全国高等农业院校试用教材

应用数学

北京农业机械化学院主编

农业机械化专业用

农业出版社

全国高等农业院校试用教材

应 用 数 学

北京农业机械化学院主编

农业机械化专业用

全国高等农业院校试用教材

应　用　数　学

北京农业机械化学院主编

农业出版社出版（北京朝内大街130号）

新华书店北京发行所发行　　农业出版社印刷厂印刷

787×1092毫米 16开本　20.75印张　440千字

1979年12月第1版　1979年12月北京第1次印刷

印数 1—12,500册

统一书号 13144·190　　定价 2.15 元

编 者 的 话

在本世纪实现农业现代化、工业现代化、国防现代化和科学技术现代化，农林院校肩负着相应的责任。农业现代化要求农业机械化有一个飞跃的发展，面临这个任务，农业机械化专业传统的数学内容已不适应形势发展的要求。一九七七年全国农林院校农业机械化专业教材会议决定编写«应用数学»，内容包括近似数、线代数、概率论、数理统计及试验方法。

这几章是按下列学时考虑的：

近似数 4 学时；线代数 30 学时；概率论 20 学时；数理统计及试验方法 26 学时，共计 80 学时。

为了适应各院校不同的情况，我们对一些章节予以适当的灵活安排。这些章节打有*号，由各学校自行掌握取舍。

本书末附有有关数学用表，以供学习需要。

本书由北京农业机械化学院余宁旺主编，吉林农业大学孙立城为副主编。参加本书各章编写的同志为：近似数、线代数由金子瑜、孙立城、程新意编写；概率论由樊守义、王迺信、卢一彝编写；数理统计及试验方法由余宁旺、刘襄成、程序、徐仲儒编写。钱明亮也参加了编写工作。

在编写过程中，我们经过多次集体讨论，大家定稿，但由于水平所限，错误在所难免，希读者，尤其是农业机械化专业数学老师，对我们提出宝贵意见。

目　录

第一章　近 似 数

在实际过程中，进行数值计算所用的数据，绝大多数是具有一定准确程度的近似数。在许多场合，要求数据绝对准确是不可能的，也是不必要的。要求过苛的准确度将造成人为的浪费，要求的准确度不够又会造成废品和事故。因此在数值计算中，我们必须了解怎样进行近似数的计算，也就是需要了解影响近似数准确度的原因，研究近似计算的一系列理论和法则，从而使我们既能简化计算，又能获得具有恰当准确度的结果。

关于近似计算的理论及法则当然应该是足够准确的理论和法则，但又不是处处要求绝对严格的理论及法则，只有了解这一点，才能正确领会近似计算的一系列相对准确的理论及法则。

§1　近似数与误差

一、近似数的来源

1．量测误差　在大多数计算公式中，常包含一些参数，如长度、时间、质量等。这些量常常是通过观测、度量而得到的，由于受观测者感观以及仪器、工具精度的限制，其结果不可能获得准确值，而是与准确值保持一个差数的近似数，这种观测结果与准确值之间的差数叫做**量测误差**。经验告诉我们，这种误差是影响近似数准确度的一个重要方面。

2．舍人误差　在计算中，常会遇到如π、$\sqrt{2}$以及只能用无限循环小数表示的有理数如1/3、1/7 等，这时只能用有穷多位小数来近似地代替，有时一个有穷小数也要用位数较少的另一个有穷小数来代替，并且计算的结果也只能保留有穷多位。这种以有穷多位的近似数代替原数而产生的差数叫做**舍人误差**。

3．截断误差　在遇到超越运算时，例如求正弦、求对数等，通常是用收敛无穷级数来表示的。在实际计算时，只能取它的前几项，这等于抛弃了无穷级数的后段，这样形成的计算结果与准确值之间的差数称为截断误差。例如应用级数公式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

