2003年研究生入学考试应试指导丛书

2003年研究生入学考试

数 学 模 拟 试 卷

（工学类）

主　编　邵士敏

撰稿人　邵士敏　娄元仁　文　丽
　　　　周建莹　庄大蔚　张立昂

北 京 大 学 出 版 社

北　　京

图书在版编目(CIP)数据

2003年研究生入学考试数学模拟试卷·工学类/邵士敏主编. —北京:北京大学出版社,2002.5

(2003年研究生入学考试应试指导丛书)

ISBN 7-301-04477-1

Ⅰ.2... Ⅱ.邵... Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-试题 Ⅳ.013-44

书　　名:2003年研究生入学考试数学模拟试卷(工学类)
著作责任者:邵士敏
责 任 编 辑:刘金海
标 准 书 号:ISBN 7-301-04477-1/G·561
出　版　者:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址:http://cbs.pku.edu.cn
电　　话:出版部 62752015　发行部 62754140　编辑部 62752027
电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者:北京飞达印刷厂
发　行　者:北京大学出版社
经　销　者:新华书店
787毫米×1092毫米　16开本　11印张　275千字
2002年6月第三版　2002年6月第一次印刷
定　　价:15.50元

出版前言

由北京大学研究生院策划、北京大学出版社出版的《2003年研究生入学考试应试指导丛书》包括公共课系列、法律硕士联考系列、MBA联考系列、MPA联考系列和经济管理硕士系列共三十余部。该套丛书是为了帮助有志于攻读硕士研究生的广大考生能在较短的时间内全面地、系统地复习有关的课程内容，而编写的一套题量大、题型齐全、覆盖面广、难度及认知层次分布合理的系列丛书。本套丛书的总体设计是在北京大学研究生院的有关方面专家指导下，在大量的调查和研究的基础上，根据国家教育部最近制定的“全国硕士研究生入学考试各科考试大纲”的有关要求，并结合作者多年参加有关考试的命题、阅卷及辅导的经验进行的。

本套丛书有如下几个特点：

一、本套丛书作者阵容强大

作者皆为北京大学、清华大学、对外经贸大学、中国科技大学等考研辅导名师。他们都多年从事研究生入学考试的阅卷、辅导及教学工作，有些还是原研究生入学考试命题组成员，对研究生入学考试有相当丰富的经验。他们所编写的辅导书和所教授的辅导课在历年研究生入学考试的考生中都有相当大的影响。

二、体系明晰、内容精练

应试指导丛书的每一章或每一部分都由以下几项内容构成：

(一) *考试要求*。编写该部分的目的是使广大考生明确每一章或每一部分考的内容是什么，掌握到什么程度就可以了。在编写过程中，根据作者多年来参加有关命题的经验把考试大纲所要求的内容加以细化、归纳和总结，使广大考生能够正确地把握考试要求，这是区别于其他研究生入学考试辅导书的一大特点。

(二) *重要定义、定理及公式*。该部分根据考试大纲的要求将概念、定理和公式(数学类)方法进行了简明扼要的叙述、归纳和总结；精选了各种典型的例题并作详细的解答，使得考生能在较短的时间内对重点、难点、疑点问题进行复习，全面、系统地掌握所需要的知识，在考试时能够拿得出、用得上。

(三) *典型例题分析*。该部分根据考试大纲要求的题型进行了分类，归纳总结了各种题型解题的方法及技巧，开阔了考生的解题思路，使所学的知识能够融会贯通，并迅速提高考生的综合解题能力。

(四) *自测练习题*。每一章或每一部分的最后都精选了适量的练习题，全部习题都附有答案或提示。这些题目作为考生巩固所学知识、复习有关内容时使用，有利于提高考生分析问题和解决问题的能力。

