应用泛函分析

王宗尧
薛以锋 编著
钱张军

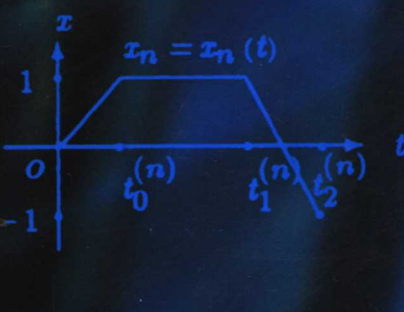
$$|f_n(x)| \le \sum_{k=0}^{k_n} |A_k^{(n)}| |x(t_k^{(n)})| \le \left(\sum_{k=0}^{k_n} |A_k^{(n)}|\right) \|x\|, \ \forall x \in C[a,b]。$$

$$\|f_n\| \le \sum_{k=0}^{k_n} |A_k^{(n)}|。$$

$$\sum_{k=0}^{k_n} |A_k^{(n)}| = f_n(x_n) \le \|f_n\|,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b p_m(t)\,dt = \int_a^b x(t)\,dt。$$

Yingyongfanhanfenxi



华东理工大学出版社

应用泛函分析

王宗尧　薛以锋　钱张军　编著

华东理工大学出版社

内 容 简 介

本书共分为五章．第一章介绍距离空间的基本概念及性质．第二章介绍线性赋范空间、内积空间的基本概念及 Hilbert 空间中的最佳逼近和直交展开等．第三章讨论线性赋范空间上的线性泛函和线性算子以及内积空间上线性泛函和线性算子的基本理论．第四章介绍 Banach 代数、有界线性算子的谱理论、紧算子的谱理论及自共轭算子的谱性质．第五章介绍泛函分析在计算数学领域中的一个应用 —— Hilbert 空间上的有界线性算子的广义逆的扰动理论．

本书可作为高等院校数学和应用数学专业的本科生和理工科大学各专业研究生学习泛函分析的教材或在其他类似水平的各种师资进修或学习班上使用．

图书在版编目（CIP）数据

应用泛函分析 / 王宗尧，薛以锋，钱张军编著．— 上海：华东理工大学出版社，2002. 12

ISBN 7-5628-1317-5

I. 应... II. 王... III. 泛函分析－高等学校－教材 IV. 0177

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 072892 号

应用泛函分析

王宗尧　薛以锋　钱张军　编著

出版	华东理工大学出版社	**开本**	850 × 1168 1/32
社址	上海市梅陇路 130 号	**印张**	5.75
邮编	200237　**电话** (021)64250306	**字数**	149 千字
网址	www.hdlgpress.com.cn	**版次**	2002 年 12 月第 1 版
经销	新华书店上海发行所	**印次**	2002 年 12 月第 1 次
印刷	上海市崇明县裕安印刷厂	**印数**	1–2050 册

ISBN 7-5628-1317-5/O · 66　　　定价 12.00 元

序

泛函分析是现代数学的一个重要分支，它综合应用分析、代数和几何的观点和方法研究分析数学中的许多问题。因为在处理数学问题时，泛函分析的观点比较高，比较抽象，所以它的应用范围比较广。泛函分析的概念、结论和方法已渗透到数学与应用数学及其他学科的许多分支中，例如微分方程、概率论、理论物理、现代力学、现代控制论及经济数学等，甚至在工程和一些技术性的学科中也常常有应用。

本书是在作者多年来讲授泛函分析的基础上并参阅了国内外有关教材后编写而成的。它可以作为高等院校数学和应用数学专业的本科生和理工科大学各专业研究生学习泛函分析的教材或在其他类似水平的各种师资进修或学习班上使用。

在本书的编写过程中，作者力求体现以下特点。

(1) 从内容讲，学习泛函分析的学生应具有实变函数论的基础，或至少应知道 Lebesgue 测度和 Lebesgue 积分。但在本书的内容安排下，没有学过以上内容的学生也能直接学习泛函分析这门课程。

