

有限元技术丛书

The finite element method is a numerical method for solving problems of engineering and mathematical physics. Typical problem areas of interest in engineering and mathematical physics that are solvable by use of the finite element method include structural analysis, heat transfer, fluid flow, mass transport, and electromagnetic potential.

有限元分析

—— ANSYS 理论与应用

Finite Element Analysis

Theory and Application with ANSYS

[美] Saeed Moaveni 著

欧阳宇 王 崧 等译

王铁成 审校

Prentice
Hall



电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

<http://www.phei.com.cn>

有限元技术丛书

有限元分析 ——ANSYS 理论与应用

**Finite Element Analysis
Theory and Application with ANSYS**

[美] Saeed Moaveni 著

欧阳宇 王 崧 等译

王铁成 审校



电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书是讲述有限元基本理论和通用有限元程序 ANSYS 在有限元分析中应用的一本经典教材。全书精辟地讲解了有限元分析的理论,同时还给出了建模过程中的一些实际问题。ANSYS 软件是全书的主体。本书的内容涉及到有限元分析的基本思想、桁架、一维单元、一维热传导和流体问题分析,二维单元、ANSYS 程序的主要功能和结构,二维热传导问题分析、二维固体力学问题分析、理想的二维流体力学问题及三维单元,并介绍了用 ANSYS 软件进行优化设计和参数化编程。每一章都会首先讨论相关的基础理论,接着给出了一些可以手工计算的简单问题,之后介绍用 ANSYS 解决的例子,在某些章节的末尾还给出了一些设计问题。

本书面向高等院校工程专业的本科生和有限元分析的初学者。对于未接触过有限元建模的工程师来说,本书亦可以作为深入理解基本概念的入门性教材。

Simplified Chinese edition Copyright © 2003 by PEARSON EDUCATION NORTH ASIA LIMITED and Publishing House of Electronics Industry.

Finite Element Analysis: Theory and Application with ANSYS, ISBN: 0-13-785098-0 by Saeed Moaveni, Copyright © 1999.

Published by arrangement with the original publisher, Pearson Education, Inc., publishing as Prentice Hall.

This edition is authorized for sale only in the People's Republic of China(excluding the Special Administrative Region of HongKong and Macau).

本书中文简体字翻译版由电子工业出版社和 Pearson Education 培生教育出版北亚洲有限公司合作出版。未经出版者预先书面许可,不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分。本书封面贴有 Pearson Education 培生教育出版集团激光防伪标签,无标签者不得销售。

版权贸易合同登记号:图字:01-2002-5707

图书在版编目(CIP)数据

有限元分析: ANSYS 理论与应用/(美)莫维尼(Moaveni, S.)著;欧阳宇等译. -北京:电子工业出版社, 2003.6

(有限元技术丛书)

书名原文: Finite Element Analysis: Theory and Application with ANSYS

ISBN 7-5053-8679-4

I. 有... II. ①莫... ②欧... III. 有限元分析-应用程序, ANSYS-教材 IV. 0241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 031273 号

责任编辑:谭海平

印刷者:北京天竺颖华印刷厂

出版发行:电子工业出版社 <http://www.phei.com.cn>

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编:100036

经 销:各地新华书店

开 本:787×1092 1/16 印张:26.75 字数:685 千字

版 次:2003 年 6 月第 1 版 2003 年 6 月第 1 次印刷

定 价:39.00 元

凡购买电子工业出版社的图书,如有缺损问题,请向购买书店调换;若书店售缺,请与本社发行部联系。联系电话:(010)68279077

译 者 序

本书是讲述有限元基本理论和通用有限元程序 ANSYS 在有限元分析中应用的一本经典教材,既介绍了有限元的基本理论,也讲述了如何应用 ANSYS 进行有限元分析的一般步骤和过程,并提供了大量的应用实例。另外,还阐述了如何应用某些已知的特征来验证所获得的解是否正确。所有这些都别于其他介绍有限元或 ANSYS 的书籍。本书基于“理论 + ANSYS 应用”的讲述模式,能让读者清楚地明白在进行有限元分析时“要做什么,怎么做,所做的理论依据是什么?”读完此书后的读者,必定会发现这正是他们求之已久的一本好书!

