




第三册

欧维义 陈维钧 编

高等数学

(修订版)

 吉林大学出版社

C13-44
C14(13)
3

高等数学

(修订版)

第三册

欧维义 陈维钧 编

吉林大学出版社

高等数学

(修订版)

第三册

欧维义 陈维钧 编

责任编辑、责任校对：赵洪波

封面设计：孙 群

吉林大学出版社出版
(长春市解放大路 125 号)

吉林大学出版社发行
长春市东方印刷厂印刷

开本：850 × 1168 毫米 1/32

2000 年 9 月第 3 版

印张：11.75

2000 年 9 月第 1 次印刷

字数：280 千字

印数：18951—23950 册

ISBN 7-5601-2426-7/O·265

定价：17.00 元

第一版 序

《高等数学》一书共四册。第一册讲一元微积分和空间解析几何；第二册讲多元微积分和场的数学描写方法；第三册讲级数和常微分方程；第四册讲线性代数。

本教材在课程结构上，我们加强了那些有较深远影响的基本概念、理论和方法(如极限概念、中值定理、泰勒公式、微元法、场的数学描写方法和级数理论等等)。

在应用方面，我们注重物理、力学对数学的渗透，并尽可能地使学生获得应用方面的信息。

在培养能力方面，关键是培养学生有效地使用数学工具。为达到这个目的，重要的途径是解题。多解题才能培养学生的运算能力、抽象思维能力和解决实际问题的能力。为此，在本教材各节之后，多数都配备了A、B、C三类习题。一般说，A类题是理解和消化所学内容的基本题；B类题是体现课程要求的中档题；C类题则是培养学生思维能力、综合能力和技巧的选作题。

总之，本教材在加强基础、培养能力方面都做了一些新的探索。希望在同样的教学时间内，获得更好的教学效果。

在编写教材的过程中，得到我们的老师江泽坚教授、李荣华教授、吴智泉教授的指导和帮助；得到赵为礼、王毅、潘吉勋、宋玉琦等同志的帮助。在此，谨向他们致以谢意。

由于编者水平所限，错误和不妥之处，敬请读者指正和批评。

编 者

1986年4月于吉林大学

第二版 序

本书是欧维义、陈维钧、金德俊编写的高等数学第三册的修改本。这次修改主要是依据该书自1987年出版使用以来的教学实践和学生的学习实际，在对内容和习题做认真修改的同时，还对内容和习题做了较大的精简。

在酝酿和修改这本教材的过程中，多次召开了主讲过该课程的教师座谈会，赵为礼、王俊禹、王毅、高玉环、张慎学、夏中勇、王树岩、尹景学、马富明、李勇、吕显瑞、李辉来等同志参加了会议。他(她)们对原教材存在的问题，教材的修改都提了很多具体意见和建议。对修改好教材起了重要的作用。在此谨向他们的帮助致以谢意。

本书的原编者金德俊已于1983年调离吉林大学，没有参加这次修改。

编 者

1992年1月于吉林大学

第三版 序

本套书于1986年正式出版，在1994年再版时对内容和习题做了部分修改和精简。近几年又不断收集了使用者对本书的意见和建议。在今年5月初，出版社特邀了多位使用本书的主讲教师座谈，进一步听取大家对再版的具体修改意见。由于时间很紧，这次再版也只能做些修改工作，旨在满足本校及兄弟院校教学之急需。

本套书修订后的内容安排：第一册讲一元微积分；第二册讲空间解析几何和多元微积分；第三册讲场论、无穷级数和常微分方程；第四册已独立成书，书名为线性代数。书中各节配有习题，一般分为A、B两类：A类为基本题，B类为中、高档题。

当今，教学改革正在深入发展，呼唤出版一些具有创新思路的新教材，以适应新世纪培养人才的要求。一本好教材如同一件宝物，可藏之名山，也能传之久远。本书几经修订出版诚望能抛砖引玉。

最后，要感谢在这次修订中提出宝贵意见并参加工作的胡成栋教授、尹景学教授、姜诗章教授、姜杰教授和袁洪君教授等。特别要感谢吉林大学出版社的副总编卢喜观先生对本书再版的关心和支持。