(2) 本书引进了 Banach 代数的概念和一些基本性质。在学习了 Banach 代数中元素的谱理论的基础上，介绍了 Banach 空间和 Hilbert 空间上有界线性算子谱的一般理论，进而介绍了紧算子和自共轭算子的谱的特性。

(3) 本书除了个别定理未给出证明而直接写出结论外，其他内容基本上是自给自足的。在内容安排上，本书尽量做到自然、

直观，讲清楚各有关内容的实质并配以较多的例子，使读者易于理解和掌握基本概念及其有关的性质和定理。

全书共分为五章。前四章是泛函分析的基本内容，第五章是有关 Hilbert 空间上有界线性算子广义逆的扰动分析理论。这一章中的许多结果是本书的第二作者与华东师范大学的陈果良教授在近几年的合作研究中得到的。这部分内容充分体现了泛函分析在计算数学领域中的应用。有兴趣的读者和有关专业的研究生可以阅读这一章。

在本书的编写过程中，得到了华东理工大学研究生院及数学系的大力支持。靳勇飞和刘义强两位同志用计算机输入了本书的手稿，作者谨在此表示衷心的感谢。由于我们的水平有限，书中难免会出现问题和错误，希望读者不吝指出，以便今后改正提高。

编　者

2002 年 8 月

目　录

第一章 距 离 空 间

极限理论是微积分的基础，对实数列 $\{x_n\}_1^\infty$ 而言，若 $|x_n-x_0| \to 0$ $(n \to \infty)$，则实数列 $\{x_n\}_1^\infty$ 以 x_0 为极限。这可以用动点 x_n 和定点 x_0 在数轴上的距离趋向于零来描述。这种思想可以推广到一般的集合。在本章中，我们将欧氏空间中两点之间的距离这一概念的最本质的要素抽象出来，建立抽象的距离空间的理论。简单地讲，所谓距离空间是指一个集合，对其中任何两个元素 (今后就称为两个点) 我们都可以度量它们之间的距离。利用这种距离，我们可以类似在欧氏空间中那样定义各种收敛性并建立极限理论。

1.1 距离空间的定义及例子

距离空间推广了在一维欧氏空间 $\mathbb{R}$ 中由两元函数 $(x,y) \mapsto |x-y|$, $x, y \in \mathbb{R}$ 确定的距离及与之相关的许多性质。

定义 1.1 设 X 是一个非空集合，如果存在一个从 $X \times X = \{(x,y)\,|\,x,y \in X\}$ 映到 $\mathbb{R}$ 的映射 $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$，且对任何 $x, y, z \in X$，d 满足：

(1) $d(x,x) \geqslant 0$，且 $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$ (非负性);

(2) $d(x,y)=d(y,x)$ (对称性);

(3) $d(x,y) \leqslant d(x,z)+d(z,y)$ (三角不等式),

则称 $d(x,y)$ 为 X 中 x, y 之间的距离 (matric 或 distance)。配备了距离 d 的集合 X 称为距离空间 (metric space)，记为 (X,d)。

注意: (1) 定义在 $X \times X$ 上的任何一个二元函数 $d(\cdot,\cdot)$ 只要满足 (1), (2), (3), 都被称为距离。这里"距离"这个名称已由现实生活中的意义引申到一般情况。它用来描述 X 中两个事物接近的程度; 而条件 (1), (2), (3) 被认为是作为一个距离所必须满足的最本质的性质。

(2) 距离空间由集合 X 和距离函数 d 所组成。在同一个集合 X 上若有两个不同的距离函数 d_1 和 d_2, 则我们认为 (X, d_1) 和 (X, d_2) 是两个不同的距离空间。

(3) 集合 X 不一定是数集, 也不一定有代数结构。为直观起见, 今后称距离空间 X 中的元素为"点"。例如若 $x \in X$, 则称 x 为"X 中的点"。

在上下文中已明确, 因而不会引起混淆的情况下在称呼距离空间 (X, d) 时可以省略距离函数 d, 而称"距离空间 X"。

例 1.2 设 $\mathbb{R}$ 是实数集合, 定义 $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为 $d(x,y) = |x-y|$, 则 $(\mathbb{R}, d)$ 是一个距离空间。

例 1.3 记

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

定义 $d_2: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为 $d_2(x,y) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, 其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$。

