大學用書

材料力學(下册)

Mechanics of Materials

原著者：S. P. Timoshenko

James M. Gere

譯述者：王　樅　張伯烈　趙國華

修　訂　版

發行者　科技圖書股份有限公司

本公司經新聞局核准登記
登記證局版臺業字第1123號

書　名：材料力學（下册）
原著者：Timoshenko and Gere
譯述者：王　樅　張伯烈　趙國華
發行人：趙　國　華
發行者：科技圖書股份有限公司
臺北市博愛路185號二樓
電話：3110953
郵政劃撥15697號

六十二年一月初版
六十七年三月六版
特價新臺幣40元

鐵馬興歌傳略

鐵馬興歌（Stephen P. Timoshenko）教授1878年12月22日生於烏克蘭尼亞的小村。1889年攷入龍尼城的鐵路學堂，於1896年畢業，同年攷入交通工程學院，1901年畢業經一年軍訓後卽入該院的力學實驗室任研究員。1902年轉入聖彼得堡工學院任職，1906年獲得基輔工學院之教授職位1907年開始擔任教授材料力學課程，他以由簡入深的教材非常成功的建立這種教授法而受到學生們的歡迎與敬仰。根據三年來編寫的講義在1911年出版「材料力學」一書。同年他以兼任土木系主任而突被解職，以致生計發生困頓，但他仍繼續不倦致力於研究工作，於1913年出版「彈性力學理論」一書。1914年大戰爆發，俄境動亂不安，在此數年中，他與其家人共渡艱苦歲月凡六年，但他對力學的研究仍楔而不捨，1918年寫成一本「不用微積分之材料力學」。其後俄國大革命起，全境混亂異常，1920年七月携眷離俄而抵南斯拉夫，首在沙瑞工學院任教二年。1922年6月22日渡美。1923年入西屋研究實驗室之力學研究小組任研究工程師，利用晚上時間爲公司同仁開設進修班講授材料力學，並一手促成美國機械工程學會力學組之建立，1928年轉入密歇根大學任教，除任課外，埋首寫作先後出版「材料力學」、「工程震動學」、「彈性穩定理論」、「工程力學」、「彈性力學」等書，由於內容都屬權威性，不但可作標準教科書用，且可作爲職業工程師及學生們的重要參攷來源，因而風靡全國，傳譯全球。1936年氏由密大轉至史丹福大學任教，在任內又出版了「平板及曲板理論」、「結構理論」與「高等動力學」等書。1944以年屆65歲由史大正式退休，遷居德國與其親生女團敘共度餘年。但每年仍爲史大開授有關「材料力學史」及「材料物理性」等課，直至75歲始止。他著作等身，除上述的各種權威性著作外，在1959年曾出版一本「俄國工程教育」，1963年他用俄文寫其「自傳」先在法國出版，1967年的美譯本在美國發行。1971年與其高足Gere氏合著"mechanics of materials"卽本書的原本，由D. von Nostrand書局出版，他雖親見此書之完成，但不幸於1972年5月29日逝世，享年九十有三，相隔不過半年耳。故本書可謂其最後遺作，因而彌足珍貴。我們深深哀悼他的逝世，也將永遠珍惜他爲我們播下了許多的種子。