ANSYS 是一个功能十分强大的有限元分析程序,不仅能用于常规工程结构问题的静态或动态有限元分析,还能在诸如流体力学、热力学(温度场)、电磁场等方面进行有限元的模拟与计算。因此,读者选择一本适合自己研究方向的、介绍 ANSYS 有限元理论与应用的书籍显得非常重要。本书主要介绍与工程结构(如杆、梁、板、壳等)、流体力学和热力学等问题有关的有限元理论及 ANSYS 应用,特别适合这些方面的读者群。另外,本书并不讲解一些简单而又枯燥的命令或杂乱无章的图形界面操作,而是按照从理论到实践的原则,在讲述相关问题的理论基础(如问题本身的特点、数学形式描述、位移函数或形函数的选择、单元刚度方程的形成)上,再结合具体的实例以循序渐进的方式向读者描述的。这是目前许多介绍 ANSYS 有限元的书籍所不具备的。如果读者也按照这种方式学习,会很快掌握有关问题的有限元解决方法和 ANSYS 的操作步骤,既做到知其然,也知其所以然,真正掌握有限元分析方法的真谛。

在此,译者需要再次强调的是,本书并不是一本关于 ANSYS 的命令操作手册,而是一本关于有限元基本理论及如何应用 ANSYS 进行有限元分析的教材,目的在于让读者把有限元理论和实际的有限元应用有机地结合起来,做到既是一个理论工具的掌握者,也是一个理论工具的应用者,这就是本书为什么在讲述 ANSYS 程序应用的同时,还对有限元的基本理论进行讲述的初衷。因此,本书作为一本教材,既适合于那些想学习有限元基本知识和提高有限元应用能力的高校学生,也适合于那些从事有限元研究与应用的广大工程技术人员。同时,本书也可作为相关教师的参考教材。本书每一章的后面都对本章的知识和内容进行了概括与总结,并提供了一定数量的习题供读者练习。

本书主要由欧阳宇、王崧、侯战友、唐国兵翻译。参加翻译工作的其他人员还有谢君英、石朝江、盛海燕、李明。最后,要特别感谢天津大学建工学院土木系的王铁成教授,他对本书的翻译提供了许多有益的意见,并对译者的翻译工作进行了指导。尽管译者倾注了极大的心血尽量做到专业术语译法正确规范,但毕竟水平有限,难免有不妥之处,敬请广大读者批评指正。

前 言

目前,在有限元理论方面已经出现了不少针对研究生的优秀教科书,然而,这些书在向本科生和初学者介绍有限元建模过程中都没有将 ANSYS 作为一个完整的部分包括进去。近些年来,有限元分析方法作为一种设计工具获得了迅猛的发展。各种综合性软件,如 ANSYS(一种通用有限元计算程序),已经成为设计工程师应掌握的常用工具。遗憾的是,许多一直在使用这些工具的工程师们往往缺乏应有的训练或对基本概念缺乏足够的理解。作为入门性教材的本书,旨在帮助工程专业的学生和未接触过有限元建模的工程师深入理解基本概念。全书细致讲解了有限元分析的理论,同时还涉及一些建模过程中的实际问题。本书在编写过程中尽量避开枯燥的理论,避免学生在理论面前望而却步,但同时又保留了足够的基础理论来帮助他们灵活有效地使用 ANSYS。ANSYS 是全书的主体。每一章都会首先讨论相关的基础理论,接着给出了一些可以手工计算的简单问题,之后介绍用 ANSYS 解决的例子。书中的练习也用这种方式给出。一些习题需要手工计算,而其他更复杂的习题则需要使用 ANSYS。这些可以手工计算的简单问题,能够鼓励学生熟悉有限元分析的必要步骤,加深他们对概念的理解。在第 2 章、第 4 章、第 7 章、第 8 章和第 10 章的末尾还给出一些设计问题。