利用 Minkowski 不等式可以证明 $(\mathbb{R}^n, d_2)$ 是一个距离空间。今后称 d_2 为 $\mathbb{R}^n$ 上的欧几里德距离 (Euclidean metric); $(\mathbb{R}^n, d_2)$ 就是 n 维的欧几里德空间 (n–dimensional Euclidean space)。

在 $\mathbb{R}^n$ 上可以定义其他距离, 常见的有:

例 1.4 在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上定义 $d_p: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为 $d_p(x,y) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ $(1 \leqslant p < \infty)$, $d_\infty(x,y) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|$。

利用 Minkowski 不等式可以证明 $(\mathbb{R}^n, d_p)$, $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 都是距离空间。

例 1.5 在 $\mathbb{R}^\infty = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \,|\, x_n \in \mathbb{R},\ n \geqslant 1\}$ 上

我们无法按例 1.4 那样定义 d_p, 因为所用的无穷级数可能发散。但我们可以定义其他距离。比如, 定义 $d: \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ 为

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i(1+|x_i-y_i|)}$$

则 $(\mathbb{R}^\infty, d)$ 是距离空间。

证明: 对任何 $x = (x_1, x_2, \cdots)$, $y = (y_1, y_2, \cdots) \in \mathbb{R}^\infty$,

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i(1+|x_i-y_i|)} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1,$$

因此, $d(x,y)$ 有意义。 $d(\cdot,\cdot)$ 显然满足定义 1.1 中 (1) 和 (2)。下面仅证明三角不等式。

考察函数 $\phi(t) = \dfrac{t}{1+t}$ $(t \geqslant 0)$。由于 $\phi'(t) > 0$ $(t \geqslant 0)$, 故 $\phi(t)$ 是单调递增函数。对于 $x, y, z \in \mathbb{R}^\infty$, 因为

$$|x_i - y_i| \leqslant |x_i - z_i| + |z_i - y_i|, \ i = 1, 2, \cdots,$$

所以, 对任何 i,

$$\begin{aligned} \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i-y_i|} &\leqslant \frac{|x_i - z_i| + |z_i - y_i|}{1+|x_i-z_i|+|z_i-y_i|} \\ &\leqslant \frac{|x_i - z_i|}{1+|x_i-z_i|} + \frac{|z_i - y_i|}{1+|z_i-y_i|}, \end{aligned}$$

从而

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i(1+|x_i-y_i|)} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - z_i|}{2^i(1+|x_i-z_i|)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|z_i - y_i|}{2^i(1+|z_i-y_i|)},$$

即 $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$。 □

例 1.6 考虑 $\mathbb{R}^\infty$ 的子集

$$l^\infty = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in \mathbb{R}^\infty \mid \sup_i |x_i| < \infty\}。$$

定义 $d_\infty: l^\infty \times l^\infty \to \mathbb{R}$ 为 $d_\infty(x,y) = \sup\limits_i |x_i - y_i|$, 则 (l^∞, d_∞) 是距离空间。

证明: d_∞ 显然满足定义 1.1 中的 (1) 和 (2)。下面证明三角不等式。

由于对任何 $x, y, z\in l^\infty$ 有,

$$\begin{aligned}d_\infty(x,y)&=\sup_i|x_i-y_i|\leqslant\sup_i(|x_i-z_i|+|z_i-y_i|)\\&\leqslant\sup_i|x_i-z_i|+\sup_j|z_j-y_j|\\&=d_\infty(x,z)+d_\infty(z,y),\end{aligned}$$

因此 d_∞ 是 l^∞ 上的距离函数。 □

例 1.7 考虑 l^∞ 的子集

$$c_0=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l^\infty\mid\lim_{n\to\infty}x_n=0\}。$$

若我们把例 1.6 中的距离空间 (l^∞,d_∞) 的距离函数限制在子集 c_0 上, (c_0,d_∞) 也是一个距离空间, 我们称它为 l^∞ 的子空间。

一般地, 我们有

定义 1.8 设 (X,d) 是一距离空间, X_1 为 X 的子集, 那么将距离函数限制在 $X_1\times X_1$ 上是 X_1 上的一个距离 (为简便, 仍用 d 记此距离)。我们称距离空间 (X_1,d) 为原来空间 (X,d) 的子空间。