爲了飲水思源，吾們將這位傑出的力學大師的生平，作上述的傳略以供讀者之景仰。

科技圖書公司編輯部　謹誌

六十三年一月

材料力學（下冊）

目　　録

第七章　靜不定樑

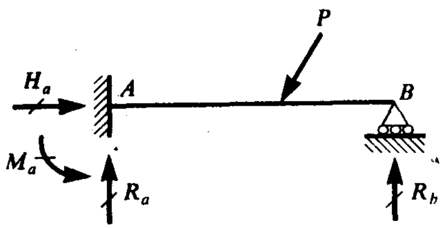
第八章　不對稱彎曲

第九章　非彈性彎曲

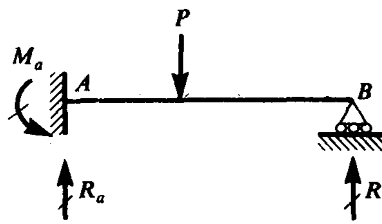
第七章　靜不定樑

7.1　靜不定樑

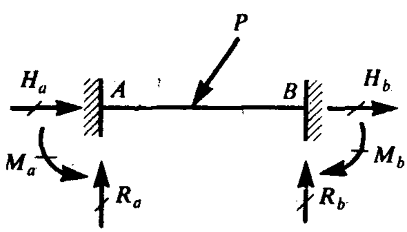
在本章內我們將研究那些樑的分析工作，樑所具的反力數大於其靜力平衡方程式之數。如此之樑被稱靜不定樑（statically indeterminate beam）。彼等的分析工作，需將其撓度一併考慮在內。在以前各章中，僅研究靜定樑，且在每一實例中，可由靜力平衡方程式立刻獲得樑上的各個反力。由已知反力，我們即可獲得彎曲力矩及剪力，並因此要求應力及撓度變成可能。若為一靜不定樑，僅以靜力學為依據，即不可能由解平衡公式而求得各應力值。代替的辦法，我們必須將樑的撓度一併加入考慮，並獲得適合的方程式以輔助靜力學方程式之不足。與此相同的步驟，曾在第一章內，為靜不定問題所包含受拉力及受壓力的構材，加以討論。



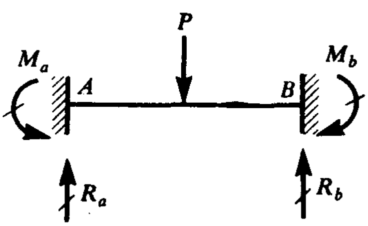
(a)



(b)

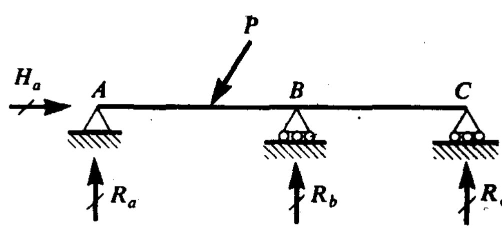


(c)



(d)

(e)



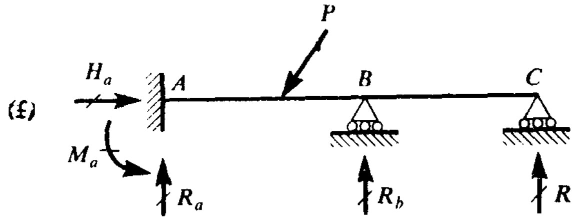


圖7—1　靜不定樑

有幾種靜不定樑的型式在圖7—1內舉例說明。在該圖(a)之樑，在其支承A處爲固定（被夾住）並在B點爲簡支者；此樑稱謂支撐懸臂樑（propped cantilever beam），或稱"固定簡支（"fixed-simple"beam）樑。樑上的反力包括在A點的水平力及垂直力，在A點的力偶，及B點的垂直力。因該樑只能有三個獨立的靜力平衡方程式，因此不能只用靜力學算得該全部四個反力。反力的數目超出平衡方程式的數目，稱爲靜不定次數（degree of statical indeterminacy）。例如繪於圖7—1 a內之樑，即爲一次靜不定。任何數目超出需要用以支承該結構，使其處於靜定狀況的反力，均被稱爲靜的贅餘力（statical redundants），而此類贅餘力的數目，則必與靜不定的次數相等。例如圖7－1a內所示之反力R_b，即可視爲一個贅餘反力。應注意者，當其被從該結構上移去之後，便只剩下一根懸臂樑。當贅餘力被放鬆之後，所剩下的靜定結構，即被稱爲放鬆結構（released structure）或主結構（primary structure）。另外研究圖7－1a之樑的辦法，將反力矩M_a視作贅餘反力。如被移去，則該被放鬆的結構，爲一根簡支樑；在樑上的A點爲一個樞接支承而在B點爲一個輥軸支承。

若在樑上的一切載重均爲垂直（見圖7－1b），即將發生一個特殊情形，因在此時水平反力將消失不見。但該樑依然是一次靜不定，在當時只有兩個各自獨立的靜不定平衡方程式，而具有三個反力。

