 (圖 9a)。用 m 表示它們模的比例。

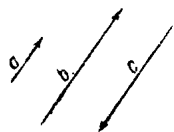


圖 9.

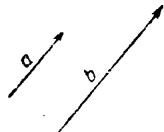


圖 9a.

$$m = \frac{b}{a}.$$

那么矢量 $m\mathbf{a}$ 和矢量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 同方向; 而且它的模等于:

$$\frac{b}{a} \cdot |\mathbf{a}| = b = |\mathbf{b}|.$$

因此, $\mathbf{b}$ 与 $m\mathbf{a}$ 同模同方向, 亦即它們互相几何相等, 而这正意味着 $\mathbf{b} = m\mathbf{a}$ 。如果 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 反方向, 那么数量乘数 m 应当是 $-\frac{b}{a}$, 而我們的論述仍旧正确。

8. 單位矢量 現在我們來考察空間任意矢量 $\mathbf{a}$ 。如 $\mathbf{a}^0$ 是与 $\mathbf{a}$ 同方向, 但是它的模等于一單位: $|\mathbf{a}^0| = 1$, 那么, 就称 $\mathbf{a}^0$ 为在矢量 $\mathbf{a}$ 方向上的單位矢量 (圖 10)。我們有:

$$\mathbf{a} = a \cdot \mathbf{a}^0 (a \text{ 是矢量 } \mathbf{a} \text{ 的模}),$$

因为矢量 $a \cdot \mathbf{a}^0$ 是以矢量 $\mathbf{a}$ 的方向为方向, 而且它的模等于

$$|a \cdot \mathbf{a}^0| = a |\mathbf{a}^0| = a.$$

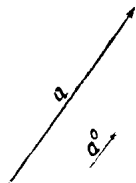


圖 10.

單位矢量可以确定空間的方向; 任何矢量 $\mathbf{a}$ 可以用矢量 $\mathbf{a}$ 的模乘对应單位矢量 $\mathbf{a}^0$ 的乘積表示。

9. 共面矢量 位于同一平面的矢量称为共面矢量, 而且預先

假定它們有公共始点 O 。

設 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 兩矢量不共綫，那么矢量 $\mathbf{c} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$ 位于 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的平面內 (m 与 n 是任意数量乘数)。例如在圖 11 a 中給出 $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ 及 $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ 的作法。因此，矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 共面。

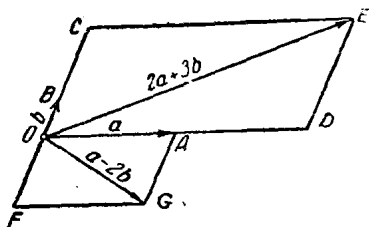


圖 11 a.

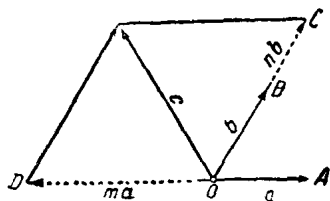


圖 11 b.

反之，如果三矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面，那么总能找得兩数量 m 与 n ，使

$$\mathbf{c} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b}.$$

在圖 11 b 的情形， $m = -\frac{OD}{OA}$ ； $n = \frac{OC}{OB}$ 。

空間任意矢量 $\mathbf{d}$ 可以用下式表示：

$$\mathbf{d} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b} + p\mathbf{c},$$

其中 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 是預先給出的三个不共面的矢量，而 m, n, p 是数量，亦即空間任意矢量可分解为三个平行于已知矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 的組成矢量(圖 12)。

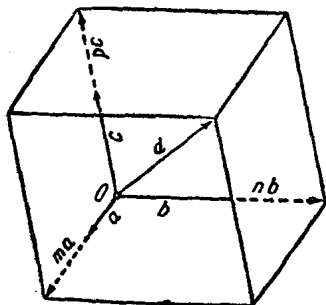


圖 12.

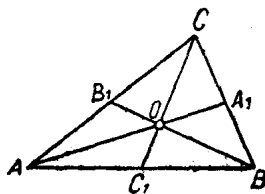


圖 13.