例 1.9 考虑 $\mathbb{R}^\infty$ 的子集

$$l^p=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in\mathbb{R}^\infty\mid\sum_{i=1}^\infty|x_i|^p<+\infty\},$$

$(1\leqslant p<\infty)$。定义函数 $d_p\colon l^p\times l^p\to\mathbb{R}$ 为

$$d_p(x,y)=\Big(\sum_{i=1}^\infty|x_i-y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

$x=(x_1,x_2,\cdots), y=(y_1,y_2,\cdots)\in l^p$。利用 Minkowski 不等式可证明 (l^p,d_p) 是一个距离空间。

例 1.10 设 $C[a,b]$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数全体。对 $x(t), y(t)\in C[a,b]$, 定义 $d_\infty(x,y)=\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|$。则易证 $(C[a,b],d_\infty)$ 是距离空间。

例 1.11 在 $C[a,b]$ 上定义另一个距离函数 d_p $(1\leqslant p<\infty)$

为

$$d_p(x,y)=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^p\,\mathrm{d}\,t\right)^{\frac{1}{p}},\ x,y\in C[a,b],$$

则利用函数积分的 Minkowski 不等式可证明 $(C[a,b],d_p)$ 仍是一个距离空间。

例 1.12 设 X 是任一非空集合，定义映射 $d\colon X\times X\to\mathbb{R}$ 为

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & \text{如果 } x=y\\ 1 & \text{如果 } x\neq y\end{cases}。$$

则可以证明 (X,d) 是距离空间。这个距离称为离散距离 (discrete metric)。

1.2 距离空间中的点集

为了进一步研究距离空间中的收敛，函数的性质，有必要研究距离空间中的点集。事实上，数学分析中关于实数空间 $\mathbb{R}$ 中的有关概念，如开集、闭集、邻域、极限、稠密集、疏朗集等都可以“移植”到一般的距离空间。

定义 1.13 设 (X,d) 是一个距离空间，$x_0\in X$，$r\in\mathbb{R}$，$r>0$，记 $B(x_0,r)=\{x\in X\mid d(x,x_0)<r\}$。称 $B(x_0,r)$ 为 x_0 的 r- 邻域 (r-neighbourhood)。

定义 1.14 设 A 是距离空间 (X,d) 的一个子集，x_0 是 A 中一点。如果存在 $r>0$，使得 $B(x_0,r)\subset A$，则称 x_0 为 A 的一个内点 (interior point)。称 A 的内点全体为 A 的内部 (interior)，记为 A^o。如果 A 中所有点都是 A 的内点，即如果 $A=A^o$，则称 A 为开集 (open set)。我们规定空集 $\emptyset$ 为开集。

考察以 x_0为中心，r为半径的开球 $B(x_0,r)$ (x_0的 r–邻域)。对于任何 $y\in B(x_0,r)$，由三角不等式，$B(y,r-d(x_0,y))\subset B(x_0,r)$，故 y 为 $B(x_0,r)$ 的内点。因此，开球 $B(x_0,r)$ 为开集。

定理 1.15 设 X 是一个距离空间，$\mathcal{O}$ 为 X 中开集的全体，则

(1) $X, \emptyset \in \mathcal{O}$;

(2) 若 $A_\alpha \in \mathcal{O}$ $(\alpha \in \Lambda)$, 则 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \in \mathcal{O}$, 其中 Λ 是任一（有穷或无穷）的指标集;

(3) 若 $\{A_i\}_1^n$ 是 n 个开集, n 是任一自然数, 则 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{O}$。

证明: (1) 是显然的。

(2) 记 $A = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$。任取 $x_0 \in A$, 则 x_0 必定属于某一个 A_{α_0}。由于 A_{α_0} 是开集, x_0 是 A_{α_0} 的内点, 因而存在 x_0 的一个 δ- 邻域 $B(x_0,\delta)$ 使得 $B(x_0,\delta) \subset A_{\alpha_0} \subset A$, 即其中任何一点 x_0 都是 A 的内点, 因此 A 是开集。

