

弯曲薄板 功的互等新理论

付宝连 著



科学出版社

www.sciencep.com

河北省教育厅学术著作出版基金资助出版

弯曲薄板 功的互等新理论

付宝连 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书提出了功的互等定理的修正命题,开发出功的互等定理的新功能,发展了功的互等理论,建立了功的互等法,从而形成了求解弯曲薄板问题的功的互等新理论。本书共七章,主要内容包括:根据功的互等新理论,应用功的互等法系统地求解弯曲矩形薄板的平衡、振动和稳定问题,具有混合边界条件弯曲矩形板的平衡问题,以及弯曲圆板的平衡问题。书中以大量的计算表明,与通常求解控制微分方程方法比较,功的互等法具有简便、通用和有效等特点。同时,该法特别适用于求解特种载荷和复杂边界条件问题。此外,本书还给出了诸多边界条件问题,特别是复杂边界条件问题的大量的数据和图表以供参考使用。

本书可供高等院校土木工程、力学、航空和机械专业的师生以及相关领域的科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

弯曲薄板功的互等新理论/付宝连著. —北京:科学出版社,2003
ISBN 7-03-010622-9

I. 弯... II. 付... III. 互等原理—研究 IV. 0343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 048482 号

责任编辑:童安齐 责任校对:柏连海
责任印制:钱玉芬 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003年1月第一版 开本:720×1000 B5

2003年1月第一次印刷 印张:23

印数:1—2 000 字数:530 000

定价:50.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

前 言

弹性力学的能量原理包括变形能原理、变分原理、虚功和虚余功原理以及功的互等定理。国内外学者对变分原理本身及其解析和数值应用方面的研究倾注了大量的精力,并获得了丰硕的成果。同样地,对功的互等定理的研究也有很大进展。

在前人工作的基础上,作者于1981年1月,首先应用功的互等定理求解了悬臂矩形板的弯曲;稍后,于1982年提出了功的互等定理的修正命题,并在受单位集中载荷的四边简支矩形板和受分布载荷作用的悬臂矩形板之间应用功的互等定理,得出了悬臂矩形板的正确挠曲面方程,从而从计算上也证明了功的互等定理修正命题的正确性。该修正命题指出:对于形状、尺寸和材料完全相同而且处于真实状态的两个小变形的线性弹性体,不管它们的体力、边界力和边界位移是否相同,均有第一弹性体的外力在第二弹性体相应位移上所做的总功等于第二弹性体的外力在第一弹性体相应位移上所做的总功。而功的互等定理的Betti的经典命题为:对于同一弹性体,则有第一组外力(包括反力)在第二组外力相应位移上所做的总功等于第二组外力(包括反力)在第一组外力相应位移上所做的总功。比较功的互等定理的Betti的经典命题和我们的修正命题,易于发现,经典命题限定两组力于同一弹性体,而修正命题明确指出,功的互等定理适用于不同受力、不同静力边界条件和不同位移边界条件的两个弹性体。Betti经典命题限定的解放,扩展了功的互等定理的原有内涵,开发出功的互等定理的新功能。

由Betti的经典命题可导出位移互等定理、反力互等定理和位移反力互等定理三个定理。1985年,我们由该修正命题导出了功的互等定理与位移叠加等价性原理和功的互等定理与反力叠加等价性原理两个原理。实际上,这两个等价性原理是前述三个定理的推广。

这样,功的互等定理的修正命题及其两个等价性原理全面地发展了Betti的经典命题及由其导出三个定理而成为功的互等新理论。

自 1985 年以后,进一步地应用功的互等新理论于求解弯曲矩形薄板的平衡、振动和稳定问题,弯曲圆板的平衡问题,混合边界条件矩形板的弯曲问题,壳体的平衡问题,弹性力学的平面问题和空间等问题,遂形成一个系统的方法,称之为功的互等法(以前称为“功的互等定理法”)。

功的互等新理论与功的互等法一起形成了功的互等新体系。

本书就是把 1980 年到现在作者关于功的互等理论的开发以及功的互等法系统应用的研究整理成册,介绍给读者。

本书在付梓之际,特别要感谢我国著名科学家钱伟长先生所给予作者的指导和帮助;同时也要感谢河北省教育厅的领导,燕山大学及其教务处和土木工程学院领导所给予的支持,以及作者诸多同仁和好友所给予的关怀和帮助。