本套丛书模拟试卷由两部分组成：一是为了检查前一阶段考生复习效果、更好地提高考生的应试能力而设计编制的全真模拟试卷及其参考答案；二是近几年考研试题及解答。作者是在深入研究了历年考研试卷的结构、知识点及难度的分布，并紧密结合他们的命题实践、阅卷过程中的常见问题及在全国各大城市“考研辅导班”辅导的经验来编好每一道题。因此，每一份试卷都从不同角度选择了具有多种风格的题目，基本上涵盖了全部命题思路，能够达到实际考试效果。这样，有利于广大考生检验自己复习的效果，更加全面地、系统地掌握所需知识，迅速地提高综合解题能力。

我们认为，这套丛书的出版，必将有助于硕士研究生入学考试应试者开拓思路，提高其分析问题、解决问题的能力，以便考出好成绩。

北京大学出版社

2002年5月于北京大学

前　言

为了帮助参加研究生入学数学考试的考生复习和应考，我们按照教育部制定的全国工学硕士研究生入学考试数学考试大纲的要求，编写了这本模拟试题.

本书对Ⅰ类、Ⅱ类(工学类)数学，每类选编了12套题，共提供了24套模拟试题及解答，每套题中各部分所占比例及题型结构均按大纲的要求编排，题目内容基本上覆盖了大纲的要求.

在编写过程中，我们研究了数学考试大纲中对各部分要求的深度，使选编的题尽量符合大纲要求的深度. 为了使"模拟试题"更接近实战的需要，我们还参考了近几年的试题，并且在选题时，既注意选编一些基本题，也选一些较难的、综合性的、需要经过思考的题，以便提高考生的解题能力，使他们能较顺利地应考并进一步得到提高. 本书中的概念、符号等均采用一般教科书的习惯用法，书中就不另作说明.

由于时间仓促，难免有疏误之处，诚望广大考生及众读者提供宝贵意见。

编　者

2002年4月于北京大学

目　　录

数学Ⅰ 模拟试题

数学Ⅰ按大纲要求，内容主要有：

1. 高等数学：函数、极限、连续，一元函数微分学，一元函数积分学，向量代数和空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数，常微分方程.

2. 线性代数：行列式，矩阵，向量，线性方程组，矩阵的特征值和特征向量，二次型.

3. 概率论与数理统计初步：随机事件和概率，随机变量及其概率分布，二维随机变量及其概率分布，随机变量的数字特征，大数定律和中心极限定理，数理统计的基本概念，参数估计，假设检验.

试卷结构：

1. 内容比例：高等数学，约 60%；线性代数，约 20%；概率论与数理统计初步，约 20%.

2. 题型比例：填空题与选择题，约 30%；解答题(包括证明题)，约 70%.

数学Ⅰ　第1套题

一　填空题(每小题3分,共15分)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n n\sin\dfrac{2}{n}=$________.

(2) 设函数$f(x)$有连续的导函数,$F(x)$是$f(x)$的一个原函数,且$F(0)=1$,$F(2)=F'(2)=3$. 则$\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x=$________.

(3) 微分方程$yy''+y'^2=0$满足初始条件$y(0)=1$,$y'(0)=\dfrac{1}{2}$的特解是________.

(4) 已知实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$经正交变换$x=Py$可化成标准形$\varphi(y_1,y_2,y_3)=6y_1^2$,则$a=$________.

(5) 设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}3x^2 & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

则当$a=$________时,$P(X\geqslant a)=0.5$.

二　选择题(每小题3分,共15分)

(1) 设$y=f(x)$是方程$y''-y'+5y=0$的一个解. 若$f(x_0)<0$,$f'(x_0)=0$,则函数$f(x)$在点x_0(　　).

(A) 取极大值　　(B) 取极小值　　(C) 附近递增　　(D) 附近递减

(2) 考察二元函数$f(x,y)$的下列4条性质:

① $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续

② $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的两个偏导数连续

③ $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微

④ $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的两个偏导数存在

若用"$P\Rightarrow Q$"表示由性质P可推出性质Q,则有(　　).