(3) 记 $A = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$, $x_0 \in A$, 则 $x_0 \in A_i$, $(i = 1,\cdots,n)$。因为 A_i 为开集, 所以存在 $\delta_i > 0$, 使 $B(x_0,\delta_i) \subset A_i$。取 $\delta = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \delta_i$, 则 $\delta > 0$, 且对每一个 i, $B(x_0,\delta) \subset A_i$, 因而 $B(x_0,\delta) \subset A$, 于是 x_0 为 A 的内点, 从而 A 为开集。 $\square$

一般地, 无穷个开集的交不一定是开集。例如, 如果取 $A_n = (-\frac{1}{n},1)$, $(n = 1,2,\cdots)$, 则每个 A_n 是 $\mathbb{R}$ 中的开集。但 $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = [0,1)$ 不是开集, 因为 $[0,1)$ 中的 0 不是 A 的内点。

定理 1.16 设 A, B 是度量空间 (X,d) 中的两个非空子集。

(1) 如果 $A \subset B$, 那么 $A^o \subset B^o$;

(2) A 的内部 A^o 为 A 所包含的开集中的最大开集;

(3) A 和 B 交的内部等于 A 和 B 内部的交, 即 $(A\cap B)^o = A^o \cap B^o$。

证明: (1) 设 $x \in A^o$, 则 $B(x,r) \subset A \subset B$ 对某正数 r 成立。于是 x 是 B 的内点, 因此 $A^o \subset B^o$。

(2) $A^o \subset A$ 是显然的, 下面证 A^o 是开集。任取 $x \in A^o$, 则有 $r > 0$, 使得 $B(x,r) \subset A$ 。对于任一点 $y \in B(x,r)$, 由距离的三角不等式可知 $B(y,r-d(x,y)) \subset B(x,r) \subset A$, 因此 $y \in A^o$。由 y 在 $B(x,r)$ 中的任意性可得, $B(x,r) \subset A^o$, 即 x 为 A^o 的内点, 又因

为 x 是 A^o 的中任意一点，故 A^o 是开集。

如果 B 是开集且 $B \subset A$，则由 (1) $B^o \subset A^o$，即 $B = B^o \subset A^o$。因此 A^o 是 A 所包含的最大开集。

(3) 留作习题。 □

我们可以用邻域来定义距离空间中点列收敛的概念。

定义 1.17 设 $\{x_n\}_1^\infty$ 是距离空间 (X, d) 的点列，$x_0 \in X$ 是一个固定的点。如果 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$，则称点列 $\{x_n\}_1^\infty$ 按距离 d 收敛到 x_0，而 x_0 称为 $\{x_n\}_1^\infty$ 的极限，并记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，或 $x_n \to x_0\ (n \to \infty)$。换言之，$\{x_n\}_1^\infty$ 收敛到 x_0 的充分必要条件是对任意 $\epsilon > 0$ 存在自然数 N，使得当 $n > N$ 时，有 $d(x_n, x_0) < \epsilon$。

例 1.18 设 $\{x_m\}_1^\infty$ 是 n 维空间 $(\mathbb{R}^n, d_2)$ 中的点列，则 $\{x_m\}_1^\infty$ 在 $\mathbb{R}$ 中收敛到 x 的充分必要条件是 x_m 按坐标收敛到 x 的对应坐标。确切地讲，若 $x_m = (x_1^m, x_2^m, \cdots, x_n^m), x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则 $x_m \to x\ (m \to \infty)$ 的充要条件是 $x_k^m \to x_k\ (m \to \infty)$，$k = 1, 2, \cdots, n$。

证明：由下面不等式，

$$|x_k^m - x_k| \leqslant \left(\sum_{j=1}^n |x_j^m - x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = d(x_m, x) \leqslant \sqrt{n} \max_{1\leqslant j\leqslant n} |x_j^m - x_j|,$$