本书是关于功的互等理论及其应用的专著,其中包括大量的理论推导及数值计算,疏漏之处在所难免,敬请读者和专家不吝指正。

付宝连

2002 年 2 月于秦皇岛

目 录

前言

绪论	1
第一章 弯曲薄板的基本理论	11
§ 1.1 直角坐标系弯曲薄板的基本方程	11
§ 1.2 弹性地基板的微分平衡方程	15
§ 1.3 在横向载荷和纵向面力联合作用下薄板的弯曲	16
§ 1.4 弯曲矩形板的边界条件	17
§ 1.5 弯曲薄板的振动微分方程	20
§ 1.6 弯曲圆形薄板	20
第二章 功的互等理论	23
§ 2.1 空间问题的功的互等理论	23
§ 2.2 空间问题功的互等定理的引理	27
§ 2.3 位移叠加等价性原理	30
§ 2.4 反力叠加等价性原理	31
§ 2.5 由旋转坐标所引起一些量的变换	32
§ 2.6 在横纵载荷联合作用下弯曲薄板的功的互等定理	34
第三章 弯曲矩形板的平衡问题	36
§ 3.1 弯曲矩形板的基本解	36
§ 3.2 弯曲矩形板的功的互等法	42
§ 3.3 四边简支的弯曲矩形板	52
§ 3.4 简单边界条件的弯曲矩形板	66
§ 3.5 复杂边界条件的弯曲矩形板	96
第四章 混合边界条件矩形板的弯曲问题	130
§ 4.1 混合边界条件矩形板弯曲的功的互等法	130
§ 4.2 简支与固定段混合边界的弯曲矩形板	132
§ 4.3 一对边自由另一对边中段固定其余边段简支的弯曲矩形板	166
§ 4.4 简支与自由段混合边界的弯曲矩形板	175
第五章 弯曲圆板的平衡问题	210
§ 5.1 弯曲圆板的功的互等法	210
§ 5.2 弯曲半圆形板的功的互等法	220

第六章 弯曲矩形板的动力问题	225
§ 6.1 弯曲矩形板动力问题的基本解	225
§ 6.2 弯曲矩形板动力问题的功的互等法	230
§ 6.3 四边固定弯曲矩形板的受迫振动	232
§ 6.4 三边固定弯曲矩形板的受迫振动	243
§ 6.5 二邻边固定弯曲矩形板的受迫振动	258
§ 6.6 悬臂矩形板的受迫振动	280
§ 6.7 弯曲矩形板的固有频率	301
第七章 弹性矩形薄板的稳定问题	313
§ 7.1 矩形板稳定的基本解及其边界值	313
§ 7.2 矩形板稳定的功的互等法	318
§ 7.3 简单边界条件矩形板的稳定	320
§ 7.4 较复杂边界条件矩形板的稳定	328
附录	339
1. 在一横向集中载荷和轴向力作用下的弹性地基梁	339
2. 在集中力矩和轴向力作用下的弹性地基梁	344
3. 在集中力矩和轴向力作用下自由振动简支梁	348
4. 在线性分布载荷和轴向力作用下的弹性地基梁	350
5. 振幅方程转化为静载挠度方程	352
6. 双曲函数向三角级数的转换	354
参考文献	355

绪 论

作者于1981年1月首次应用功的互等定理求解了悬臂矩形板的弯曲。之后，提出了功的互等定理的修正命题。功的互等定理的经典命题要求两组力作用于同一弹性体，而该修正命题明确指出，功的互等定理适用于具有不同静力边界条件和不同位移边界条件的两个线性弹性体，从而极大地开发出功的互等定理的新功能。再后，又提出了功的互等定理与位移叠加原理和互等定理与反力叠加原理等价的两个等价性原理，又进一步地发展了功的互等理论。应用前述理论于求解梁、板和壳的平衡、振动和稳定，以及弹性力学某些平面问题和空间问题，形成了一个系统的方法，称之为功的互等法。这样，从理论到方法形成了一个体系，称之为功的互等新体系。

功的互等定理是于1872年由Betti提出的，功的互等定理的Betti命题为：一弹性体的第一组力(包括外力及惯性力)在第二组力相应位移上所做功的总和等于第二组力(包括外力和惯性力)在第一组力相应位移上所做功的总和。这一命题是经典的，也是传统的。经典的含意是它是由Betti初始给出的，传统的含意是后来的学者都沿袭Betti的这一描述^[30,34,36,37]。根据这一描述，功的互等定理有简单的和常见的应用，如图1和图2所示。

