

科學圖書大庫

實用數學手冊

編譯者 繆龍驥

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

監修人 徐銘信

發行人 陳俊安

科學圖書大庫

版權所有



不許翻印

中華民國七十二年七月七日四版

實用數學手冊

基本定價 5.60

編譯者 繆龍驥 國立台灣大學教授

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。 謝謝惠顧

局版臺業字第1810號

出版者 臺北市徐氏基金會 臺北市郵政信箱 13-306 號

發行者 臺北市徐氏基金會 郵政劃撥帳戶第 15795 號

承印者 大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號

電話 9221763
9271575
9271576
9286842

電話 9719739

數學符號*

I. 關係符號

$=$ 等號
 $\equiv$ 恆等
 $\neq$ 不等

$\approx$ 近似
 $<$ 小於
 $>$ 大於

$\leq$ 小於或等於
 $\geq$ 大於或等於

II. 代 數

$ a $	數 a 之絕對值
$+$	加號
$-$	減號
$\cdot$ 或 $\times$	乘號，例如 $a \cdot b$ 或 $a \times b$ ；乘號常被省略，例如： ab 。
$:$ 或 $-$	除號 ($a : b$ 或 $\frac{a}{b}$)
a^m	a 之 m 次冪
$\sqrt{\quad}$	根號，例如： $\sqrt{a}$
$\sqrt[n]{\quad}$	n 方根，例如： $\sqrt[n]{a}$
$\log_b$	b 為底之對數，例如： $5 = \log_2 32$ (第124頁)
$\lg$	十為底之對數，例如： $2 = \lg 100$ (第124頁)
$\ln$	自然對數，例如： $1 = \ln e$ (第124頁)
$(\quad), \{\quad\}, \{\{\quad\}\}$	括號 (表示運算順序)
$!$	階乘，例如 $a!; b!; 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ $= 720$ (第156頁)

*括號中的頁數指出本文中解釋有關概念的位置。

III. 幾 何

⊥	垂直
	平行
#	相等並平行
~	相似，例如： $\triangle ABC \sim \triangle DEF$
$\triangle$	三角形
$\angle$	角（有時用 $\sphericalangle$ ），例如： $\angle ABC$ ， $\sphericalangle ABC$
$\widehat{}$	弧段，例如： $\widehat{AB}$
°	度
'	分
"	秒
	角與圓弧之度量，例如： $32^\circ 14' 11.5''$

IV. 三角，雙曲線函數

sin	正弦	} (第175頁)
cos	餘弦	
tg	正切	
ctg	餘切	
sc	正割	
csc	餘割	} (第185頁)
Arcsin	反正弦	
Arccos	反餘弦	
Arctg	反正切	
Arcctg	反餘切	} (第185頁)
arcsin	反正弦之主值	
arccos	反餘弦之主值	
arctg	反正切之主值	
arcctg	反餘切之主值	

sh	雙曲正弦	} (第190—192頁)
ch	雙曲餘弦	
th	雙曲正切	
cth	雙曲餘切	
sch	雙曲正割	
csch	雙曲餘割	} (第192頁)*
Arsh	反雙曲正弦	
Arch	反雙曲餘弦	
Arth	反雙曲正切	
Arcth	反雙曲餘切	

V. 常數記號

const	常數 (Konstante)
$\pi = 3.14159 \dots$	圓周率 (第165頁)
$e = 2.71828 \dots$	自然對數之底 (第275頁)
$C = 0.57722 \dots$	歐拉常數 (第275頁)

VI. 分析

$\lim$	極限值 (第264, 272 頁)	} 例如 $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N = e$
$\rightarrow$	趨於	
∞	無窮大	
$\sum$	和	
$\sum_{i=1}^n$	和, 其中 i (求和指標) 自 1 變至 n	
$f(\quad), \varphi(\quad)$	函數記號, 例如: $y=f(x), u \doteq \varphi(x, y, z)$	
$\triangle$	增量, 例如: $\triangle x$	
d	微分, 例如: dx (第303 頁)	

* 在許多書刊中使用不同的雙曲線函數記號。時常寫作 $\text{Sin } x, \text{Cos } x, \text{Tan } x, \text{Cot } x$ 以及對於反函數 $\text{Ar Sin } x, \text{Ar Cos } x, \text{Ar Tan } x, \text{Ar Cot } x$ 。也常用 $\text{Sh } x, \text{Ch } x, \text{Th } x, \text{Cth } x$ 以及 $\text{sinh } x, \text{cosh } x, \text{tgh } x, \text{ctgh } x$ 的寫法, 反函數有時在所用函數記號上加指數 -1 表示, 即如對於 $\text{Arch } x$ 寫作 $\text{ch}^{-1} x$ 。

$$\left. \begin{array}{l} d_x, d_y \text{ 等} \\ ', ', ', \text{ IV, 或} \\ \cdot, \cdot\cdot, \cdot\cdot\cdot, \cdot\cdot\cdot\cdot \end{array} \right\}$$
$$\frac{d}{dx}, \frac{d^2}{dx^2} \text{ 等}$$
 $\mathcal{D}$
$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