本书还讨论了可能导致错误结果的误差来源。在每一相关章节的结尾都会尽可能地给出用于验证 ANSYS 结果的可能方法。

本书的另一个特点是在最后一章介绍了用 ANSYS 进行优化设计和参数化编程。

全书共分 11 章。第 1 章介绍了有限元分析的基本思想,其中包括直接法、势能法和加权余数法等常用公式。第 2 章分析了桁架,因为桁架是许多工程结构问题最经济的解决方案。第 2 章还给出了一个完整的 ANSYS 程序,这样学生就能够开始使用 ANSYS 了。第 3 章通过引入一维的一次、二次和三次元素来分析一维问题,其中详细讨论了整体坐标系、区域坐标系和自然坐标系。在第 3 章中还介绍了等参公式和高斯-勒让德公式的数值积分。第 4 章讲述了一维热传导和流体问题的迦辽金公式,并讨论了固体力学问题中的最小势能原理。第 5 章涉及二维的一次和高次元素,其中包括高斯-勒让德公式的二维积分。第 6 章讲述了 ANSYS 程序的主要功能和组织,其中详尽介绍了用 ANSYS 建立和分析模型的基本步骤。第 7 章中包括了二维热传导问题的分析。第 8 章分析了非圆形轴、梁、框架的扭转问题和应力问题。第 9 章介绍理想的二维流体力学问题,其中还讨论了管道网络问题的直接表述和地下渗流(seepage flow)问题。第 10 章讨论了三维元素及其构成,还介绍了实体模型建立的自上而下方法和自下而上方法。第 11 章介绍了优化设计的思想和参数化编程。在以上各章的开头介绍了本章的学习目的,而结尾则小结了读者通过本章应获取的知识。

在使用 ANSYS 的例子中皆详尽介绍了如何使用 ANSYS 来对不同的工程问题建模及分析。第 6 章在编写过程中还注意到,如果教员在授课之初即想介绍 ANSYS,也可以由此讲授。

有关固体力学、热传导和流体力学的基本原则的简述贯穿全书各章节之中。此外,要提醒学生的是,不要过早地对那些存在简单解析解的问题建立有限元模型。一些在工程中会涉及的常用材料的力学和热物理学参数列在附录 A 和附录 B 中。

Saeed Moaveni

目 录

第 1 章 概述	1
1.1 工程问题	1
1.2 数值方法	4
1.3 有限元方法与 ANSYS 简介	4
1.4 有限元方法的基本步骤	4
1.5 直接公式法	6
1.6 最小总势能公式	28
1.7 加权余数法	31
1.8 结果的验证	35
1.9 理解问题	36
总结	36
参考文献	36
习题	37
第 2 章 桁架	44
2.1 桁架的定义	44
2.2 有限元公式	45
2.3 空间桁架	58
2.4 ANSYS 程序概述	60
2.5 使用 ANSYS 的例子	65
2.6 结果的验证	87
总结	89
参考文献	90
习题	90
第 3 章 一维单元	98
3.1 线性单元	98
3.2 平面单元	102
3.3 立体单元	104
3.4 整体、局部和自然坐标	106
3.5 数值积分：高斯 - 勒让德多项式	109
3.6 ANSYS 中一维单元的例子	111
总结	112
参考文献	112

习题	112
第 4 章 一维问题分析	117
4.1 热传递问题	117
4.2 固体力学问题	130
4.3 使用 ANSYS 的例子	134
4.4 结果的验证	145
总结	146
参考文献	146
习题	146
第 5 章 二维单元	151
5.1 矩形单元	151
5.2 平面四边形单元	154
5.3 线性三角形单元	158
5.4 平面三角形单元	161
5.5 等参单元	165
5.6 二维积分:高斯-勒让得多项式	166
5.7 ANSYS 中二维单元的例子	167
总结	169
参考文献	169
习题	169
第 6 章 再论 ANSYS	174
6.1 ANSYS 程序	174
6.2 ANSYS 数据库和文件	175
6.3 用 ANSYS 创建有限元模型:预处理	176
6.4 应用边界条件、负荷和解	187
6.5 有限元模型的结果:后处理	189
6.6 选择选项	192
6.7 图形功能	193
6.8 一个样例问题	195
总结	206
参考文献	206
第 7 章 二维热传导问题分析	212
7.1 一般的热传导问题	212
7.2 矩形单元的公式推导	216
7.3 三角形单元的公式推导	222
7.4 ANSYS 使用的热传导单元	232
7.5 使用 ANSYS 的例子	232
7.6 结果的验证	245