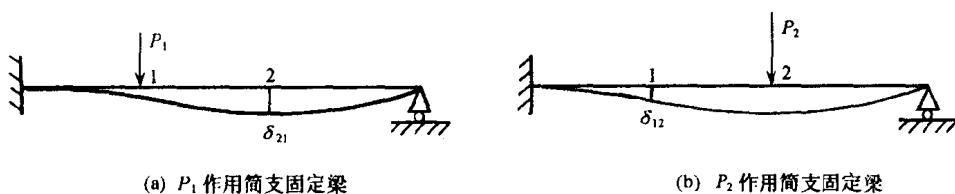


图1 功的互等定理用于直梁

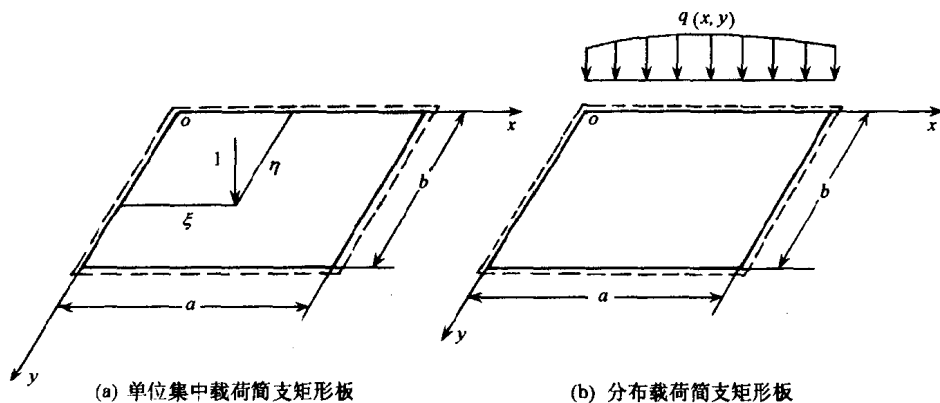


图2 功的互等定理用于矩形板

图 1(a)和图 1(b)表示同一简支固定梁,但有不同的受力。在图 1(a)和图 1(b)梁之间应用功的互等定理,则有

$$P_1\delta_{12} = P_2\delta_{21} \quad (1)$$

图 2(a)和图 2(b)所示为同一简支矩形板,图 2(a)受一横向单位集中载荷作用,而图 2(b)受一分布载荷 $q(x,y)$ 作用。在图 2(a)和图 2(b)所示板之间应用功的互等定理,则有

$$w(\xi,\eta) = \int_0^a \int_0^b q(x,y)w_1(x,y;\xi,\eta)dx dy \quad (2)$$

其中 $w_1(x,y;\xi,\eta)$ 为图 2(a)简支矩形板的挠曲面方程, $q(x,y)$ 为图 2(b)板的分布载荷,而 $w(\xi,\eta)$ 是图 2(b)板的挠曲面方程。