5

b

f
a

f

 (k)
$$f_S, f_V$$

44

fff

偏微分，例如： $d_x u$ （第304頁）

一個自變數的函數的各階導數記號，例如函數

$$y=f(x):f'(x), f''(x), f'''(x), f^{IV}(x), y'.$$
 $y'', y''', y^{IV}, \dot{y}, \ddot{y}, \ddot{\ddot{y}}$ (第303, 306 頁)

一階導數

一階道數

一
等

導數之記號（微分算子），例如： $Dy = y'$ ，

$D^2y = y''$ 等 (第303, 306 頁)

偏導數，例如： $f'_x(u)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 等(第304,306頁)

積分號（第334頁）

定積分，自界限 a 至界限 b (第383頁)

曲線積分，在弧段 k 或在其射影上(第414, 417頁)

積分，在曲面 S 上或在立體 V 上(第423,425頁)

二重積分 } (第423, 424頁)
三重積分 }

VII. 複 數

i (有時 *j*)

 $\Re(a)$

3 (a)

| a |

 $\arg a$ $\overline{a}$

虛數單位 ($i^2 = -1$) (第507頁)

複數 a 之實部 (第 507 頁)複數 a 之虛部 (第 507 頁)

a 之絕對值 (第 508 頁)

a 之幅角 (第508頁)

與 a 共軛之複數，例如 $a = 2 + 3i$ ， $\bar{a} = 2 - 3i$
(第 509 頁)

La

複數之(自然)對數(第513頁)

VIII 向量分析

a, b, c 或 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$	向量之記號 (第534頁)
a°	單位向量, 與向量 a 有相同方向 (第534頁)
i, j, k	笛卡兒坐標三角形之單位向量 (第534頁)
$ a $ 或 a	向量 a 之長度 (絕對值) (第534頁)
$a = b$	向量之相等, 相加與相減 (第534頁)
$a + b$	
$a - b$	
αa	向量與純量相乘 (第535頁)
ab	向量之數積 (第537頁)
$a \times b$ 或 $[ab]$	矢積 (第537頁)
$abc = a(b \times c)$	混合乘積 (第538頁)
a_x, a_y, a_z	向量 a 在笛卡兒坐標系之坐標 (第538頁)
∇	漢彌頓微分算子 (Nabla 算子) (第561頁)
Δ	拉普拉斯算子 (第561頁)
grad	純量場之梯度向量 ($\text{grad } \varphi = \nabla \varphi$) (第551頁)
div	向量場之發散量 ($\text{div } \mathfrak{B} = \nabla \cdot \mathfrak{B}$) (第559頁)
rot	向量場之旋轉向量 ($\text{rot } \mathfrak{B} = \nabla \times \mathfrak{B}$) (第560頁)
$\frac{\partial U}{\partial c}$	純量場依方向 c 之導數 (方向導數) (第551頁)

德文字母

$\mathcal{A}$	$\mathcal{a}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{b}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{c}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{d}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{e}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{f}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{g}$	$\mathcal{H}$	$\mathcal{h}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{i}$	$\mathcal{J}$	$\mathcal{j}$	$\mathcal{K}$	$\mathcal{k}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{l}$	$\mathcal{M}$	$\mathcal{m}$
$\mathcal{A}$	$\mathcal{a}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{b}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{c}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{d}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{e}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{f}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{g}$	$\mathcal{H}$	$\mathcal{h}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{i}$	$\mathcal{J}$	$\mathcal{j}$	$\mathcal{K}$	$\mathcal{k}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{l}$	$\mathcal{M}$	$\mathcal{m}$
$\mathcal{N}$	$\mathcal{n}$	$\mathcal{O}$	$\mathcal{o}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{p}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{q}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{r}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{s}$	$\mathcal{T}$	$\mathcal{t}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{u}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{v}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{w}$	$\mathcal{X}$	$\mathcal{x}$	$\mathcal{Y}$	$\mathcal{y}$	$\mathcal{Z}$	$\mathcal{z}$