总结	246
参考文献	248
习题	248
第 8 章 二维固体力学问题分析	257
8.1 任意横截面形状的杆的扭转	257
8.2 梁和骨架	260
8.3 板应力的公式推导	275
8.4 基本失效理论	285
8.5 使用 ANSYS 的例子	286
8.6 结果的验证	306
总结	308
参考文献	310
习题	310
第 9 章 流体力学问题分析	320
9.1 管流问题的数学建模	320
9.2 理想流体的流动	325
9.3 渗流	328
9.4 使用 ANSYS 的例子	330
9.5 结果的验证	347
总结	348
参考文献	349
习题	349
第 10 章 三维单元	353
10.1 四节点四面体单元	353
10.2 基于四面体单元的三维固体力学问题的有限元分析	355
10.3 八节点六面体单元	360
10.4 十节点四面体单元	361
10.5 二十节点六面体单元	362
10.6 ANSYS 中的三维单元示例	363
10.7 实体单元建模的一般方法	366
10.8 利用 ANSYS 的热分析示例	374
10.9 利用 ANSYS 的结构分析示例	386
10.10 计算结果验证:误差估计	397
总结	399
参考文献	399
习题	399
第 11 章 优化设计	407
11.1 优化设计简介	407

11.2 ANSYS 的参数化设计语言	410
11.3 使用 ANSYS 的例子	412
总结	417
参考文献	417
附录 A 部分材料的力学性质	418
附录 B 部分材料的热力学属性	419
附录 C 转换因子	420

第 1 章 概 述

有限元方法是广泛用于解决应力分析、传热学、电磁学和流体力学等工程问题的数值方法。本书旨在帮助读者清楚地理解有限元建模的基本概念,使读者能有效地使用通用的有限元计算软件,如 ANSYS。ANSYS 是本书不可分割的一部分。每章首先讨论了相关的基本理论,然后给出了使用 ANSYS 进行求解的例子。本书重点是在方法上,可以根据有限元分析 (FEA)通过这些方法来验证得到的结果。此外,在每一相关章节的结尾都会尽可能地给出用于验证 ANSYS 结果的可能方法。

本书中提供的一些练习需要手工进行计算。这些练习能够帮助读者熟悉有限元分析的必要步骤,以加深对概念的理解。不少人或许已经成为设计工程师,但是刚刚接触有限元建模并且需要了解 FEA 的基本概念。对于这样的读者来说,本书亦可以作为一本参考书。

本章的目的是介绍有限元公式中的基本概念,包括直接公式法、最小势能原理和加权余数法。第 1 章的主题如下:

- 1.1 工程问题
- 1.2 数值方法
- 1.3 有限元方法与 ANSYS 简介
- 1.4 有限元方法的基本步骤
- 1.5 直接公式法
- 1.6 最小总势能公式
- 1.7 加权余数法
- 1.8 结果的验证
- 1.9 理解问题

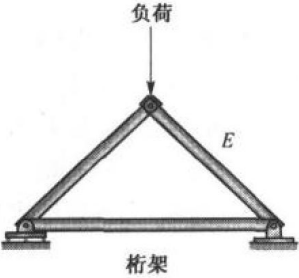
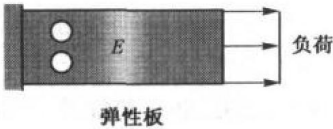
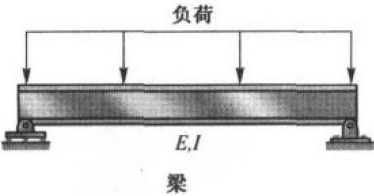
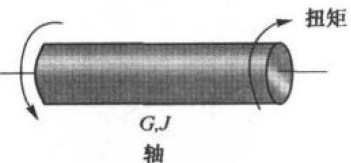
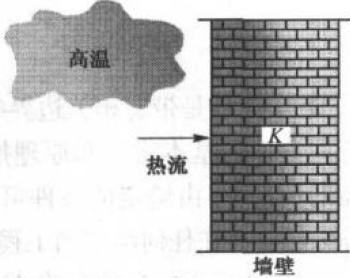
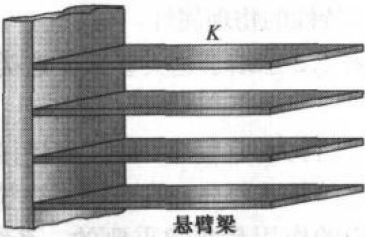
1.1 工程问题