根据功的互等定理经典命题,可导出位移互等定理、反力互等定理和位移反力互等定理等三个引理。

据式(1),再令其中 $P_1=P_2=1$,则将

$$\delta_{12} = \delta_{21} \quad (3)$$

这便是位移互等定理的表达式。

如在图 3(a)和图 3(b)两图所示梁之间应用功的互等定理,则得

$$R_{12}c_1 = R_{21}c_2 \quad (4)$$

如令 $c_1=c_2=1$,则得

$$R_{12} = R_{21} \quad (5)$$

这便是反力互等定理的表达式。

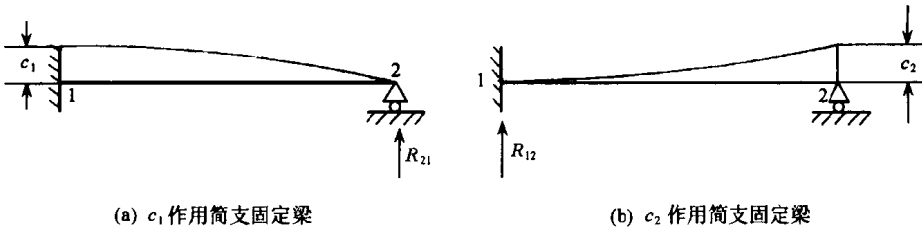


图 3 反力互等

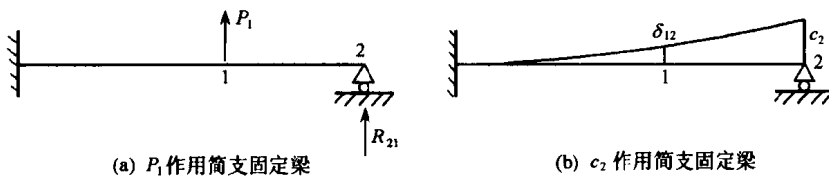


图 4 位移反力互等

如在图 4(a)和图 4(b)两图所示梁之间应用功的互等定理,则得

$$P_1\delta_{12} + R_{21}c_2 = 0 \quad (6)$$

如令 $P_1=c_2=1$,则得

$$R_{21} = -\delta_{12} \quad (7)$$

这便是位移反力互等定理。它表明,相应反力和位移的数值相同,但符号相反。

必须强调指出,两组力,或两组位移,或一组力和一组位移必须作用于同一结构,否则上述三个引理不成立。

目前尚未发现^[14],在1981年前有其他学者解析地应用功的互等定理于求解具有不同位移边界条件两个弹性结构的位移方程,可能就是遵循功的互等定理的这一经典命题所致。

实际上,功的互等定理不仅适用于不同受力,但具有相同约束条件的同一弹性体,也适用于具有不同受力且具有不同约束条件的两个不相同的弹性体。

我们的研究只限于小变形的线性弹性体。定义形状、尺寸相同,材料相同和约束条件(即位移边界条件)也相同,但受力不同的弹性体为同一弹性体。而形状、尺寸相同,材料相同,但约束条件和受力均不相同的弹性体为不相同的弹性体。

首先考虑同一弹性体,它受有不同的两组外力分别为

$$\begin{aligned} F_{1i} \quad x_i \in V & \quad \bar{p}_{1i} \quad x_i \in S_p \\ \bar{u}_i \quad x_i \in S_u & \quad p_{1i} \quad x_i \in S_u \\ F_{2i} \quad x_i \in V & \quad \bar{p}_{2i} \quad x_i \in S_p \\ \bar{u}_i \quad x_i \in S_u & \quad p_{2i} \quad x_i \in S_p \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

由于是同一弹性体,故 \bar{u}_i 和 S_u 都是相同的。

作用于该同一弹性体的第一组外力在第二组外力相应位移上所做功的总和为

$$W_{12} = \iiint_V F_{1i} u_{2i} dV + \iint_{S_p} \bar{p}_{1i} u_{2i} dS + \iint_{S_u} p_{1i} u_{2i} dS \quad (8)$$

考虑该同一弹性体在两组力作用下都处于真实状态,故有

$$\begin{aligned} \iiint_V F_{1i} u_{2i} dV &= - \iiint_V \sigma_{1ij,j} u_{2i} dV = - \iiint_V [(\sigma_{1ij} u_{2i})_{,j} - \sigma_{1ij} u_{2i,j}] dV \\ &= - \iint_{S_p} \bar{p}_{1i} u_{2i} dS - \iint_{S_u} p_{1i} u_{2i} dS + \iiint_V \sigma_{1ij} e_{2ij} dV \end{aligned} \quad (9)$$

对于线性弹性体,有

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\nu e_{ij} \quad (10)$$

注意到式(10),并将式(9)代入式(8),则有

$$W_{12} = \iiint_V (\lambda e_{kk} e_{2ii} + 2\nu e_{1ij} e_{2ij}) dV \quad (11)$$

作用于该同一弹性体的第二组外力在第一组外力相应位移上所做功的总和为

$$W_{21} = \iiint_V F_{2i} u_{1i} dV + \iint_{S_p} \bar{p}_{2i} u_{1i} dS + \iint_{S_u} p_{2i} u_{1i} dS \quad (12)$$

同理可证明

$$W_{21} = \iiint_V (\lambda e_{2kk} e_{1ii} + 2\nu e_{2ij} e_{1ij}) dV \quad (13)$$