(A) ②⇒③⇒①　　(B) ③⇒②⇒①　　(C) ③⇒④⇒①　　(D) ③⇒①⇒④

(3) 设$u_n\neq0(n=1,2,3,\cdots)$,且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$(　　).

(A) 发散　　(B) 绝对收敛

(C) 条件收敛　　(D) 在所给条件下不能判定收敛性

(4) 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

则A的三个特征值是(　　).

(A) $0,\ 1,\ 2$　　(B) $-1,\ -\sqrt{2},\ \sqrt{2}$

(C) $1,\ \sqrt{2},\ -\sqrt{2}$　　(D) $1,\ -1,\ \sqrt{2}$

(5) 已知随机事件 A 和 B 发生的概率分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$，A 和 B 至少有一个发生的概率为 $\frac{3}{4}$，则 $P(A|B)=($　　$)$.

(A) $\frac{2}{3}$　　(B) $\frac{1}{6}$　　(C) $\frac{1}{4}$　　(D) $\frac{5}{12}$

三 （本题满分 5 分）设 $x_n=(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^n)$. 证明：当 $0\leqslant q<1$ 时，序列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时有极限.

四 （本题满分 5 分）求圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 界于 $z=0$ 与 $z=xy$ 之间的部分之面积.

五 （本题满分 6 分）重量为 300 千克的摩托艇以 66 米/秒的初速度直线前进，如果水的阻力与速度成正比，且当速度为 1 米/秒时阻力为 10 千克. 问经过多少时间后，艇的速度降到 8 米/秒？

六 （本题满分 6 分）证明：当 $x\geqslant 0$ 时，等式

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$$

中的 $\theta(x)$ 满足

$$\frac{1}{4}\leqslant\theta(x)\leqslant\frac{1}{2}$$

且 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{4}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

七 （本题满分 6 分）(1) 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上可积. 证明：

$$\int_0^a\frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\mathrm{d}x=\frac{a}{2}$$

(2) 利用上述公式，求下列定积分的值：

$$\int_0^2\frac{x^2}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x$$

八 （本题满分 7 分）半径为 R 的球面 S 的球心在定球面 S_0：$x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 上. 问 R 取何值时，S 在定球面 S_0 内的那部分面积最大.

九 （本题满分 7 分）求级数

$$x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$$

的和函数及收敛域，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{4^n}$ 之值.

十 （本题满分 8 分）设 n 阶方阵 A 满足 $A^2=A$，证明：$A+I$（其中 I 为 n 阶单位阵）为可逆矩阵. 并求 $(A+I)^{-1}$.

十一 （本题满分 6 分）已知

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\qquad\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\qquad\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

是向量空间 R_3 的一个基，T 为 R_3 中的一个线性变换：$T(\alpha_1)=\alpha_3$，$T(\alpha_2)=\alpha_2$，$T(\alpha_3)=\alpha_1$，求 R_3 的另一个基，使 T 在该基下的矩阵为对角阵.

十二 （本题满分 8 分）游客乘电视塔内的电梯从底层到顶层观光，电梯于每个整点后的第 5 分钟、25 分钟和 55 分钟从底层起行. 一游客在早上八点以后的第 X 分钟到达底层候梯处，又 X 在 $[0,60]$ 上服从均匀分布. 求该游客的等候时间的数学期望.

十三 （本题满分 6 分）设(X,Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}A\sin(x+y) & x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant\pi \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求：(1) 常数 A. (2) 边缘密度函数 $f_X(x)$，$f_Y(x)$，问 X 与 Y 是否独立？

数学Ⅰ　第2套题

一　填空题(每小题3分,共15分)

(1) 设函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$e^z=x+\sqrt{x^2+y^2}$$

则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

(2) 若 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(1-\dfrac{2t}{x}\right)^x$,则 $f'(t)=$________.

(3) 点 $(1,-1,1)$ 到直线 $3x+4y-5z+12=0$ 的距离为________.