希臘字母

A	α	A	α	Alpha	N	ν	N	ν	Ny
B	β	B	β	Beta	Ξ	ξ	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Γ	γ	Gamma	O	o	O	o	Omikron
Δ	δ	Δ	δ	Delta	Π	π	Π	π	Pi
E	ϵ	E	ϵ	Epsilon	ρ	ρ	ρ	ρ	Rho
Z	ζ	Z	ζ	Zeta	Σ	σ	Σ	σ	Sigma
H	η	H	η	Eta	T	τ	T	τ	Tau
θ	ϑ	θ	ϑ	Theta	Υ	υ	Y	υ	Ypsilon
I	ι	I	ι	Iota	Φ	φ	Φ	φ	Phi
K	κ	K	κ	Kappa	χ	χ	χ	χ	Chi
Λ	λ	Λ	λ	Lambda	ψ	ψ	Ψ	ψ	Psi
M	μ	M	μ	My	Ω	ω	Ω	ω	Omega

目 錄

第一編 數值表與曲線

I. 數值表	1
甲. 初等函數數值表	3
1. 常用常數	3
2. 平方, 立方數, 根值	4
3. 整數之冪, 自 $n = 1$ 至 $n = 100$	23
4. 倒 數	25
5. 階乘及其倒數	27
6. 整數 2, 3 及 5 之若干冪數	28
7. 十爲底之對數 (常用對數)	29
8. 逆對數	31
9. 三角函數之真數	33
10. 指數函數, 雙曲線函數及三角函數	37
11. 指數函數 (對於 x 自 1.6 至 10.0)	41
12. 自然對數	43
13. 直徑爲 d 之圓周	46
14. 直徑爲 d 之圓面積	48
15. 弓形之確定因數	50
16. 角度換算爲弧度	56
17. 比例數值表	57
18. 二次內插法表	59
乙. 特種函數數值表	60
19. Gamma 函數	60
20. 貝塞爾函數 (柱面函數)	61

II

21. 勒威德多項式 (球面函數)	63
22. 橢圓積分	64
23. 機率積分	66

II. 圖形表示 68

甲. 初等函數 68

1. 多項式	68
2. 有理分式函數	70
3. 無理函數	75
4. 指數函數及對數函數	76
5. 三角函數	81
6. 反三角函數	84
7. 雙曲線函數	85
8. 反雙曲線函數	87

乙. 重要曲線 88

9. 三階曲線	88
10. 四階曲線	90
11. 擺線 (旋輪線)	94
12. 螺 線	99
13. 其他曲線	102

第二編 初等數學

I. 近似計算 105

1. 用近似值計算之規則	105
2. 近似公式	110
3. 計算尺	110

II 代 數 118

甲. 恆等變形 118

1. 基本概念	118
2. 有理整式	118
3. 有理分式	120
4. 無理式，冪式及根式之變形	123
5. 指數式及對數式	124
乙. 方程式	127
6. 代數方程式變形為標準形式	127
7. 一，二，三及四次方程式	129
8. n 次方程式	132
9. 超越方程式	135
10. 行列式	139
11. 線性方程式系之解法	142
12. 較高次方程式系	149
丙. 代數補編	150
13. 不等式	150
14. 級數，有限級數與平均值	154
15. 階乘及 Gamma 函數	156
16. 複合	157
17. 二項式定理	158

III. 幾何 160

甲. 平面幾何 160

1. 平面圖形 160

乙. 立體幾何 166

2. 空間直線與平面 166

3. 稜，多面角，空間角 166

4. 多面體 167

5. 由曲面圍成之立體 170

IV. 三角學 175

IV

甲. 平面三角學	175
1. 三角函數	175
2. 三角學之最重要公式	178
3. 正弦變量	181
4. 三角形之計算	182
5. 反三角函數 (測圓函數)	185
乙. 球面三角學	187
6. 球面幾何學	187
7. 球面三角形計算	188
丙. 雙曲線函數	190
8. 雙曲線函數之定義	190
9. 雙曲線函數之最重要公式	190
10. 反雙曲線函數	192
11. 雙曲線函數之幾何定義	193

第三編 解析幾何與微分幾何

I. 解析幾何	195
甲. 平面解析幾何	195
1. 基本概念與公式	195
2. 直 線	199
3. 圓	202
4. 橢 圓	203
5. 雙曲線	205
6. 拋物線	208
7. 二階曲線 (圓錐曲線)	210
乙. 空間解析幾何	212
8. 基本概念與公式	212
9. 空間中直線與平面	218
10. 二階曲面 (方程式爲標準式)	225
11. 二階曲面 (一般理論)	229

II. 微分幾何	231
甲. 平面曲線	231
1. 定義曲線之可能方法	231
2. 曲線之局部要素	231
3. 特徵點	238
4. 漸近線	242
5. 曲線依其方程式之一般討論	243
6. 漸屈線及漸伸線	245
7. 曲線族之包絡線	246
乙. 空間曲線	247
8. 曲線定義之方法	247
9. 伴隨三腳形	247
10. 曲率及撓率	250
丙. 曲 面	253
11. 曲面定義之方法	253
12. 切平面及法線	254
13. 曲面之線素	255
14. 曲面之曲率	257
15. 正則曲面及可展曲面	260
16. 曲面上之測地線	260