因此,有

$$W_{12} = W_{21} \quad (14)$$

于是有功的互等定理的经典命题为:对于同一弹性体,第一组外力在第二组外力相应位移上所做功的总和等于第二组外力在第一组外力相应位移上所做功的总和。

其次,我们考虑不相同的两个弹性体,对于它们分别有

$$\begin{aligned} F_{1i} \quad x_i \in V & \quad \bar{p}_{1i} \quad x_i \in S_{1p} \\ \bar{u}_{1i} \quad x_i \in S_{1u} & \quad p_{1i} \quad x_i \in S_{1u} \\ F_{2i} \quad x_i \in V & \quad \bar{p}_{2i} \quad x_i \in S_{2p} \\ \bar{u}_{2i} \quad x_i \in S_{2u} & \quad p_{2i} \quad x_i \in S_{2u} \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

第一弹性体的外力在第二弹性体外力相应位移上所做功的总和为

$$W_{12} = \iiint_V F_{1i} u_{2i} dV + \iint_{S_{1p}} \bar{p}_{1i} u_{2i} dS + \iint_{S_{1u}} p_{1i} u_{2i} dS \quad (15)$$

其中第二弹性体的表面位移 u_{2i} 是真实的,且有以下三种可能

$$\begin{aligned} u_{2i} \quad x_i \in S_{2p} \quad u_{2i} \quad x_i \in S_{2u} \\ u_{2i} \quad x_i \in (S_{2p} \text{ 一部} \cup S_{2u} \text{ 一部}) \end{aligned}$$

由于第一弹性体处于真实状态,必有

$$\begin{aligned} \iiint_V F_{1i} u_{2i} dV &= - \iint_{S_{1p}} \sigma_{1ij} n_j u_{2i} dS - \iint_{S_{1u}} \sigma_{1ij} n_j u_{2i} dS + \iiint_V \sigma_{1ij} e_{2ij} dV \\ &= - \iint_{S_{1p}} \bar{p}_{1i} u_{2i} dS - \iint_{S_{1u}} p_{1i} u_{2i} dS + \iiint_V \sigma_{1ij} e_{2ij} dV \quad (15') \end{aligned}$$

其中 p_{1i} 是与 $\bar{u}_{1i} \quad x_i \in S_{1u}$ 相对应的第一弹性体的真实表面力。

将式(15')代入式(15)中,注意到式(15)和式(15')中表面位移 u_{2i} 的惟一性,再注意到式(10),则得式(11)。

第二弹性体的外力在第一弹性体外力的相应位移上所做功的总和为

$$W_{21} = \iiint_V F_{2i} u_{1i} dV + \iint_{S_{2p}} \bar{p}_{2i} u_{1i} dS + \iint_{S_{2u}} p_{2i} u_{1i} dS \quad (16)$$

其中第一弹性体的表面位移 u_{1i} 是真实的,且有以下三种可能

$$\begin{aligned} u_{1i} \quad x_i \in S_{1p}, \quad u_{1i} \quad x_i \in S_{1u} \\ u_{1i} \quad x_i \in (S_{1p} \text{ 一部} \cup S_{1u} \text{ 一部}) \end{aligned}$$

仿照式(15')的推导,同理可证明式(16)也等于式(11)。

这样,我们便证明了功的互等定理的修正命题,其命题为:对于都处于真实状态的两个不相同的小变形线性弹性体,则有第一弹性体的外力在第二弹性体的相应位移上所做功的总和等于第二弹性体的外力在第一弹性体相应位移上所做功的总和。

功的互等定理的修正命题已涵盖了经典的命题,更重要的是,前者明确指出功的互等定理可适用于体力不同、静力边界条件和位移边界均不相同的两个弹性体,

从而开发出功的互等定理的新功能,为功的互等定理的应用开辟了一个新的途径。

考虑两直梁,一为如图 5(a)所示的简支梁,另一为如图 5(b)所示的悬臂梁,在图 5(a)和图 5(b)所示两直梁之间应用功的互等定理的修正命题,得

$$w(\xi) = \int_0^l q w_1(x, \xi) dx + Q_{1l} \delta + M_0 \theta_{10} \quad (17)$$

其中 $w_1(x, \xi)$ 为单位集中载荷作用简支梁的挠度方程, θ_{10} 为简支梁在 $x=0$ 点的转角。 M_0 为悬臂梁固定端的弯矩,而 δ 为其自由端的挠度。根据固定端转角为零,可确定 δ 值,于是问题可解。