工程问题一般是物理情况的数学模型。数学模型是带有相关边界条件和初值条件的微分方程组,微分方程组是通过系统或控制体应用自然的基本定律和原理推导出来的。这些控制微分方程代表了质量、力或能量的平衡。可能的情况下,由给定的条件可以得到系统的精确行为。系统的解析解由两部分组成:一般部分和特殊部分。在任何给定的工程问题中,存在两组影响系统行为的参数。首先存在着有关表示给定系统自然行为信息的参数,这些参数包括弹性模量、热流速率和粘性等。表 1.1 总结出了描述问题自然特性的物理属性。

另一方面,系统存在着产生扰动的参数。表 1.2 总结了这类参数。这类参数包括外力、力矩、介质的温度差和流体的压力差等。

表 1.1 中所示的系统特性表现了系统的自然行为,它们常出现在控制微分方程的解的一般部分。相比之下,产生扰动的参数常出现在解的特殊部分。在有限元建模中,理解参数在刚度或传导矩阵以及负荷或力矩阵(force matrix)中的作用是非常重要的。系统特性总是在刚度矩阵、传导矩阵或阻力矩阵中得到体现,而扰动参数总是出现在负荷矩阵中。

表 1.1 表征不同工程系统的物理属性

问题类型	表征系统特性的参数示例
固体力学示例	
 <p>桁架</p>	弹性模量, E
 <p>弹性板</p>	弹性模量, E
 <p>梁</p>	弹性模量, E ; 第二面积矩, I
 <p>轴</p>	刚性模量, G ; 面积的极矩, J
热传导示例	
 <p>墙壁</p>	热传导率, K
 <p>悬臂梁</p>	热传导率, K

(续表)


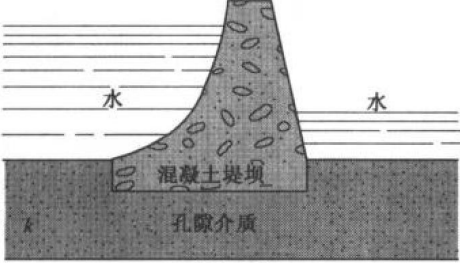
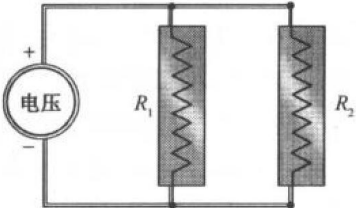
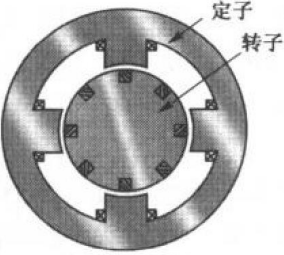
问题类型	表征系统特性的参数示例
流体流动示例	
 <p>管道网络</p>	速度, μ ; 相对粗糙度, e
 <p>混凝土堤坝</p>	土壤渗透率, k
电磁学问题	
 <p>电气网络</p>	电阻, R
 <p>发动机磁场</p>	渗透率, μ

表 1.2 不同工程系统中引起扰动的参数

问题类型	在系统中引起扰动的参数示例
固体力学	外力和力矩; 支撑激发 (support excitation)
热传导	温度差; 热输入
流体流动与管道网络	压力差; 流速
电气网络	电压差

1.2 数值方法

在许多实际工程问题中,我们一般不能得到系统的精确解。这可能要归因于控制微分方程组的复杂性或边界条件和初值条件的难以确定性。为解决这个问题,我们需要借助于数值方法来近似。解析解表明了系统在任何点上的精确行为,而数值解只在称为节点的离散点上近似于解析解。任何数值解法的第一步都是离散化。这一过程将系统分为一些子区域和节点。数值解法可以分为两大类:有限差分方法和有限元方法。使用有限差分方法,需要针对每一节点写微分方程,并且用差分方程代替导数。这一过程产生一组线性方程。有限差分方法对于简单问题的求解是易于理解和应用的,但是使用该方法难以解决带有复杂几何条件和复杂边界条件的问题。对于具有各向异性的物体来说就是如此。

相比之下,有限元方法使用公式方法而不是微分方法来建立系统的代数方程组。而且,这种方法假设代表每个元素的近似函数是连续的。假设元素间的边界是连续的,通过结合各单独的解产生系统的完全解。

1.3 有限元方法与 ANSYS 简介

有限元方法是用于求解工程中各类问题的数值方法。应力分析中稳态的、瞬态的、线性的或非线性的问题以及热传导、流体流动和电磁学中的问题都可以用有限元方法进行分析解决。现代有限元方法的起源可以追溯到 20 世纪的早期,当时一些研究者应用离散的等价杆拟合模态的弹性体。然而,人们公认 Courant(1943)是应用有限元方法的第一人。Courant 使用分段多边形插值法而不是三角剖分法来研究扭转问题。