求指数函数的值，如果只取含有前四项的近似公式进行计算时，截断误差取为

$$\Delta=\frac{3^{\xi}}{5!}x^5\quad(\xi\text{ 在 }0\text{ 与 }x\text{ 之间})$$

4．描述误差　在用数值计算方法解决具体问题时，首先必须建立这个具体问题的数学

模型，而数学模型总是简化的、近似的。因此根据这些数学模型的公式进行计算所得的结果必然是近似的，由此而产生的误差叫做描述误差。例如应用公式

$$S=\frac{1}{2}gt^2$$

计算空气中自由落体的路程时，把空气阻力略去不计了。因此，这个公式只是近似的。

需要附带说明的是：我们不把由于粗心大意而在量测、抄写数据、计算中产生的错误叫做误差。

从以上分析可以看到，在数值计算中，从原始数据、计算过程到计算结果均存在着误差。我们既要尽量减少误差，又要估计误差，整个近似计算的过程是始终与误差紧紧联系在一起的。

二、绝对误差与相对误差

为了描述近似数的准确程度，我们引入绝对误差与相对误差的概念。

1．绝对误差　设某一量的真值为 A，它的近似值为 a，则 A 与 a 之间的差数

$$A-a$$

就叫做近似值 a 的绝对误差。

但是，在实际上，比如对某一量进行度量时，并不知道它的真值，因此由此而度量得的近似值的绝对误差也是不可能知道的，然而往往可以根据近似值本身的性质及来源估计出这个近似值绝对误差的范围。

定义 1　设 A 的近似数是 a，Δ 是一个尽可能小的正数，如果不等式

$$|A-a|\leqslant\Delta$$

成立，则称 Δ 为近似数 a 的**最大绝对误差**，简称**绝对误差**或**误差**。

对于误差 Δ，我们提出下列两点要求：1. Δ 是尽可能小的正数；2. Δ 最多含有两个非零数字。

例 1　取 2.718 作 e 的近似数，可以估计出它的最大绝对误差为 0.00029，即

$$|e-2.718|<0.00029$$

例 2　使用带毫米刻度的尺测量一个零件的长度 A。读数时，零件终端与哪个毫米刻度线最接近，就按哪个刻度线读数，这样得出的近似值的误差是半个毫米。假设读数为 264 毫米，则有

$$|A-264|\leqslant0.5$$

还有一些数据是通过查表得到的，如三角函数表、对数表等。它们的误差都是最末一位数字所在数位的半个单位，如：

$$\lg 3=0.47712 \qquad \Delta=0.000005$$

$$\sin 18^\circ=0.3090 \qquad \Delta=0.00005$$

必须注意：对于大多数的量来说，数的绝对误差只是一个完全假想的数，并且是不能准确地确定的。如果我们错误地理解为能够求出一个准确的 Δ 值，那就意味着 $A=a\pm\Delta$ 中的 A 也能够准确地求出了，这在大多数情况下是不可能的。

2. 相对误差　如果测量一米长的长度时发生了一厘米的误差，在测量半米长的长度时也发生了一厘米的误差，虽然它们的绝对误差是相同的，但它们的准确度显然是有区别的。前者在一米长度上差了一厘米，即误差占全长的百分之一；后者在半米长度上差了一厘米，即误差占全长的五十分之一。显然前一种测量比较精确一些。可见，要决定一个量的近似值的精确度，除了看绝对误差的大小之外，还必须将此误差与这个量本身的大小加以比较。这种衡量近似数准确度的量叫做**相对误差**。但是由于一个量的真值是未知的，我们所知道的只是这个量的近似值及其最大绝对误差。因此，对于相对误差，我们能得到的也只是近似数的最大相对误差。

定义 2　设近似数 a 的最大绝对误差为 Δ，比值

$$\frac{\Delta}{|a|}$$

称为近似值 a 的**最大相对误差**简称**相对误差**，记以

$$\delta=\frac{\Delta}{|a|}$$

例　取近似值 $\pi\approx3.14$，它的绝对误差 $\Delta=0.0016$。因此它的相对误差为

$$\delta=\frac{0.0016}{3.14}=0.0005$$

有时把相对误差乘 100%，表示成百分数，这时又把它称为**百分误差**。如上例，0.0005 又可用百分误差表示为0.05%。

§2　有效数字与可靠数字

一、有效数字

给出一个近似数时，当然希望能同时指出它的准确度。最直接的一种表示方法是同时写出近似值 a 的误差 Δ，其一般书写形式是

$$A=a\pm\Delta$$

例如，测得一根轴的直径 $D\approx20$ 毫米，误差 $\Delta=0.05$ 毫米，可以把它表示为

$$D=20\pm0.05\text{毫米}$$

表示近似数的另一种常用方法是使用有效数字(或可靠数字)。通常近似数是用有穷小数表示的，为了能从近似数的有穷小数表示形式本身就看出近似数的准确度，我们引入有效数字等概念。