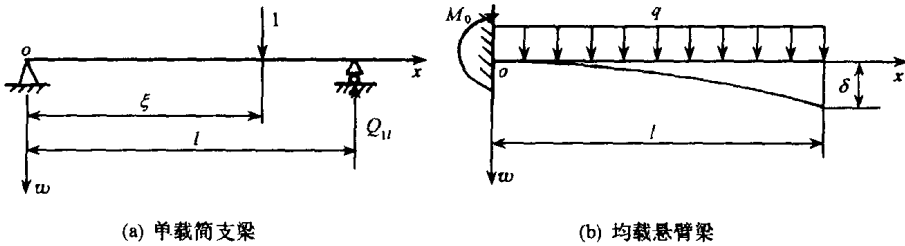


图 5 不同直梁间应用功的互等定理

继续考虑功的互等定理修正命题应用于求解如图 6 所示矩形板的挠曲面方程。

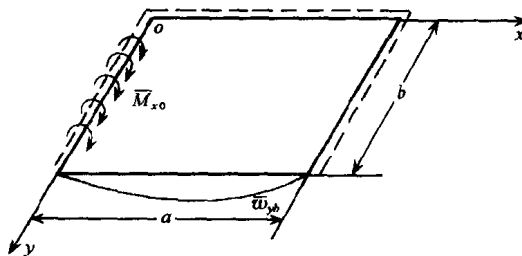


图 6 M_{x0} 和 w_{yb} 作用三边简支矩形板

为了说明修正命题求解该问题的优越性,我们首先用叠加法解此问题。须知,叠加法是 Timoshenko 于 1938 年提出的求解板壳力学最好的方法之一^[31],我国力学家张福范教授有效地应用了这一方法^[18]。

用叠加法解此问题,设

$$w = w_1 + w_2 \quad (18)$$

其中 w 是总挠度, w_1 是由边界挠度 $w_{yb} = \sum_{m=1}^{\infty} d_m \sin \frac{m\pi x}{a}$ 所引起的挠度,而 w_2 是由

边界力矩 $M_{x0} = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sin \frac{n\pi y}{b}$ 所引起的挠度。

设

$$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (19)$$

利用边界条件

$$(w_1)_{y=0} = 0 \quad (20)$$

得

$$B_m = 0 \quad (21)$$

利用边界条件

$$(M_{1y})_{y=0} = -D \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0 \quad (22)$$

得

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right)_{y=0} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left[A_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + C_m \left(2 \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \right. \\ &\quad \left. + D_m \left(2 \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \right] \sin \frac{m\pi x}{a} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

继续得

$$C_m = 0 \quad (24)$$

利用

$$(w_1)_{y=b} = \sum_{m=1}^{\infty} d_m \sin \frac{m\pi y}{a} \quad (25)$$

得

$$A_m \operatorname{sh} \frac{m\pi b}{a} + D_m \frac{m\pi b}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi b}{a} = d_m \quad (26)$$

利用

$$(M_{1y})_{y=b} = -D \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right)_{y=b} = 0 \quad (27)$$

得

$$A_m (1 - \nu) \operatorname{sh} \frac{m\pi b}{a} + D_m \left[(1 - \nu) \frac{m\pi b}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi b}{a} + 2 \operatorname{sh} \frac{m\pi b}{a} \right] = 0 \quad (28)$$

解方程式(26)和方程式(28),得

$$A_m = \frac{d_m}{2 \operatorname{sh} \frac{m\pi b}{a}} \left[2 + (1 - \nu) \frac{m\pi b}{a} \operatorname{cth} \frac{m\pi b}{a} \right] \quad (29)$$

$$D_m = - (1 - \nu) \frac{d_m}{2 \operatorname{sh} \frac{m\pi b}{a}} \quad (30)$$

将式(21),式(24),式(29)和式(30)代入式(19),则得

$$w_1 = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left[2 + (1 - \nu) \left(\frac{m\pi b}{a} \operatorname{cth} \frac{m\pi b}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{cth} \frac{m\pi y}{a} \right) \right] \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{m\pi b}{a}} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} (d_m) \quad (31)$$

继续求解 w_2 :

设

$$w_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} + B_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} + C_n \frac{n\pi x}{b} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{b} + D_n \frac{n\pi x}{b} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} \right] \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (32)$$

利用边界条件

$$(w_2)_{x=0} = 0 \quad (33)$$

得

$$B_n = 0 \quad (34)$$

利用边界条件

$$-D \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right)_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (35)$$