编 者

2000年8月于长春

目 录

第一篇 场的数学描写方法

第一章 数量场的梯度	(1)
§ 1 场和场的图解	(1)
1.1 场的概念和场的数学表示方法	(1)
1.2 场的分类和场的图形表示法	(3)
§ 2 方向导数	(8)
2.1 方向导数的定义	(8)
2.2 方向导数的计算公式	(9)
§ 3 梯度	(12)
3.1 梯度的定义	(12)
3.2 梯度的性质及其另一种定义	(13)
3.3 梯度的运算法则	(14)
§ 4 梯度的几何性质	(17)
4.1 梯度的几何性质	(17)
4.2 梯度场的几何作法	(20)
第二章 矢量场的散度	(23)
§ 1 散度及其计算公式	(23)
1.1 发散量	(23)
1.2 散度	(25)
1.3 散度在直角坐标下的计算公式	(27)
1.4 散度的运算法则	(30)

§ 2 Gauss 定理	(32)
2.1 Gauss 定理	(32)
2.2 Gauss 定理在积分计算中的应用	(35)
2.3 Gauss 定理与三重积分的分部积分	(38)
2.4 质量守恒与连续性方程	(39)
第三章 矢量场的旋度	(43)
§ 1 涡旋量及其计算	(43)
1.1 旋转量(环量)	(43)
1.2 涡旋量	(46)
1.3 涡旋量的计算公式	(48)
§ 2 旋度及其计算	(52)
2.1 空间矢量场的旋度	(52)
2.2 旋度在直角坐标系下的计算公式	(53)
§ 3 Green 公式和 Stokes 公式	(56)
3.1 Green 公式	(56)
3.2 Stokes 公式	(59)
3.3 Green 公式和 Stokes 公式在积分计算中的 应用	(61)
3.4 Green 公式与二重积分的分部积分	(65)
3.5 两个基本方程的建立	(66)
§ 4 位场和标量势	(69)
4.1 空间矢量场的标量势	(70)
4.2 平面矢量场的标量势	(78)
第四章 ∇ 算符和三度在球、柱坐标系下的计算式	(81)
§ 1 ∇ 算符及其运算法则	(81)
1.1 ∇ 算符	(81)
1.2 ∇ 算符的运算法	(82)

1.3	∇ 算符的线性运算性质	(86)
1.4	∇ 算符的复合运算法则	(86)
§2	梯度、散度、旋度、 ∇^2 算符在柱坐标系下的 计算式	(89)
2.1	∇ 算符在柱坐标系下的表达式	(89)
2.2	单位矢量 e_r 、 e_φ 、 e_z 的“微商”公式	(90)
2.3	散度在柱坐标系下的计算式	(91)
2.4	旋度在柱坐标系下的计算式	(92)
2.5	∇^2 算符在柱坐标系下的表达式	(93)
§3	梯度、散度、旋度、 ∇^2 算符在球坐标系下的 计算式	(94)
3.1	∇ 算符在球坐标系下的表达式	(94)
3.2	单位矢量 e_r 、 e_θ 、 e_φ 的“微商”公式	(95)
3.3	散度在球坐标系下的计算式	(96)
3.4	旋度、 ∇^2 算符在球坐标系下的表达式	(97)

第二篇 无穷级数

第五章	数值级数	(100)
§1	级数的收敛、发散概念	(101)
1.1	收敛、发散概念	(101)
1.2	级数的基本性质	(103)
§2	正项级数的收敛、发散判别法	(107)
2.1	比较判别法	(108)
2.2	D'Alembert 判别法、Cauchy 判别法	(112)
2.3	积分判别法	(115)
§3	任意项级数的敛散性判别	(118)
3.1	Cauchy 收敛准则、Leibniz 判别法	(118)

3.2	绝对收敛与条件收敛	(122)
3.3	Abel 判别法和 Dirichlet 判别法	(123)
3.4	级数的乘法	(125)
第六章 函数级数		(128)
§ 1	收敛域、函数级数的和函数	(128)
1.1	收敛域的概念	(128)
1.2	和函数的概念	(130)
1.3	和函数与函数级数的逐点收敛	(130)
§ 2	函数级数的一致收敛	(131)
2.1	一致收敛的概念	(131)
2.2	一致收敛的判别法	(134)
2.3	内部一致收敛	(138)
§ 3	和函数的性质	(140)
3.1	和函数的连续性	(141)
3.2	逐项积分性质	(142)
3.3	逐项微商定理	(143)
第七章 幂级数		(145)
§ 1	收敛域的结构与求法	(145)
1.1	Abel 引理及其推论	(145)
1.2	收敛域的结构与求法	(147)
1.3	幂级数的乘法	(150)
§ 2	和函数的性质	(153)
2.1	内部一致收敛的性质	(153)
2.2	逐项求导幂级数的收敛半径	(153)
2.3	和函数的性质	(155)
§ 3	初等函数的幂级数展开	(159)
3.1	必要条件	(159)