1. 有效数字

定义 1 如果近似数 a 的绝对误差不超过最末位数位上的半个单位时，则从 a 的首位非零数字开始到末位数字止，所有数字都叫做**有效数字**。

例如，对

$$\pi = 3.14159265\cdots\cdots$$

取 3.1416 作为它的近似值时，其中的各位数字都是有效数字，因为此时误差 $\Delta < 0.00005$；若取 3.1415，则其中的"5"就不是有效数字，因为此时误差 $\Delta = 0.000093 > 0.00005$。

在书写近似数时，可以采取从首位非零数字起到末位数字止都是有效数字的表示方法。这样书写便于从近似数的形式立即看出该数的误差。例如，180.65；0.304；0.0035。依次具有5位、3位及2位有效数字，它们的误差应该是 0.005；0.0005 和 0.00005。

需要注意的是：当近似数 0.054 的误差是 0.00005 时，应写成0.0540，以表示它具有三位有效数字；再如取舍近似数 23437，使它成为具有两位有效数字的近似数时，应写成 23×10^3，如果写成 23000，则说明它有 5 位有效数字了。

有时将任何一个用十进制表示的近似数用下面的形式来表示：

$$a = \pm a' \times 10^{m-1} \tag{1-2-1}$$

其中 $1 \leqslant a' < 10$，m 是这个近似数的整数位数*。例如，

$$180.65 = 1.8065 \times 10^2$$

$$0.304 = 3.04 \times 10^{-1}$$

$$0.0035 = 3.5 \times 10^{-3}$$

$$2300 = 2.300 \times 10^3$$

这时，任一近似数，当它的整数位数为 m，并且具有 n 位有效数字时，其误差可一般地表示为

$$\Delta = \frac{1}{2} \times 10^{m-n} \tag{1-2-2}$$

2. 抹尾规则 在表示近似数和计算时，我们经常要抹去过长的尾数而保留适当的部分。比如把 π 抹尾到 3.14；3.142；3.1416 等各数。这种方法就是大家熟知的"四舍五入"法则。这种方法的实质就是使抹尾后的每个近似数都是由有效数字组成的，它们的误差是各个近似数最末数位上的半个单位。这样可以保证抹尾以后引起的误差总是比较小的。现在把这个法则加以改进介绍于下：

要把一个数抹尾凑整到 n 位有效数字，首先从首位非零数字开始保留 n 位数字，把第 n 位右边所有的数字都抹去，抹尾以后，如果被抹去的数小于第 n 位的半个单位，则第 n 位数字不变；如果被抹去的数大于第 n 位的半个单位，则第 n 位数字加 1；如果被抹去的数恰为第 n 位的半个单位，则当第 n 位数字为偶数时保持不变，奇数加 1。

---

* 凡大于或等于 1 的数中，在小数点左方的数字个数，叫做这个数的整数位数；对于小于 1 的数，整数位数为一负值，其绝对值等于其首位非零数字与小数点之间零的个数。如 0.004的整数位数为 -2。

传统的四舍五入办法是：当尾数是1、2、3、4抹去；当尾数是5、6、7、8、9时进一位。在近代应用中由于存在大量的计算，而这种传统的四舍五入法中进一位的可能有五个数，抹去尾数的可能是四个数，这对于在运算中尽量减小误差是不利的。而如果把1、2、3、4舍去；把6、7、8、9进位；对于5有舍有入才比较均衡。我们在5的前面为偶数时舍去5，为奇数时进1使之成为偶数，这对于下一步运算遇到除数为2及偶数时有被除尽的可能，以免再抹尾。

当一个数字按上述规则抹尾凑整后，就具有 n 位有效数字。

例如，下列各数在抹尾后都有四位有效数字

29.63243	成为	29.63
87.9773	成为	87.98
4.499501	成为	4.500
48.365	成为	48.36
17.495	成为	17.50
299796	成为	2998×10^2

3．误差与有效数字的关系 一个用有效数字书写的近似数的绝对误差，很容易确定。如前述的29.63，误差为0.005；4.500，误差为0.0005；2998×10^2，误差为50。绝对误差的一般形式已由(1-2-2)式给出。