再注意到

$$\begin{aligned} -D \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right)_{x=0} &= -D \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} + C_n \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \left(2 \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} + \frac{n\pi x}{b} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} \right) \right. \\ &\quad \left. + D_n \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \left(2 \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} + \frac{n\pi x}{b} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} \right) \right]_{x=0} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ &= -D \sum_{n=1}^{\infty} 2C_n \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \quad (36)$$

得

$$C_n = -\frac{1}{D} \frac{1}{2} G_n \left(\frac{b}{n\pi} \right)^2 \quad (37)$$

再利用

$$(w_2)_{x=a} = 0 \quad (38)$$

和

$$\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right)_{x=a} = 0 \quad (39)$$

分别得到

$$A_n \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b} - \frac{1}{D} \frac{1}{2} G_n \left(\frac{b}{n\pi} \right)^2 \frac{n\pi a}{b} \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b} + D_n \frac{n\pi a}{b} \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b} = 0 \quad (40)$$

$$A_n \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b} - \frac{1}{D} \frac{1}{2} G_n \left(2 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b} + \frac{n\pi a}{b} \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b} \right) + D_n \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \left(2 \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b} + \frac{n\pi a}{b} \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b} \right) = 0 \quad (41)$$

解方程组(40)和(41), 则得

$$A_n = -\frac{1}{D} \frac{a}{2} \left(\frac{b}{n\pi} \right) \frac{G_n}{\operatorname{sh}^2 \frac{n\pi a}{b}} \quad (42)$$

$$D_n = \frac{1}{D} \frac{1}{2} \left(\frac{b}{n\pi} \right)^2 \operatorname{cth} \frac{n\pi a}{b} G_n \quad (43)$$

将式(34), 式(37), 式(42)和式(43)代入式(32), 经过整理, 则得

$$w_2 = \frac{1}{2D} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{n\pi a}{b}} \frac{n\pi a}{b} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} + \operatorname{cth} \frac{n\pi a}{b} \frac{n\pi x}{b} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} - \frac{n\pi x}{b} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} \right] \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{b} \right)^2} \sin \frac{n\pi y}{b} (G_n) \quad (44)$$

将式(31)和式(44)代入式(18)中, 则得

$$w = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left[2 + (1 - \nu) \left(\frac{m\pi b}{a} \operatorname{cth} \frac{m\pi b}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{cth} \frac{m\pi y}{a} \right) \right] \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{m\pi b}{a}} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} (d_m) + \frac{1}{2D} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{n\pi a}{b}} \frac{n\pi a}{b} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} + \operatorname{cth} \frac{n\pi a}{b} \frac{n\pi x}{b} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} - \frac{n\pi x}{b} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} \right] \cdot \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{b} \right)^2} \sin \frac{n\pi y}{b} (G_n) \quad (45)$$

下面我们应用功的互等定理的修正命题来解此同一问题。在图 2(a)所示基本系统和图 6 所示实际系统之间应用功的互等定理, 则得实际系统的挠曲面方程为

$$w(\xi, \eta) = \int_0^b w_{1,x_0} \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sin \frac{n\pi y}{b} dy - \int_0^a V_{1,y} \sum_{m=1}^{\infty} d_m \sin \frac{m\pi x}{a} dx \quad (46)$$

其中 w_{1,x_0} 和 $V_{1,y}$ 是基本解的边界值, 是可一次性求出的已知值[见 3.1.4 小节中式(3.1.26)和式(3.1.33)], 其中 $\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$, $\beta_n = \frac{n\pi}{b}$, 且为

$$w_{1,x_0} = \frac{1}{Db} \sum_{n=1}^{\infty} [\beta_n a \operatorname{acth} \beta_n a - \beta_n (a - \xi) \operatorname{cth} \beta_n (a - \xi)]$$

$$\cdot \frac{1}{\beta_n^2 \text{sh} \beta_n a} \text{sh} \beta_n (a - \xi) \sin \beta_n \eta \sin \beta_n y \quad (47)$$

$$V_{1,y} = -\frac{1}{a} \sum_{m=1,2}^{\infty} [2 + (1 - \nu)(\alpha_m b \text{cth} \alpha_m b - \alpha_m \eta \text{cth} \alpha_m \eta)] \\ \cdot \frac{1}{\text{sh} \alpha_m b} \text{sh} \alpha_m \eta \sin \alpha_m \xi \sin \alpha_m x \quad (48)$$