$k = 1, \cdots, n$，就可证明欧几里得空间中点列收敛等价于按坐标收敛。 □

定义 1.19 设 X 为距离空间，A 为 X 的子集，$x_0 \in X$。

(1) 如果 x_0 的任何邻域中总有属于 A 且异于 x_0 的点，即对任何 $\epsilon > 0$，$(A \setminus \{x_0\}) \cap B(x_0, \epsilon) \neq \emptyset$，则称 x_0 为 A 的极限点 (cluster point)；

(2) 集合 A 的极限点全体称为 A 的导出集，记为 A'；

(3) 集合 $A \cup A'$ 称为集合 A 的闭包 (closure of A)，记作 $\overline{A}$；

(4) 如果集合 A 包含 A 所有的极限点，即 $A' \subset A$，则称 A 为闭集。

由定义 1.19 (1)，容易推出下列论述是等价的：

(1) x_0 是 A 的极限点;

(2) 存在点列 $\{x_n\}_1^\infty \subset A$, 每一个 $x_n \neq x_0$, 且 $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$;

(3) 存在点列 $\{x_n\}_1^\infty \subset A$ 使得 $x_n \neq x_m$ (当 $n \neq m$ 时) 且 $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$。

由定义 1.19 (2) 和 (3), 容易推出下面论断:

集合 A 是闭集的充分必要条件是 $A = \overline{A}$。

例 1.20 考察以 x_0 为中心, r 为半径的闭球

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leqslant r\}。$$

若有 $x_n \in \bar{B}(x_0, r)$, $x_n \to y$, 则从

$$d(x_0, y) \leqslant d(x_0, x_n) + d(x_n, y) \leqslant r + d(x_n, y)$$

中, 令 $n \to \infty$, 得 $d(x_0, y) \leqslant r$。这说明 $\bar{B}(x_0, r)$ 包含它所有的极限点, 因此闭球 $\bar{B}(x_0, r)$ 为闭集。

下面定理说明了在距离空间中, 开集和闭集是以"对偶"的形式存在的。

定理 1.21 距离空间 X 中集合 A 是闭集的充分必要条件是: A 的余集 $A^c = X \setminus A$ 是开集。

证明: 必要性: 设 A 是闭集, x 是 A^c 中任意一点。如果 x 不是 A^c 的内点, 由内点的定义, 对所有的正数 δ, $B(x, \delta)$ 不能包含在 A^c 中, 即 $B(x, \delta)$ 中含有 A 的点。因为 $x \notin A$, 所以 $B(x, \delta)$ 中含有异于 x 的 A 中的点, 故 x 为 A 的极限点。由于 A 是闭集, 故 $x \in A$, 这和 $x \in A^c$ 矛盾。这说明 x 必须是 A^c 的内点。因而 A^c 是开集。

充分性: 如果 A^c 是开集而 A 不是闭集, 那么必有 A 的一个极限点 x, 使得 $x \notin A$, 即 $x \in A^c$。因为 A^c 是开集, 故 x 是它的内点, 于是必定有某个 $\delta > 0$, 使得 $B(x, \delta) \subset A^c$。这说明 $B(x, \delta)$ 中没有 A 的点。这和 x 是 A 的极限点矛盾。因此 A 含有它所有的极限点, 即 A 是闭集。 □

定理 1.22 设 $\mathcal{F}$ 是距离空间 X 中所有的闭集所成的集合, 则

(1) X 和 $\emptyset \in \mathcal{F}$;

(2) 若 $\{F_i\}_1^n$ 是 n 个闭集，n 是任一自然数，则 $\bigcup_{i=1}^{n} F_i \in \mathcal{F}$;

(3) 若 $F_\alpha \in \mathcal{F}$ $(\alpha \in \Lambda)$, 则 $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha \in \mathcal{F}$, 其中 Λ 是任一（有穷或无穷）的指标集。

证明: 留作习题。 □

命题 1.23 设 S 是距离空间 (X,d) 的子空间，A 是 S 的一个子集，则 A 是子空间 S 的开集当且仅当存在 X 中开集 O 使得 $A=S\cap O$; A 是子空间 S 的闭集当且仅当存在 X 中闭集 F 使得 $A=S\cap F$。