(4) 设 A 为 n 阶矩阵,$|A|\neq 0$, A^* 为 A 的伴随矩阵,E 为 n 阶单位矩阵. 若 A 有特征值 λ,则 $(A^*)^2+E$ 必有特征值________.

(5) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$,且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 $\dfrac{1}{2}$,则 $\mu=$________.

二　选择题(每小题3分,共15分)

(1) 设 $f(x)$ 连续,则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=$(　　).

(A) $xf(x^2)$　　(B) $-xf(x^2)$　　(C) $2xf(x^2)$　　(D) $-2xf(x^2)$

(2) 曲线积分

$$\oint_{C^+}\frac{x\mathrm{d}y-(y-1)\mathrm{d}x}{x^2+(y-1)^2}=(\quad)$$

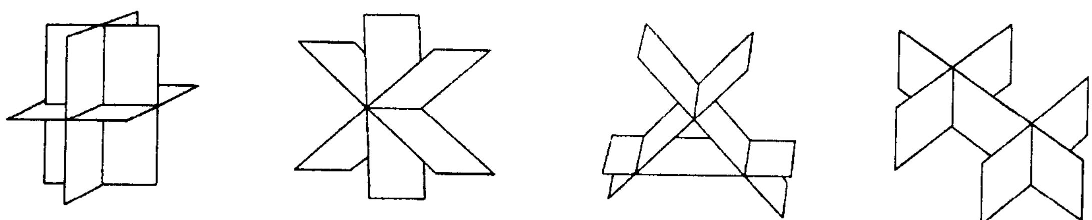
其中闭曲线 C 所围的区域内包含点 $(0,1)$,C^+ 的正向规定为逆时针的方向.

(A) 0　　(B) 2π　　(C) 1　　(D) -2π

(3) 已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$,且当 $\Delta x\to 0$ 时,α 是 Δx 的高阶无穷小,$y(0)=\pi$,则 $y(1)=$(　　).

(A) 2π　　(B) π　　(C) $e^{\frac{\pi}{4}}$　　(D) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

(4) 设有三张不同平面的方程 $a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=b_i$,$i=1,2,3$. 它们的系数矩阵与增广矩阵的秩都为2,则这三张平面可能的位置关系为(　　).



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

(5) 向单位圆 $x^2+y^2<1$ 内随机地投下3点,则这3点落在3个不同象限中的概率为(　　).

(A) $\frac{3}{4}$　　(B) $\frac{3}{8}$　　(C) $\frac{3}{16}$　　(D) $\frac{1}{4}$

三　(本题满分 5 分) 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^x}$, $x\in(-\infty,+\infty)$的收敛性.

四　(本题满分 5 分)

确定常数 λ,使在右半平面 $x>0$ 上的向量 $A(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{i}-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{j}$ 为某二元函数 $u(x,y)$的梯度,并求 $u(x,y)$.

五　(本题满分 6 分) 已知函数 $f(x)$在 $x=0$ 处可微,且曲线 $y=f(x)$与 $y=\int_0^{\arctan x}e^{-t^2}\,dt$ 在点(0,0)处的切线相同. 写出此切线方程,并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\frac{2}{n}\right)$.

六　(本题满分 6 分)

有一边长为 a 的正方形薄板,其上每一点的密度与该点到正方形的一个顶点的距离成正比,在正方形的中心处,密度为 ρ_0,求此薄板的质量.

七　(本题满分 6 分) 设函数 $f(x)$在区间[0,1]上连续,且$\int_0^1 f(x)\,dx=A$,求

$$\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)\,dy$$

八　(本题满分 7 分) 将函数 $f(x)=\pi-x$ 在 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 上展开为余弦级数.

九　(本题满分 7 分) 设 $f(u)$有连续的二阶导数且 $z=f(e^x\sin y)$满足方程$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{2x}z$,求 $f(u)$.