一根固定端樑，有時被稱爲"固定-固定"（fixed-fixed beam）樑，如圖7－1c內所示。在每一支承處有三個反力，因此該樑總共有6個未知反力。因爲只有三個平衡方程式，故該樑爲三次靜不定。若我們將其一端的各種反力當作三個贅餘反力，且將彼等自該結構上移去，即剩下一根懸臂樑成爲被放鬆的結構。若我們將兩個固定端力矩及一個水平反力移去，則該放鬆的結構爲一根簡支樑。

再研究只負垂直載重的特殊情形（圖 7－1d），我們所遇到的只有 4 個反力需要決定。靜力平衡方程式的數目爲兩個，因此該樑爲二次靜不定。如圖 7－1e 內所示，剩下的兩根樑，係爲連續樑之例；被稱爲連續樑，係因彼等具有的孔數比一多，且在一個支承上連續跨越之故。圖 7－1e 內所示之樑，爲一次靜不定樑，因有 4 個反力，但只有三個靜力平衡方程式之故。若 R_b 被選作贅餘反力，且將其從該樑上移去，於是只剩下一根靜定的簡支樑 AC。若 R_c 被選作贅餘反力，則被放鬆的結構將爲一根簡支樑 AB，具有一段懸出的部分 BC。在該圖內所示的最後一根樑，爲二次靜不定樑。我們可將 R_b 及 R_c 選作贅餘反力，被放鬆的結構爲一根懸臂樑。

在以下各節，我們將討論分析靜不定樑的各種方法。在每一種情形的目的均爲決定贅餘反力，因在各贅餘反力已知之後，則剩餘各力的數量，將永遠可利用靜力學求得。在各力已知之後，我們卽能決定在任何一點上的各項應力及撓度。

7.2　撓度曲線之微分方程式

靜不定樑可由解撓度曲線的微分方程式分析之。其主要程序與用來分析靜定樑相同（參閱第 6.1 節至第 6.3 節）。由建立微分方程式，求得其通解，並應用邊界條件以估計積分常數等步驟。或採用彎曲力矩爲詞之二階方程式（方程式 6－9a），以剪力爲詞的三階方程式（方程式 6－9b），或以橫向載重的強度爲詞的四階方程式（方程式 6－9c）。永遠具有足夠的邊界條件，不但可用以確定積分常數，且可用以求得贅餘反力。因爲有數目很多的常數需要估計，因而引起計算上的困難，故此種方法僅對於載重比較簡單的情形，及僅有單孔之樑，始能實際應用。

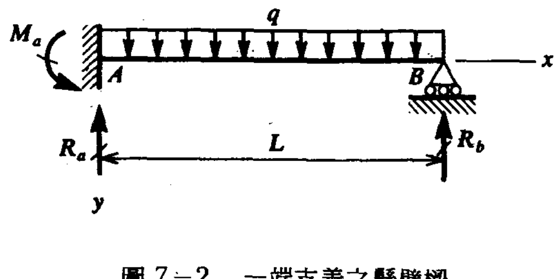


圖 7－2　一端支着之懸臂樑

爲舉例說明此種方法，讓我們分析一端支着的懸臂樑負荷均佈載重如圖 7－2 所示。若我們選擇解二階微分方程式法，則分析方法變成獲取在該樑任何截面

上彎曲力矩的一個式子。爲達到這個目的，我們需要選擇一個贅餘反力，並以該贅餘反力爲詞，以表示所有其他的一切反力。讓我們選擇反力 R_b 作爲該贅餘反力；於是從靜力平衡方程式，我們可看出以 R_b 爲詞，在 A 點上的各反力爲；

$$R_a = qL - R_b \qquad M_a = \frac{qL^2}{2} - R_bL$$

至此，我們可以 R_b 爲詞，爲彎曲力矩獲一通用的式子：

$$M = R_a x - M_a - \frac{qx^2}{2} = qLx - R_b x - \frac{qL^2}{2} + R_bL - \frac{qx^2}{2}$$

於是撓度曲線的微分方程式即變成：

$$EIv'' = -M = -qLx + R_b x + \frac{qL^2}{2} - R_bL + \frac{qx^2}{2}$$

經接連兩次積分，得到：

$$EIv' = -\frac{qLx^2}{2} + \frac{R_b x^2}{2} + \frac{qL^2 x}{2} - R_bLx + \frac{qx^3}{6} + C_1$$

$$EIv = -\frac{qLx^3}{6} + \frac{R_b x^3}{6} + \frac{qL^2x^2}{4} - \frac{R_bLx^2}{2} + \frac{qx^4}{24} + C_1x + C_2$$