在 20 世纪 50 年代,Boeing 公司采用三角元对机翼进行建模,大大推动了有限元方法的应用。其他不少人接着采用了这一方法。然而,直到 20 世纪 60 年代,人们才广为接受“有限元”这一术语,Clough 在这方面做了不少工作。在 20 世纪 60 年代,研究者开始将有限元方法应用到解决工程中的其他领域,例如热传导和地下渗流中的问题。Zienkiewicz 和 Cheung(1967)在 1967 年撰写了第一本有限元的专著。1971 年,首次发布了 ANSYS。

ANSYS 是一个通用的有限元计算机程序,其代码长度超过 100 000 行。我们能够应用 ANSYS 进行静态、动态、热传导、流体流动和电磁学分析。在过去 20 多年里,ANSYS 是最主要的 FEA 程序。当前的 ANSYS 版本带有图形用户界面(GUI)的窗口、下拉菜单、对话框和工具条等,与过去相比已经焕然一新。现在,ANSYS 已经被广泛应用在许多工程领域中,如航空、汽车、电子、核科学等。为了更好地使用 ANSYS 或其他 FEA 计算机程序,读者有必要先理解有限元方法的基本概念和局限性。

ANSYS 是一个强大的工程工具,能够用来解决各种各样的问题。然而,不理解有限元方法基本概念的用户将发现自己会陷入困境,就像一位备有许多工具但不理解计算机内部工作机制的计算机技术员不能修理计算机一样。

1.4 有限元方法的基本步骤

有限元分析的基本步骤如下:

预处理阶段

1. 建立求解域并将之离散化成有限元,即将问题分解成节点和单元。
2. 假设代表单元物理行为的形函数,即假设代表单元解的近似连续函数。
3. 对单元建立方程。
4. 将单元组合成总体的问题,构造总体刚度矩阵。
5. 应用边界条件、初值条件和负荷。

解决阶段

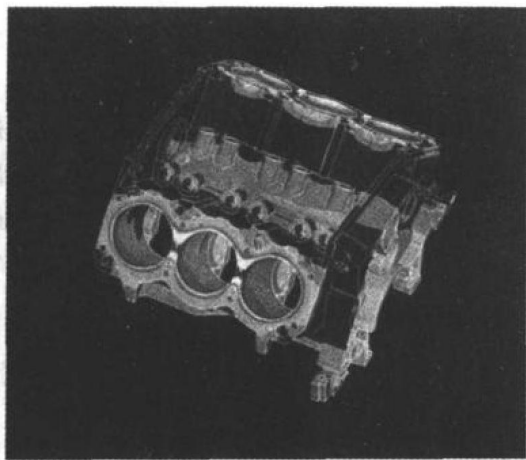
6. 求解线性或非线性的微分方程组,以得到节点的值,例如得到不同节点的位移量或热传递问题中不同节点的温度值。

后处理阶段

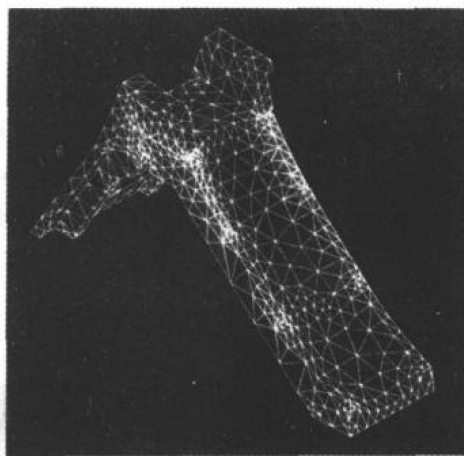
7. 得到其他重要的信息。至此,读者可能已对主应力、热量等值感兴趣。

一般来说,用公式描述有限元问题有几种方法:(1)直接公式法,(2)最小总势能公式法和(3)加权余数法。这里有必要指出,无论怎样产生有限元模型,有限元分析的基本步骤都与以上列举的步骤相同。