近似数的相对误差也与有效数字有着密切的关系。

定理 如果近似数 a 的首位有效数字为 a_1，并且该数有 n 位有效数字，则近似数 a 的相对误差 δ。

i）当 a 除 a_1 外，还至少有一个非零的有效数字时（即 $a=a_1\cdot a_2a_3\cdots10^{m-1}$，$0\leqslant a_2,a_3,\cdots<10$，且 $a_2,a_3,\cdots$ 为不皆为零的正整数）

则
$$\delta<\frac{1}{2a_1}\times10^{-(n-1)} \tag{1-2-3}$$

ii）当 $a=a_1\times10^{m-1}$ 时

则
$$\delta<\frac{1}{a_1}\times10^{-(n-1)} \tag{1-2-3$'$}$$

证明：设具有 n 位有效数字的近似数 a 可表示为
$$a=\pm a'\times10^{m-1}$$
其中 $1\leqslant a'<10$；m——a 的整数位数。

由§2公式(1-2-2)，其绝对误差为
$$\Delta=\frac{1}{2}\times10^{m-n}$$
由相对误差的定义得
$$\delta=\frac{\Delta}{|a|}=\frac{\frac{1}{2}\times10^{m-n}}{a'\times10^{m-1}}=\frac{1}{2a'}\times10^{-(n-1)}$$

i）当$a=\pm a_1\cdot a_2a_3\cdots 10^{m-1}$　（$0\leqslant a_2, a_3, \cdots<10$，且$a_2, a_3, \cdots$为不皆为零的正整数）

则
$$a'>a_1$$
故
$$\delta=\frac{1}{2a'}\times 10^{-(n-1)}$$
$$<\frac{1}{2a_1}\times 10^{-(n-1)}$$

ii）当 $a=\pm a_1\times 10^{m-1}$

则
$$a'=a_1$$
故
$$\delta=\frac{1}{2a'}\times 10^{-(n-1)}$$
$$<\frac{1}{a_1}\times 10^{-(n-1)}$$

这样，由给出的近似数立即可以估计出它的最大相对误差。

例　已知近似数$a=2.18$与$a=2.00$均具有四位有效数字，试确定它们的绝对误差与相对误差。

解　显然两者的绝对误差Δ均为
$$\Delta=0.005$$
而$a=2.18$的相对误差δ为[用公式(1-2-3)]
$$\delta<\frac{1}{2\times 2}\times 10^{-2}=0.25\%$$
而$a=2.00$的相对误差δ为[用公式(1-2-3)′]
$$\delta<\frac{1}{2}\times 10^{-2}=0.5\%$$

从上面所表示的近似值的有效数字与相对误差的关系，不难理解：凡是有效数字相同而整数位数不同的近似数，它们的相对误差是相同的。也就是说，相对误差与有效数字的位数有关，而绝对误差则与小数的位数有关。

二、可靠数字

在实际计算中，除了用有效数字表示近似数以外，还有一种形式是可靠数字，它比有效数字的要求稍弱一些。

定义 2　如果近似值a的绝对误差是它保留的数位上的一个单位，则称a的从首位非零数字起到末位数字止，所有数字都是**可靠数字**。

例如，3.15作为π的近似值就具有三位可靠数字，而可靠数字则不一定是有效数字。

用n位可靠数字表示一个近似数
$$a=a'\times 10^{m-1}$$
其中$1\leqslant a'<10$，m——整数位数。其绝对误差为

$$\Delta = 10^{m-n} \tag{1-2-4}$$

相对误差为

$$\delta < \frac{1}{a_1} \times 10^{-(n-1)*} \tag{1-2-5}$$

此处a_1是近似数的首位非零数字。

§ 3 近似数的运算

一、误差的一般公式

为了能恰当地估计由若干个近似数通过某些运算后所得结果的误差，我们不妨把这些近似数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 看作 n 个自变量；把计算结果N看作 $x_1, x_2, \cdots$ 的多元函数；把这些近似数的误差看作自变量的增量。这时，计算结果的误差就可以通过函数的相应增量来反映。为此，设有一多元函数

$$N = f(x_1, x_2, \cdots x_n)$$

当自变量取得增量 $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots \Delta x_n$ 时，函数相应的增量为

$$\Delta N = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \cdots x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \cdots x_n)$$