在這幾個方程式內，有三個未知數（C_1，C_2 及 R_b），而三個邊界條件爲；

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v(L) = 0$$

應用這幾個條件，在以前的幾個方程式內，得到 $C_1 = 0$，$C_2 = 0$ 與

$$R_b = \frac{3qL}{8} \tag{7-1}$$

至此，採用已確定的贅餘反力 R_b 值，從方程式(a)，可很容易的求得其餘各個反力，

$$R_a = \frac{5qL}{8} \qquad M_a = \frac{qL^2}{8} \tag{7-2}$$

此時，我們可將這些數量代入撓度 v，傾斜度 v' 及彎曲力矩 M 等方程式內，由此獲得該樑的完整分析。

另外一個分析該樑的方法，如圖 7－2 所示，以反力的彎曲力矩 M_a 爲該贅餘反力。於是需要以 M_a 爲詞代表彎曲力矩 M，將得到的式子代入二階微分方程式，再照以上的方法。另外一個途徑是由四階微分方程式開始，將在下列例題中加以說明。

【例題】　試用解撓度曲線的四階微分方程式，以分析圖 7－3 所示的固定端樑。

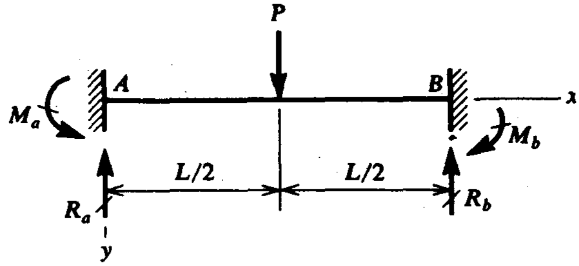


圖7－3　例題　固定端樑

集中載重P作用在樑的中點，因此我們從對稱關係，即可斷令$M_b=M_a$，及$R_a=R_b=P/2$。於是只剩下一個贅餘數量留待確定。在$x=0$及$x=L/2$的區段內，樑上並無載重，因此撓度曲線的微分方程式成為：

$$EIv''''=0$$

從此式產生下列各式：

$$EIv'''=C_1 \qquad (a)$$

$$EIv''=C_1x+C_2 \qquad (c)$$

$$EIv'=\frac{C_1x^2}{2}+C_2x+C_3 \qquad (d)$$

$$EIv=\frac{C_1x^3}{6}+\frac{C_2x^2}{2}+C_3x+C_4 \qquad (e)$$

可應用於該樑左半孔的邊界條件如下：首先，在整個樑上這一部分的剪力等於R_a；於是從方程式(b)我們可得$C_1=-P/2$。下一步，我們可看出，在$x=0$處的彎曲力矩等於$-M_a$，因此從方程式(c)我們可得$C_2=M_a$。關於傾斜度（方程式d），有兩個條件，即在$x=0$及$x=L/2$時，$v'=0$。這兩個條件產生$C_3=0$及：

$$M_a=\frac{PL}{8} \qquad (7\text{-}3)$$

由此可將贅餘力矩求得。最後，在$x=0$時，$v=0$，從此式得出$C_4=0$。將一切結果合併，我們可寫出下列的撓度曲線公式：

$$v=\frac{Px^2}{48EI}(3L-4x) \qquad \left(0\leq x\leq\frac{L}{2}\right) \qquad (7\text{-}4)$$

且可以從求此方程式之微分，而得出傾斜度及彎曲力矩。

與此例題同樣眞實，數目充分夠用的邊界條件，將永遠存在；不但可求得各個積分常數，且可用來求得各贅餘反力。有時需要爲該樑的一個以上的區段，分別建立各該區段的微分方程式，再利用介於各區段間的連續條件，一如以前在靜定樑所完成者，以完成其分析*。

7.3 重疊法

此種方法，可認爲靜不定結構分析的最基本辦法。重疊法（method of superposition）除可應用於樑，即在本章中爲我們所最關心者，且可應用於許多型式不同的結構如桁構及剛構架等。在以前，我們曾應用這個方法來分析靜不定系統之由受拉力及壓力構材所構成者（參閱第 1.6 節）。