表 1.3 ANSYS 功能示例^①



使用 ANSYS 的热传导功能分析汽车前面驱动轮的 V6 发动机。以 Analysis & Design Appl. Co. Ltd. (ADAPCO) 为代表的美国主要汽车生产商使用 ANSYS 提高产品性能。发动机块中的热应力的等值线如上图所示。



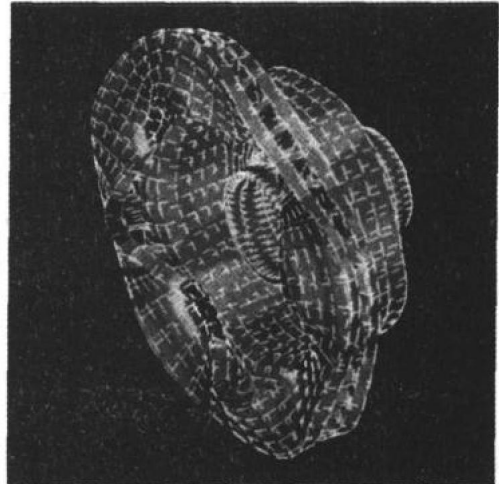
Today's Kids 公司(一家玩具生产商)的工程师使用 ANSYS 的大变形功能确认滑道承受负荷时实效的位置,如上图所示。因为产品的结构行为,要求有非线性分析功能以检测这些应力。

^① 照片得到了 ANSYS 公司的许可。

(续表)



这个浴室板的分析中描述了 ANSYS 的电磁功能,它包括通过特定的单元使用向量和标量电压,还包括通过无限边界单元用三维图形表示远场衰减(far-field decay),如上图所示。



用等高线来描述 H 场的强度。结构分析工程公司使用 ANSYS 确定盘式制动器(disk-brake)上转子的固有频率。在该分析中,发现轻型卡车的制动闸转子中存在 50 种影响制动效果的振动模式。

1.5 直接公式法

以下举例说明直接公式法的步骤和过程。

例 1.1

考虑带有负荷 P 的变横截面杆,如图 1.1 所示。杆的一端固定,另一端承受负荷 P 。让我们以 w_1 代表杆的上边宽度, w_2 代表杆的下边宽度,杆的厚度为 t ,长度为 L 。杆的弹性模量用 E 表示。我们感兴趣的是确定当杆承受负荷 P 时,在沿杆长度的不同点上杆失效时的负荷大小。在以下分析中,我们假设应用的负荷比杆的重量要大得多,因此忽略杆的重量。

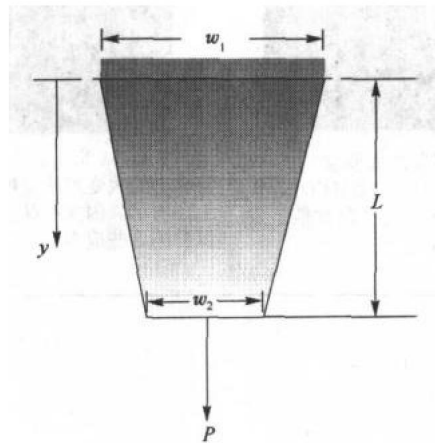


图 1.1 轴向负荷下的杆

预处理阶段

1. 将问题域离散成有限的单元。

我们首先将问题分解成节点和单元。为了强调有限元分析中的基本步骤,我们将保持问题的简单性。因此,我们将用五个节点和四个单元模型代表杆,如图 1.2 所示。然而,需要说明的是,使用更多的节点和单元能增加结果的精确度。这个任务留做读者作为练习来完成(请参阅本章末尾的习题 1)。杆的模型中有四个独立的分段,每个分段均有一个统一的横截面。每个单元的横截面面积,由定义单元的节点处的横截面的平均面积表示。模型如图 1.2 所示。