将式(47),式(48)代入式(46)中,对 x 和 y 变量进行极简单地积分,便可立即得到

$$\omega(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left[2 + (1 - \nu) \left(\frac{m\pi b}{a} \text{cth} \frac{m\pi b}{a} - \frac{m\pi \eta}{a} \text{cth} \frac{m\pi \eta}{b} \right) \right] \\ \cdot \frac{1}{\text{sh} \frac{m\pi b}{a}} \text{sh} \frac{m\pi \eta}{a} \sin \frac{m\pi \xi}{a} (d_m) + \frac{1}{2D} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{\text{sh}^2 \frac{n\pi a}{b}} \frac{n\pi a}{b} \text{sh} \frac{n\pi \xi}{b} \right. \\ \left. + \text{cth} \frac{n\pi a}{b} \frac{n\pi \xi}{b} \text{ch} \frac{n\pi \xi}{b} - \frac{n\pi \xi}{b} \text{sh} \frac{n\pi \xi}{b} \right] \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{b} \right)^2} \sin \frac{n\pi \eta}{b} (G_n) \quad (49)$$

从上述两种计算方法可知,基于功的互等定理修正命题的功的互等法比叠加法要简单的多,简单的原因,我们将在 3.2.8 小节做详细分析。

功的互等定理与叠加原理等价性原理包括两个原理,一是功的互等定理与位移叠加原理等价性原理,另一个是功的互等定理与反力叠加原理等价性原理。前一原理的命题为:在单位载荷基本系统和实际系统之间应用功的互等定理,则功的互等定理等价于位移叠加原理。在图 2(a)和图 6 两不同边界条件的矩形板之间应用功的互等定理,得到式(46),现在对式(46)予以说明。式(46)右端第一积分项的 $w_{1,x0}$ 代表在 (ξ, η) 点作用单位集中载荷在 $(0, y)$ 点所产生的转角,根据位移互等定理,它也等于在 $(0, y)$ 点施加单位力矩在 (ξ, η) 点所产生的挠度,故 $\int_0^b \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sin \frac{n\pi y}{b} w_{1,x0} dy$ 代表 $x=0$ 边分布力矩 $\bar{M}_{x0} = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sin \frac{n\pi y}{b}$ 对 (ξ, η) 挠度的贡献。其次,说明式(46)右端第二项对 $w(\xi, \eta)$ 的贡献。 $-V_{1,y} dx$ 代表在 (ξ, η) 点作用单位集中载荷在 $y=b$ 边界上任意一点 x 的 dx 微段上所产生的反力。根据位移反力互等定理, $-V_{1,y} dx$ 等于在 $y=b$ 边任意一点 x 处发生单位位移对 (ξ, η) 点挠度的贡献,今在 $y=b$ 边产生一分布挠度 $\bar{w}_{y,b}$, 故 $-\int_0^a V_{1,y} \bar{w}_{y,b} dx$ 代表 $\bar{w}_{y,b}$ 对 (ξ, η) 点的挠度贡献。于是该功的互等定理与位移叠加等价性原理被说明。

推广图 5,图 2(a)和图 6 所示算例的方法于板壳力学的平衡、振动和稳定问题以及弹性力学某些问题的求解,形成一个系统的方法称之为功的互等法。

功的互等法可以描述为:在单位载荷基本系统和相应的实际系统之间应用功的互等定理,从而得到实际系统的位移方程,并根据边界条件得到该位移方程的最

终解。

功的互等法的解题步骤大致分为：确定相应问题的基本系统并求出其基本解；假设相应实际系统的边界值的解析表达式；在基本系统和相应实际系统之间应用功的互等定理，可求出各种边界条件实际系统的位移方程；最后，根据边界条件求出问题的最终解。

功的互等法具有计算简便，能有效地求解特殊载荷的作用和复杂边界条件问题，解题过程程序化，概念清晰和应用广泛等诸多特点（详细说明见 3.2.8 小节）。

功的互等定理的经典命题，经典命题的三个引理；功的互等定理的修正命题（该命题可适用具有不同位移边界条件的两个相关弹性体）以及功的互等定理与叠加原理等价性两个原理共同形成功互等体系的理论基础，而功的互等法成为功的互等体系方法论中的计算方法。