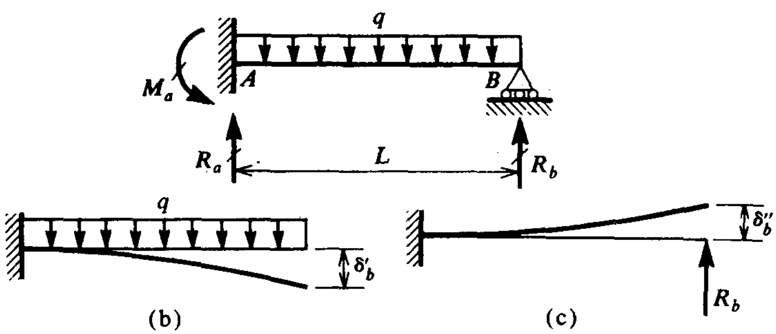


圖 7－4 重疊法

重疊法之本質，可用很簡單的詞句加以說明。第一個步驟，爲鑑定靜力學的贅餘反力，如上節中所說明者。於是再將贅餘的鉗制力從靜不定樑上移去，剩下一個被放鬆的靜定結構。在這個被放鬆的結構上，任何一個想要得到的變位，可利用第六章中所述的技巧求得。特別是與贅餘反力相當的變位（或作直線移動或作旋轉），而由載重所引起者，可被確定。下一步驟，各反力的本身可想像爲被放鬆結構上起作用的載重，而與其相當的變位即可計算得出。從重疊原理我們知道，由於實際載重及各贅餘反力同時起作用而導致的最終變位，必等於由分開計算得到的各個變位之和。以鉗制力爲贅餘反力的情形中，與其相當的變位，或者爲零，或爲另外已知之量；因此我們可寫出重疊方程式，以表明此一事實。最後

*最早採用微分方程式作分析靜不定樑是Navier氏，在其所著材料強度書中出現。見Timoshenko，S.P.，History of strength of materials. 1953 P.73-77,232-233。

由這些方程式可解得各贅餘反力之值。在此項步驟之後，其他一切反力，即可從靜力平衡方程式予以確定。

在前段所述的各步驟，可經由舉例說明使其更容易了解清楚。讓我們再分析一端支着的懸臂樑，負荷一項均佈載重（見圖 7－4 *a* ）。當反力 R_b 被選爲靜贅餘力，且與其相當的鉗制力被移去後，我們即可獲得一根懸臂樑作爲被放鬆的結構。此樑相當於由贅餘力及其均佈載重所引起的撓度，用 δ_b'（見圖 7－4*b*）表示之。由贅餘力所引起的撓度，則用 δ_b''（見圖 7－4*c*） 表示之。在原來結構上的全部撓度 δ_b 可由撓度 δ_b' 及 δ_b'' 重疊加在一起而獲得且必須爲零。由此項結論，導出下列的重疊方程式：

$$\delta_b = \delta_b' - \delta_b'' = 0 \tag{a}$$

該(-)號出現在這方程式內，是由於 δ_b' 爲向下的而 δ_b'' 則爲向上的。由於均佈載重 q 及反力 R_b 所致的撓度 δ_b' 及 δ_b''，可借助在附錄 D 中之附表 D-1 （見第 1 種及第 4 種情形）很容易求得。採用在該附錄所提供的公式，我們可從方程式(*a*)得到：