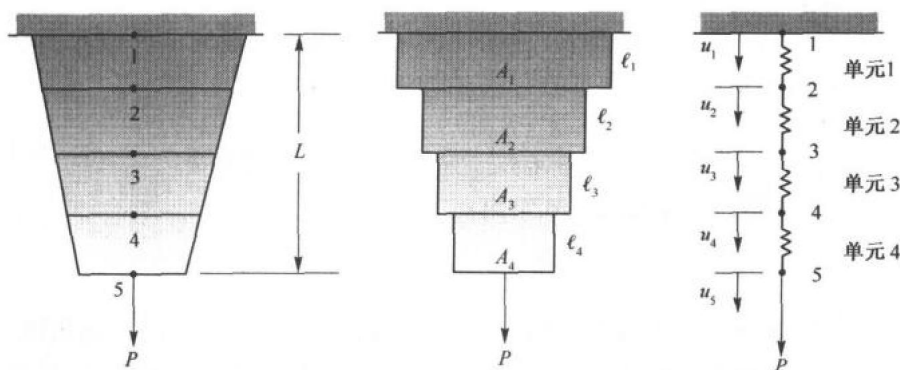


图 1.2 将杆分解成节点和单元

2. 假设近似单元行为的近似解。

为了研究典型单元的行为,考虑一个带有统一横截面 A 的实体的偏转量,横截面的长度为 ℓ ,承受的外力为 F ,如图 1.3 所示。

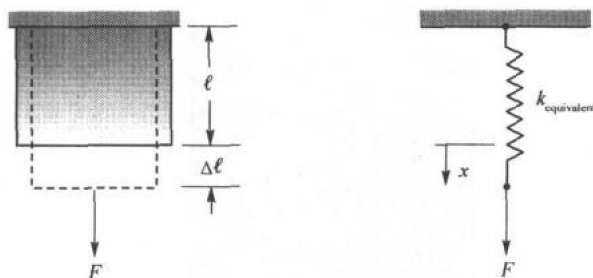


图 1.3 承受外力为 F 的统一横截面的实体

实体的平均应力由以下方程给出:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (1.1)$$

实体的平均应变定义为实体每单位原始长度 ℓ 上,承受的长度变化 $\Delta \ell$:

$$\epsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell} \quad (1.2)$$

在变形区域内,应力和应变与虎克(Hooke)定律相关,根据方程

$$\sigma = E\epsilon \quad (1.3)$$

这里 E 是物体的弹性模量。结合方程(1.1)、(1.2)和(1.3)并简化,我们有:

$$F = \left(\frac{AE}{\ell} \right) \Delta \ell \quad (1.4)$$

注意方程(1.4)和线性弹簧的方程 $F = kx$ 很相似。因此,一个中心点集中受力且横截面相等的实体可以视为一个弹簧,其等价的刚度为:

$$k_{\text{eq}} = \frac{AE}{\ell} \quad (1.5)$$

将注意力转到例 1.1 上来,再次注意到杆的横截面在 y 方向上是变化的。作为第一次近似,可以将杆看做一系列中心点承受负荷的不同断面,如图 1.2 所示。因此,杆可以视为由四个弹簧串接起来的弹簧(单元)组成的模型,每个单元的弹性行为可以由相应的线性弹簧模型描述,有如下的方程:

$$f = k_{\text{eq}}(u_{i+1} - u_i) = \frac{A_{\text{avg}}E}{\ell}(u_{i+1} - u_i) = \frac{(A_{i+1} + A_i)E}{2\ell}(u_{i+1} - u_i) \quad (1.6)$$

这里,等价的弹簧元的刚度由下式给出:

$$k_{\text{eq}} = \frac{(A_{i+1} + A_i)E}{2\ell} \quad (1.7)$$

A_i 和 A_{i+1} 分别是 i 和 $i+1$ 处的节点的横截面面积, ℓ 是单元的长度。运用以上的模型,让我们考虑施加在各个节点上的力。图 1.4 描述了模型中节点 1 到节点 5 的受力情况。

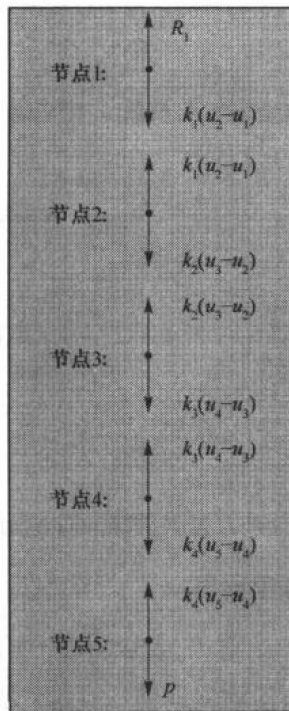


图 1.4 例 1.1 中的节点受力图

静力平衡要求每个节点上的力的总和为零。这一平衡条件产生如下五个方程:

$$\text{节点 1: } R_1 - k_1(u_2 - u_1) = 0$$