十　(本题满分 6 分) 求线性方程组

$$\begin{cases}x_2-3x_3+4x_4=-5\\x_1-2x_3+3x_4=-4\\3x_1+2x_2-5x_4=12\\4x_1+3x_2-5x_3=5\end{cases}$$

的全部解.

十一　(本题满分 8 分) 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&-8&-2\end{bmatrix}$$

的全部特征值与特征向量.

十二　(本题满分 8 分)

已知随机变量(X,Y)服从二维正态分布,且 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(1,3^2)$和 $N(0,4^2)$,X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$. 设 $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$,

(1) 求 Z 的数学期望 EZ 和方差 DZ;

(2) 求 X 与 Z 的相关系数 ρ_{XZ};

(3) 问 X 与 Z 是否相互独立? 为什么?

十三　(本题满分 6 分)

某保险公司的老年人寿保险有一万人参加,每人每年交 200 元. 若老人在该年内死亡,公

司付给家属一万元.设老年人死亡率为0.017,试求保险公司在一年的这项保险中亏本的概率.

附表　标准正态分布函数表

x	1.00	1.65	1.96	2.30	2.35
$\Phi(x)$	0.8413	0.9505	0.9750	0.9893	0.9906

数学Ⅰ　第3套题

一　填空题(每小题 3 分,共 15 分)

(1) 设 $s>0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^s+2^s+\cdots+n^s}{n^{s+1}}=$________.

(2) 若非常数函数 $f(x)$满足方程

$$f^2(x)=\int_0^x f(t)(t+1)\mathrm{d}t$$

则 $f(x)=$________.

(3) 设 l 为椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$,其周长记为 a,则 $\oint_l(2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=$________.

(4) 方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ ax_1-2x_2+3x_3=0\\ a^2x_1+4x_2+9x_3=0\end{cases}$$

有非零解,则 $a=$________.

(5) 有 3 个小球和 2 只杯子,将小球随机地放入杯中. 设 X 为有小球的杯子数,则 X 的分布函数为________.

二　选择题(每小题 3 分,共 15 分)

(1) 设 $u_n=(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 为(　　).

(A) 全收敛　　(B) 全发散

(C) 前者收敛后者发散　　(D) 前者发散后者收敛

(2) 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$不可导点的个数是(　　).

(A) 3　　(B) 2　　(C) 1　　(D) 0

(3) 对函数 $y=x^3+8$ 在区间$[0,1]$上应用拉格朗日中值定理时,所得的中间点 $\xi=$(　　).

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　(C) $\dfrac{1}{3}$　　(D) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(4) 行列式 $\begin{vmatrix}a & b & a+b\\ b & a+b & a\\ a+b & a & b\end{vmatrix}=$(　　).

(A) $(a+b)^3-3a^2b$　　(B) $2(a^3+b^3)$

(C) $-2(a^3+b^3)$　　(D) $3ab^2-(a+b)^3$

(5) 设随机变量 X 和 Y,已知

$P\{X\geqslant0,Y\geqslant0\}=\dfrac{3}{7}$, $P\{X\geqslant0\}=P\{Y\geqslant0\}=\dfrac{4}{7}$, 则 $P\{\max(X,Y)\geqslant0\}$等于(　　).

(A) $\dfrac{3}{7}$　　(B) $\dfrac{4}{7}$　　(C) $\dfrac{5}{7}$　　(D) $\dfrac{16}{49}$

三　(本题满分 5 分) 设 $y=f(x)$是区间$[0,1]$上的任一非负连续函数.

(1) 试证存在 $x_0\in(0,1)$，使得在区间 $[0,x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积，等于在区间 $[x_0,1]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积.

(2) 又设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f'(x)>-\dfrac{2f(x)}{x}$，证明(1)中的 x_0 是惟一的.