第四編 分析綱要

I. 分析緒論	261
1. 實 數	261
2. 級列及其極限	262
3. 單變數之函數	266
4. 函數之極限值	272
5. 函數絕對值之階	278
6. 函數之連續性及不連續性	279
7. 多變數函數	283

V

8. 數值級數.....	291
9. 函數級數.....	298

II. 微分學 303

1. 基本概念.....	303
2. 微分法.....	307
3. 微分式中之變數代換.....	315
4. 微分學之主要定理.....	317
5. 求極大值及極小值.....	320
6. 函數之幕級數展開式.....	325

III. 積分學 332

甲. 不定積分 332

1. 基本概念及定理.....	332
2. 一般積分規則.....	334
3. 有理函數積分法.....	336
4. 無理函數之積分.....	342
5. 三角函數之積分.....	346
6. 其他超越函數之積分.....	348
7. 不定積分表.....	349

乙. 定積分 383

8. 基本概念及主要定理.....	383
9. 定積分之計算.....	387
10. 定積分的應用.....	394
11. 瑕積分.....	400
12. 含有參數的積分.....	407
13. 若干定積分數值表.....	410

丙. 曲線積分，多重積分與曲面積分 414

14. 第一種曲線積分.....	414
15. 第二種曲線積分.....	417
16. 二重及三重積分.....	423

17. 多重積分之計算	425
18. 多重積分之應用	432
19. 第一種曲面積分	434
20. 第二種曲面積分	436
21. <u>司托克</u> ， <u>格林</u> 與 <u>高斯</u> 積分定理	440

IV. 微分方程式	442
1. 一般概念	442
甲. 常微分方程式	443
2. 一階微分方程式	443
3. 高階微分方程式與微分方程式系	455
4. 常係數線性微分方程式之解	460
5. 常係數線性微分方程式系	462
6. 常微分方程式之算子解法	466
7. 二階線性微分方程式	471
8. 邊界值問題	477
乙. 偏微分方程式	480
9. 一階微分方程式	480
10. 二階線性偏微分方程式	486

第五編 分析補編

I. 複數與單複變數函數	507
1. 基本概念	507
2. 代數運算	509
3. 初等超越函數	511
4. 曲線方程式在複數形式	516
5. 一個複變數之函數	518
6. 最簡單之保角變換	524
7. 複數之積分	526
8. 解析函數之冪級數展開式	530

Ⅱ. 向量分析	534
甲 向量代數及純量之向量函數	534
1. 基本概念	534
2. 向量之乘法	537
3. 向量之協變及抗變坐標	542
4. 向量代數在幾何之應用	543
5. 一個純量變數之向量函數	543
乙. 場 論	545
6. 純量場	545
7. 向量場	546
8. 梯度向量	551
9. 曲線積分與向量場之位能	553
10. 曲面積分	556
11. 空間微分	559
12. 向量場之發散量	559
13. 向量場之旋轉向量	560
14. 算子 ∇ (漢彌頓算子), $(\mathbf{a} \cdot \nabla)$ 及 Δ (拉普拉斯算子)	561
15. 積分定理	563
16. 無旋轉與螺線向量場	565
17. 拉普拉斯與包阿桑微分方程式	566
Ⅲ. 富理級數 (調和分析)	568
1. 一般觀察	568
2. 若干富理展開式表	573
3. 近似調和分析	577
Ⅳ. 變分法	581
1. 基本概念	581
2. 含一個未知函數之最簡單變分問題 (極值之必要條件)	582

3.	產生極值之充分條件	590
4.	在極坐標之變分問題	592
5.	變分法之逆問題	593
6.	在參數形式之變分問題	595
7.	基本函數包含高階導數	597
8.	含 n 個未知函數變分問題之 <u>歐拉</u> 微分方程式	599
9.	多重積分之極值	600
10.	附帶條件之變分問題	602
11.	變分法之等周問題	605
12.	含兩個自變數的兩個幾何變分問題	607
13.	解變分問題之 <u>李茲</u> 過程	609

第六編 觀測結果之計值

I.	機率論基礎及觀測誤差論	613
1.	機率論	613
2.	觀測誤差論	617
II.	經驗公式及內插法	623
1.	函數相關性之近似表示	623
2.	拋物內插法	626
3.	經驗公式之導出	630

附錄： 積分方程式

1.	一般概念	639
2.	簡單積分方程式，可由微分歸於常微分方程式者	640
3.	簡單積分方程式，可由微分解出者	642
4.	<u>亞倍爾</u> 積分方程式	643
5.	有乘積核之積分方程式	646
6.	<u>諾伊曼</u> 近似法（逐步逼近）	654