证明: 仅证开集的情况，闭集的情况只要取余集就可以了。设 $A=S\cap O$, 在此 O 为 X 中的一个开集。设 $x\in A$, 选一个 $r>0$, 使 $B(x,r)\subset O$, 我们有

$$x\in S\cap B(x,r)\subset S\cap O。$$

注意到在 S 中以 x 为中心，r 为半径的开球是 $S\cap B(x,r)$, 所以 x 是子空间 S 中集合 $S\cap O$ 的内点。因此 $A=S\cap O$ 在 S 中为开集。

反过来，若 A 在 S 中是开集，则对每一个 $x\in A$, 存在 $r_x>0$, 使得 A 中的开球 $S\cap B(x,r_x)$ 包含在 A 中。因此

$$A=\bigcup_{x\in A}(S\cap B(x,r_x))=S\cap\bigcup_{x\in A}B(x,r_x)=S\cap O,$$

在此 $O=\bigcup_{x\in A}B(x,r_x)$ 是 X 中开集。 □

定义 1.24 设 A 是距离空间 X 的子集，$x\in X$。如果 x 的任一 δ- 邻域中既有 A 的点，又有不属于 A 的点，即对任意正数 δ 同时有 $B(x,\delta)\cap A\neq\emptyset$ 和 $B(x,\delta)\cap A^c\neq\emptyset$, 则称 x 为 A 的边界点 (boundary point)。A 的边界点全体所成的集合称为 A 的边界 (boundary), 记为 ∂A。

应注意，A 的边界点可能属于 A, 也可能不属于 A。对于 A 的边界 ∂A, 我们有下面更确切的描述。

定理 1.25 设 A 是距离空间 X 的子集，则 A 的边界 ∂A 是

一闭集，且 $\partial A=\overline{A}\cap\overline{A^c}$。

证明：留作习题。 $\square$

定义 1.26 设 A 是距离空间 X 的子集，称 A 的余集的内部为 A 的外部 (exterior)，即 $(A^c)^o$ 为 A 的外部。

对于 A 的外部中任何一点 x，由定义必存在一正数 $r>0$，使 $B(x,r)\cap A\neq\emptyset$。由集合的内部、外部、边界点的定义可知，对于给定的任何一个集合 A，整个距离空间被分成不相交的三部分：A 的内部，A 的边界，A 的外部，即

$$X=A^o\cup\partial A\cup(A^c)^o,\ A^o\cap\partial A=A^o\cap(A^c)^o=\partial A\cap(A^c)^o=\emptyset.$$

在一般情况下，A^o 和 $(A^c)^o$ 永远不相交，但 ∂A 中的点可能部分属于 A，另一部分不属于 A。特别，若 $\partial A\subset A$，那么 A 就是一个闭集；若 $\partial A\cap A=\emptyset$，那么 A 就是一个开集。

在数学分析中我们知道下面事实：任何一个实数是一列有理数的极限。这个事实可以认为有理数集合 $\mathbb{Q}$ 在实数集合 $\mathbb{R}$ 内“稠密”。一般地，我们有如下的定义：

定义 1.27 设 A,B 是距离空间 X 中的两个非空子集。

(1) 称 A 对于 B 是稠密的，如果 A 的闭包包含 B，即 $\overline{A}\supset B$；等价地，如果对每个 $x\in B$，x 的任何邻域都含有 A 中的点，则称 A 对于 B 稠密；

(2) 如果 $A\subset B$，且 $\overline{A}=B$，则称 A 在 B 中稠密；如果 $\overline{A}=X$，称 A 在 X 中稠密，或称 A 为 X 的稠密子集；

(3) 如果距离空间 X 具有可数的稠密子集，即存在点列 $A=\{x_n\}_1^\infty$，使得 $\overline{A}=X$，则称距离空间 X 是可分的 (separable)。

由定义 1.27，有理数集合 $\mathbb{Q}$ 是实数集 $\mathbb{R}$ 的稠密子集，因为有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可数的，所以 $\mathbb{R}$ 是一可分的距离空间。

容易证明下面结论：

命题 1.28 如果 A 在 B 中稠密，B 在 C 中稠密，则 A 在 C 中稠密。

证明：留作习题。 $\square$