四 （本题满分 5 分）计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中

$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$

五 （本题满分 6 分）从船上向海中沉放某种探测仪器，按探测要求，需确定仪器的下沉深度 y（从海平面算起）与下沉速度 v 之间的函数关系. 设仪器在重力作用下，从海平面由静止开始铅直下沉，在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用. 设仪器的质量为 m，体积为 B，海水比重为 ρ，仪器所受的阻力与下沉速度成正比，比例系数为 $k(k>0)$. 试建立 y 与 v 所满足的微分方程，并求出函数关系式 $y=y(v)$.

六 （本题满分 6 分）计算 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$

其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，a 为大于零的常数.

七 （本题满分 6 分）求直线 l：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 π：$x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 l_0 的方程，并求 l_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

八 （本题满分 7 分）求级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n^2-1)2^n}$ 之和.

九 （本题满分 7 分）设平面上有 n 个质量分别为 m_i 的质点 $P_i(x_i,y_i)$，$i=1,2,\cdots,n$. 在平面上求一点 $M(x_0,y_0)$，使该质点系对 M 点的转动惯量最小.

十 （本题满分 6 分）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$

已知线性方程组 $AX=\beta$ 有解但不惟一，(1) 求 a 的值；(2) 求正交矩阵 Q，使 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 为对角矩阵.

十一 （本题满分 8 分）给定二次型

$$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

求正交矩阵 T，使作变换 $X=TZ$ 后，f 成为标准形，其中 $X=\{x_1,x_2,x_3\}^{\mathrm{T}}$，$Z=\{z_1,z_2,z_3\}^{\mathrm{T}}$.

十二 （本题满分 6 分）设两个随机变量 X,Y 相互独立，且都服从均值为 0、方差为 $\dfrac{1}{2}$ 的正态分布，求随机变量 $|X-Y|$ 的方差.

十三 （本题满分 8 分）设二维随机变量 (ξ,η) 的联合概率分布密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}(x+y) & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

(1) 求数学期望 $E\xi,E\eta$；

(2) 求协方差矩阵 $\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}\\\sigma_{21}&\sigma_{22}\end{bmatrix}$；

(3) 求 ξ 与 η 的相关系数.

数学 I　第 4 套题

一　填空题(每小题 3 分,共 15 分)

(1) $\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=$________.

(2) 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定,则 $y''(0)=$________.

(3) 由曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=12\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处单位法向量为________.

(4) 设向量组 $\alpha_1=(a,b,0)$, $\alpha_2=(0,b,c)$, $\alpha_3=(a,0,c)$ 线性无关,则 a,b,c 应满足关系式________.

(5) 设平面区域 D 由曲线 $y=\frac{1}{x}$ 及直线 $y=0$, $x=1$, $x=e^2$ 所围成,二维随机变量 (X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布,则 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度在 $x=2$ 处的值为________.

二　选择题(每小题 3 分,共 15 分)

(1) 当 $x\to 0$ 时, $f(x)=\int_0^{\sin^2 x}\sin t^2 dt$ 与 x^5 比较是(　　)的无穷小量.

(A) 等价　　(B) 同阶非等价　　(C) 高阶　　(D) 低阶

(2) 当 $x\neq 0$ 时, $f(x)=(2^x-3^x)/x$, 要使 $f(x)$ 在实轴上连续,只要定义 $f(0)=$(　　).

(A) 1　　(B) $\ln\frac{2}{3}$　　(C) $\ln\frac{3}{2}$　　(D) 0

(3) 设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导,则(　　).

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

(C) 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$

(D) 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 存在时,必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$

(4) 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关,则下列向量组中(　　)线性无关.

(A) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$　　(B) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$

(C) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$　　(D) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$

(5) 设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量,它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$,分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$,则(　　).

(A) $f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度

(B) $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度

(C) $F_1(x)+F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数

(D) $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数

三　(本题满分 5 分) 求定积分

$\int_0^1 x^n|x-a|dx$, 其中 a 为实数, n 为自然数.