3.2	充分条件	(161)
3.3	初等函数在 $x=0$ 点的 Taylor 展式	(163)
第八章 Fourier 级数		(169)
§ 1	形式 Fourier 级数	(169)
1.1	形式 Fourier 级数	(169)
1.2	求形式 Fourier 级数的例子	(171)
1.3	Besel 不等式和 Riemann 引理	(173)
§ 2	收敛定理	(176)
2.1	引理和命题	(176)
2.2	收敛定理及其推论	(183)
§ 3	一般区间上的 Fourier 级数展开	(192)
3.1	收敛定理及其推论	(192)
3.2	展开例子	(195)
§ 4	广义 Fourier 级数	(197)
4.1	内积概念和基本不等式	(197)
4.2	正交归一化系	(199)
4.3	广义 Fourier 级数及其收敛概念	(199)
4.4	完全系的概念及其判别	(201)

第三篇 常微分方程

第九章 一阶微分方程的解法		(204)
§ 1	常微分方程举例和基本概念	(205)
1.1	常微分方程举例	(205)
1.2	基本概念	(205)
§ 2	可分离变量的方程	(209)
2.1	可分离变量的方程	(209)

2.2	齐次方程	(210)
2.3	准齐次方程	(212)
§ 3	一阶线性方程	(215)
3.1	齐次线性方程	(216)
3.2	非齐次线性方程	(216)
3.3	Bernoulli 方程	(218)
§ 4	恰当方程和积分因子	(222)
4.1	恰当方程的概念	(222)
4.2	恰当方程的判别	(223)
4.3	积分因子的概念	(227)
4.4	积分因子的求法	(228)
§ 5	一阶隐式方程	(234)
5.1	参数形式的解	(235)
5.2	方程 $y = f(x, y')$	(236)
5.3	方程 $x = f(y, y')$	(237)
第十章	高阶方程和方程组的解法	(240)
§ 1	特殊的非线性高阶方程的解法	(240)
1.1	$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$ 型的方程	(240)
1.2	$y'' = f(x, y')$ 型的方程	(242)
1.3	$y'' = f(y, y')$ 型的方程	(243)
1.4	解题的灵活性	(244)
§ 2	二阶线性方程的解法	(247)
2.1	通解结构定理	(247)
2.2	置换法和视常数为变数法	(248)
2.3	常系数齐次线性方程的通解	(252)
2.4	待定系数法	(255)
2.5	幂级数解法	(259)

§ 3 方程组的初等积分法	(263)
3.1 方程组的概念	(263)
3.2 方程组中的名称	(264)
3.3 方程组的解法	(266)
第十一章 高阶线性方程	(274)
§ 1 解的存在与唯一性定理	(274)
1.1 Lipschitz 条件	(274)
1.2 一阶正规形方程解的存在与唯一性定理	(275)
1.3 高阶线性方程解的存在与唯一性定理	(279)
§ 2 函数间的线性关系	(279)
2.1 函数的线性相关和线性无关	(279)
2.2 相关性的判别	(281)
§ 3 通解结构定理	(285)
3.1 齐次方程通解的结构定理	(285)
3.2 非齐次方程通解的结构定理	(287)
3.3 常系数齐次方程的基本解组	(288)
3.4 解非齐次方程的待定系数法	(291)
3.5 欧拉方程	(293)
§ 4 奇解	(296)
4.1 奇解的概念	(296)
4.2 奇解的求法	(298)
第十二章 一阶偏微分方程	(307)
§ 1 名称和基本概念	(307)
1.1 一阶偏微分方程	(307)
1.2 通解和特解	(308)
§ 2 一阶线性齐次方程	(309)
2.1 特征方程组	(309)

2.2	首次积分与通解	(311)
2.3	多个自变量的线性齐次方程	(316)
§3	一阶拟线性方程	(318)
3.1	拟线性方程的解法	(318)
3.2	初值问题的解法	(320)
答案与提示		(324)

第一篇 场的数学描写方法

物理、力学中的场是物质存在的空间分布形式、场的数学描写方法，主要是引进描写场的各种分布特性的基本概念，建立场中所涉及的各种量的数量表示和计算方法，揭示场所遵循的基本规律。