$$\delta_b = \frac{qL^4}{8EI} - \frac{R_bL^3}{3EI} = 0$$

從上式可得：

$$R_b = \frac{3qL}{8} \tag{7-5}$$

至此，反力 R_a 與力矩 M_a 可由考慮樑的平衡而求得，其結果爲：

$$R_a = \frac{5qL}{8} \qquad M_a = \frac{qL^2}{8} \tag{7-6}$$

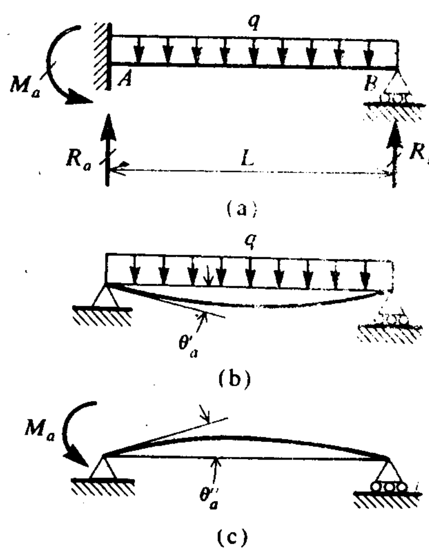


圖 7－5　重疊法

同一根樑，可另用一種方法，將力矩 M_a 當作贅餘力加以分析，在那種情形的被放鬆結構，將爲一根簡支樑（圖 7－5*b*）。因在被放鬆結構上起作用的均佈載重所產生的旋轉角（附表 D-2 情形 1）爲：

$$\theta_a' = \frac{qL^3}{24EI}$$

與其相當的旋轉角由贅餘力矩 M_a 所引起者（表 D-2，情形 7）爲：

$$\theta_a'' = \frac{M_a L}{3EI}$$

用重疊方程式來表示在原樑支承A點的總旋轉角爲零，寫成

$$\theta_a = \theta_a' - \theta_a'' = \frac{qL^3}{24EI} - \frac{M_a L}{3EI} = 0 \qquad \text{(b)}$$

解此方程式，我們得到$M_a = \dfrac{qL^2}{8}$，與以前所得的結果符合。

在求出一根靜不定樑的各反力之後，一切應力合力的計算（軸向力，剪力及彎曲力矩等），將不會有任何困難。因靜力平衡的方程式已足夠達成此項用途。此外，可利用撓度曲線的微分方程式，或聯合應用重疊原理與附錄D內所列之撓度公式，以獲得任何一點上的撓度及傾斜度。在以下所舉例題及在本章習題內，其注意力將着重在如何求得各個反力，因爲這是解法中的主要關鍵步驟。

本節內所使用的分析方法，常被稱之爲韌性分析法（flexibility method of analysis）或稱爲力分析法（force method of analysis）。後一名詞，起源於用力量（力及力偶）作爲贅餘反力；而在前一名詞係因未知數的係數（如在方程式b之$L/3EI$項）具有韌性之故，亦卽由單位載重所產生的韌度。此韌性，將在第十一章內作更廣泛的討論，在該章內，這一結構分析主題，將以一種普遍化的形式提出。重疊方程式表示加於韌度上的條件（見方程式a及b），常稱爲適合性方程式（equations of compatibility）。

【例題】1. 示於圖7－6a 內的兩孔連續樑，各個反力以重疊方法決定之。注意，該樑是承受強度爲q 的均佈載重。

選擇中間反力R_b爲贅餘反力，我們明白，被放鬆的結構爲一根簡支樑（圖7－6b）。在均佈載重作用下，被放鬆結構內B點的撓度（參照表D-2 情形1）爲：

$$\delta_b' = \frac{5q(2L)^4}{384EI} = \frac{5qL^4}{24EI}$$

式中的L爲每孔長度。因贅餘反力而產生的向上撓度（參閱圖7－6c）爲：

$$\delta_b'' = \frac{R_b(2L)^3}{48EI} = \frac{R_b L^3}{6EI}$$

上式係從附表D-2，情形4查得。屬於B點垂直撓度的適合性方程式爲：

$$\delta_b = \delta_b' - \delta_b'' = \frac{5qL^4}{24EI} - \frac{R_b L^3}{6EI} = 0$$

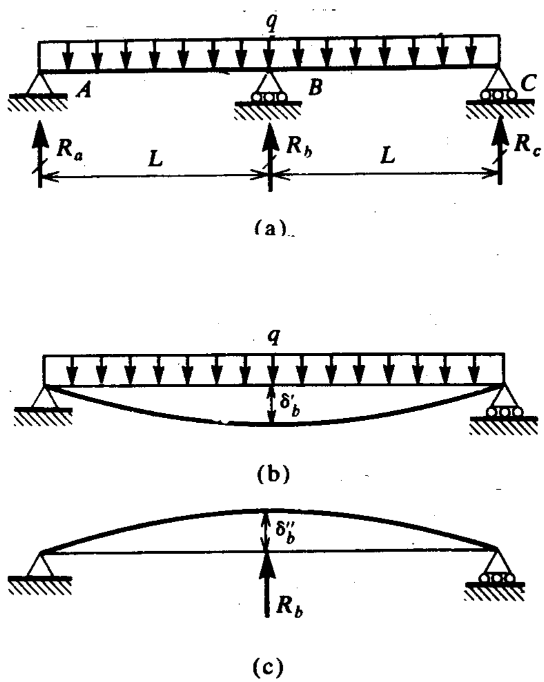


圖 7－6　例題 1　雙孔連續樑.