本篇内容包括：数量场的梯度(第一章)；矢量场的散度(第二章)；矢量场的旋度(第三章)； ∇ 算符和三度在球、柱坐标系下的表达式和计算式。

第一章 数量场的梯度

本章的主要内容是引入梯度概念，讨论其物理和几何性质。数量场的梯度，是由数量场生成的矢量场。梯度是用来刻画数量场的变化及其不均匀性的，梯度有明显的几何意义。

本章的重点是方向导数、梯度概念、计算方法及其物理和几何性质。

§ 1 场和场的图解

1.1 场的概念和场的数学表示方法

在物理学中我们已知，一种物理量随着它在空间或一部分

空间的分布不同、时间不同，产生的物理现象也不相同。因此，要了解一物理现象，必须掌握发生这个现象的有关物理量的分布情况以及它们随时间变化的规律。例如，要了解电场的变化，必须知道电位、电场强度等物理量的分布及其随时间变化的规律。同样，要预报一地区在某一段时间内的气候，必须掌握该处附近地区的气压、气温的分布情况以及它们随时间变化的规律。这种物理量在空间或一部分空间上的分布就称为场。

场的数学表示方法 研究场和研究物理学、力学一样，是离不开数学工具的。当我们研究场的客观规律时，我们总是要研究它的数量关系，一定的客观规律必须用一定的数量形式才能表示出来。

下面通过例子来说明，场是如何由数量函数和矢量函数来表示的。

例 1.1 生活常识告诉我们，就是同一时刻，物体在各点的温度往往是不一样的。例如夏季晴天中午的时候，靠近地面的空气层就比较热。同一天中午，长春、南京、哈尔滨的气温也各不相同。所以在同一时刻，物体在点 (x, y, z) 处的温度，是由点 (x, y, z) 的位置决定的。通常用 D 表示我们考察气温的空间范围，用符号

$$T = T(x, y, z) \quad ((x, y, z) \in D) \quad (1.1)$$

来表示温度与位置的依赖关系。这样一来，对于 D 中每一点 (x, y, z) ，按照公式(1.1)都对应着一个温度，这些温度的全体，就给出温度在空间 D 上的分布，称它为温度场。

例 1.2 我们知道，一个面上的压强等于所受压力跟受力的面积的比。我们还知道，在静止液体的某一深处，液体重量所引起的压强是与深度有关的，越深压强越大。当然液体各点的压强不仅与重量有关，而且还与外力有关。外力一定，液体中每一点 (x, y, z) 处的压强 P 就是确定的。如果用 D 表示被我们研究的液体的空间范围，用符号

$$P = P(x, y, z) \quad ((x, y, z) \in D) \quad (1.2)$$

表示压强与位置之间的关系. 这样, 对于 D 中每一点 (x, y, z) , 由(1.2)式对应着一个压强, 这些压强的全体, 就给出压强在空间 D 上的分布, 称它为压力场.

例 1.3 河水的水在每一点 (x, y, z) 处都有个速度 $\boldsymbol{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$. 我们知道水在河当中的地方流得比较急, 靠近岸边的地方流得比较慢. 而河面窄的地方的水则往往要比河面宽的地方的水流得快些等等. 所以在给定的时刻, 河里每一点处水流速度的三个分量 v_x, v_y, v_z 的数值, 依赖于所考虑的位置, 即

$$\boldsymbol{v} = \{v_x(x, y, z), v_y(x, y, z), v_z(x, y, z)\}$$

假如还考虑潮水的涨落等等, 就应该考虑时间的因素, 每个速度分量就要依赖于四个变量 (x, y, z, t) . 这些速度 \boldsymbol{v} 就给出了速度在河里的分布, 把它叫做速度场.

1.2 场的分类和场的图形表示法

场因它的数学表现形式不一样可分为两种: **数量场**和**矢量场**. 如果描写场的量是数量函数, 我们就称这个场是数量场. 例如温度场、压力场就是数量场. 如果描写场的量是矢量函数, 就称这个场是矢量场. 速度场、电磁场及引力场都是矢量场.

如果场描写的物理量, 仅随位置变化, 则称此场为**稳定场**; 如果场描写的物理量, 不仅随位置变化, 而且也随时间变化, 则称此场为**非稳定场**, 或称**变化场**. 现实中的场多是非稳定场. 但在某些实际问题中, 如果在较短时间内, 在同一位置上的物理量变化不大, 为简化研究, 可以把非稳定场看作稳定场. 一般的电磁场是非稳定的矢量场, 静电场和静磁场则都是稳定场.

场的图形表示法 除用点的函数来描写场的物理、力学性