由此式求得：

$$R_b = \frac{5qL}{4} \tag{7-7}$$

另外兩個反力值爲 $R_a = R_c = 3qL/8$，係從靜力平衡獲得之。在所有反力已知後，在進行求應力合力及撓度時，將無任何困難。

【例題】2. 一根具兩固定端之樑負荷一個集中載重 P，如圖 7－7a 所示。求該樑兩端所起之反力及反力力矩。

讓我們選擇反力力矩 M_a 及 M_b 爲贅餘反力，因而得到一個形式爲簡支樑的被放鬆結構（圖 7－7b）。由載重 P 使樑兩端所起之旋轉角由附表 D-2，情形 5 內查得：

$$\theta'_a = \frac{Pab(L+b)}{6LEI} \qquad \theta'_b = \frac{Pab(L+a)}{6LEI}$$

至此，我們可將贅餘彎曲力矩 M_a 及 M_b 當作載重一樣，加於該已被放鬆的結構上（圖 7－7c 及 d）。在樑之兩端，因 M_a 而產生的旋轉角爲：

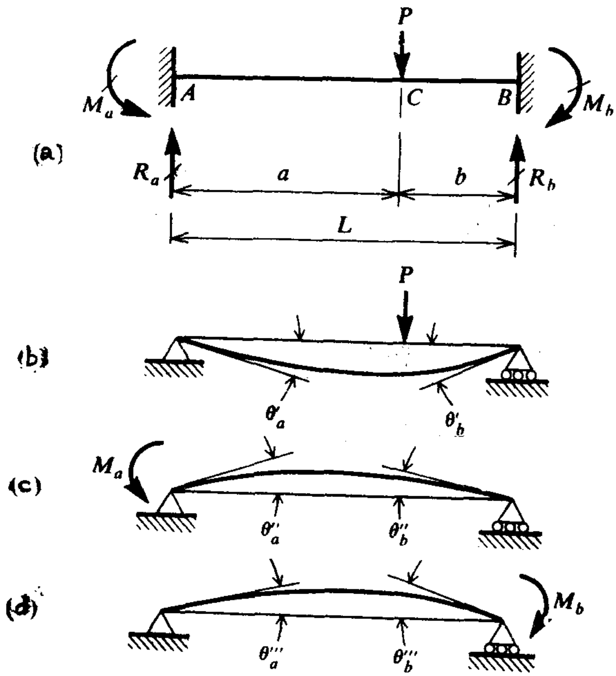


圖 7－7 例題 2 固定端樑

$$\theta''_a = \frac{M_a L}{3EI} \qquad \theta''_b = \frac{M_a L}{6EI}$$

因M_b而產生的旋轉角則爲：

$$\theta'''_a = \frac{M_b L}{6EI} \qquad \theta'''_b = \frac{M_b L}{3EI}$$

在原樑兩端的旋轉角應爲零，我們可得兩個適合性方程式：

$$\theta_a = \theta'_a - \theta''_a - \theta'''_a = 0$$
$$\theta_b = \theta'_b - \theta''_b - \theta'''_b = 0$$

將各個旋轉角的式子代入上列兩個適合性方程式後，我們得到兩個以M_a及M_b的聯立方程式：

$$\frac{M_a L}{3EI} + \frac{M_b L}{6EI} = \frac{Pab\,(L+b)}{6LEI}$$

$$\frac{M_a L}{6EI}+\frac{M_b L}{3EI}=\frac{Pab\,(L+a)}{6LEI}$$

由兩式解之得：

$$M_a=\frac{Pab^2}{L^2}\qquad M_b=\frac{Pa^2b}{L^2}\tag{7-8}$$

應用此結果與平衡方程式，我們求得垂直反力公式：

$$R_a=\frac{Pb^2}{L^3}\,(L+2a)\qquad R_b=\frac{Pa^2}{L^3}\,(L+2b)\tag{7-9}$$

茲舉例說明如何應用重疊原理以獲得撓度，讓我們計算在固定端樑C點上的撓度，C點是該載重的施力點（附圖7－7b），其撓度爲：

$$\delta_c'=\frac{Pa^2b^2}{3LEI}$$

係從附表D-2，情形5查得。由於力偶M_a及M_b（參閱圖7－7c及d），在被放鬆結構的同一點上之向上撓度爲；

$$\delta_c''=\frac{M_a ab}{6LEI}\,(L+b)\qquad \delta_c'''=\frac{M_b ab}{6LEI}\,(L+a)$$

係從附表D-2，情形7查得。將方程式（7－8）內M_a及M_b值代入，以上兩式將化爲：

$$\delta_c''=\frac{Pa^2b^3}{6L^3EI}\,(L+b)\qquad \delta_c'''=\frac{Pa^3b^2}{6L^3EI}\,(L+a)$$

於是在C點的總撓度爲：

$$\delta_c=\delta_c'-\delta_c''-\delta_c'''=\frac{Pa^3b^3}{3L^3EI}\tag{7-10}$$

當載重P置在樑中點時，在樑中點的撓度爲：

$$\delta_c=\frac{PL^3}{192EI}\tag{7-11}$$

而反力爲：

$$M_a=M_b=\frac{PL}{8}\qquad R_a=R_b=\frac{P}{2}\tag{7-12}$$

【例題】3. 試求一根固定端樑在其跨徑一部份負有均佈載重時之各反力（見圖7－8）。

讓我們先將距樑左端距離x處之一個載重元體$q\,dx$予以孤立。將元體當作一個集中載重，我們即可應用例題2內所導得之公式。從力矩M_a及M_b公式開始（

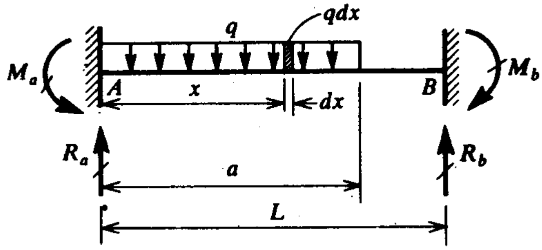


圖7－8 例題3 固定端樑在跨徑一部份負有均佈載重

參照方程式7－8），我們可以qdx代替P，以x代替a，並以（$L-x$）代替b；於是因載重元體所產生的固定端力矩爲：

$$dM_a=\frac{qx(L-x)^2dx}{L^2}\qquad dM_b=\frac{qx^2(L-x)dx}{L^2}$$

求該樑的載重部分長度上的積分，得

$$M_a=\int dM_a=\frac{q}{L^2}\int_0^a x(L-x)^2dx=\frac{qa^2}{12L^2}(6L^2-8aL+3a^2)\qquad(7\text{-}13)$$

$$M_b=\int dM_b=\frac{q}{L^2}\int_0^a x^2(L-x)dx=\frac{qa^3}{12L^2}(4L-3a)\qquad(7\text{-}14)$$

與此相似，在樑兩端的反力，可借助方程式（7－9）而得：

$$R_a=\frac{q}{L^3}\int_0^a (L-x)^2(L+2x)dx=\frac{qa}{2L^3}(2L^3-2a^2L+a^3)\qquad(7\text{-}15)$$

$$R_b=\frac{q}{L^3}\int_0^a x^2(3L-2x)dx=\frac{qa^3}{2L^3}(2L-a)\qquad(7\text{-}16)$$

即爲所求的結果。

若一根固定端樑在其跨徑的全部負均佈載重（圖7－9）時，我們可將$a=L$代入上式，而獲得其反力：

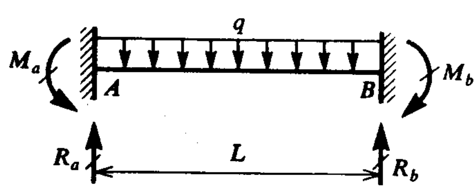


圖7－9 例題3 固定端樑負荷均佈載重