这里，由于$\Delta x_i (i = 1, 2, \cdots n)$都很小，所以函数的增量可以用全微分来近似地代替，即

$$\Delta N \approx dN = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n$$

但是，上式右边各项可正可负，为了保证估计的误差为最大绝对误差，就不得不从最不利处着想，也就是把结果的误差看成是各项误差绝对值的积累，即

$$\Delta N \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| |\Delta x_1| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| |\Delta x_2| + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| |\Delta x_n|$$

如果采用习惯的记号，用 Δ 表示结果的绝对误差，用 Δ_1，Δ_2，Δ_3，$\cdots \Delta_n$ 表示各近似数的绝对误差，最后得**误差的一般公式**

$$\Delta = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \Delta_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \Delta_2 + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| \Delta_n \tag{1-3-1}$$

相对误差为

$$\delta = \frac{\Delta}{|N|} = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \frac{\Delta}{|N|} + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \frac{\Delta}{|N|} + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| \frac{\Delta}{|N|} \tag{1-3-2}$$

二、近似数的四则运算

1. 加法 关于几个近似数之和的误差，可以由误差的一般公式(1-3-1)推出如下定理。

定理 1 n 个近似数之和的误差等于各近似数误差之和。

---

* 这个公式未加考虑特殊情况 $a = a_1 \times 10^{m-1}$，读者可仿公式(1-2-3)与(1-2-3)′，对两种情况加以考虑。

证 设有 n 个近似数 x_1, x_2, $\cdots x_n$，其误差依次为 Δ_1, Δ_2, $\cdots\Delta_n$，这时

$$N=f(x_1,\ x_2,\ \cdots x_n)=x_1+x_2+\cdots x_n$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|=\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|=\left|\frac{\partial f}{\partial x_3}\right|=\cdots=\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|=1$$

由(1-3-1)式得

$$\Delta=\Delta_1+\Delta_2+\cdots+\Delta_n$$

定理 1 得证。

例 1 求两个近似值 $a=210\pm5$，$b=53\pm2$ 的和。

解 近似值的和：$210+53=263$

误差之和：$5+2=7$

其结果为 263 ± 7。

例 2 已知近似数 124.3；15.7；49.3 都具有从首位至末一位的有效数字，求它们的和。

解 首先求和

$$124.3+15.7+49.4=189.3$$

其误差为

$$\Delta=3\times0.05=0.15$$

这样可以确定和数中的 1 、8 、9 都是有效数字，小数点后面的 3 是不可靠的，取舍后得和数为 189。

用定理 1 所规定的法则确定近似数的误差当然是足够准确的，但是运用这个法则于多个近似数的和时，由于误差的单纯积累，有效数字将大量丧失。而实际上，各个近似数的误差有正有负，相加时会互相抵消一部分，而不是单纯按绝对值相加的。因此，实际的误差代数和，总比按定理 1 估计的要小。下例将具体说明这一问题。

例 3 已知$\frac{1}{3}$；$\frac{1}{7}$；$\frac{1}{11}$；$\frac{1}{13}$；$\frac{1}{15}$；$\frac{1}{17}$的近似值分别为 0.333；0.143；0.091；0.067；0.059，求它们的和。

解 和

$$S=0.333+0.143+0.091+0.067+0.059=0.770$$

其误差

$$\Delta=6\times0.0005=0.003$$

这样，其结果只有两位有效数字，即0.77，后面的 0 是不可靠的。但是实际上

$$S=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}=\frac{196422}{255255}=0.76951\cdots$$

由此可以看出，0.770 的实际误差小于 0.0005。所以，按照定理 1 应认为不可靠的末位数 0 实际上是一位有效数字。

实践证明，在绝大多数场合，和的误差将和原始近似数的误差中最大者相同或接近。

例 4 求近似数 54.70；86.350；32.4351；1.24362 的和。

解 我们把加法列成竖式

$$\begin{array}{r} 54.70???\\ 86.350??\\ 32.4351?\\ +)\quad 1.24362\\ \hline 174.72\mathbf{872} \end{array}$$

从上列算式可以看出，在结果中，小数点后第三位的 8 已经不可靠了，它将有五位有效数字，这和前面所述的结论：和的误差与近似数中误差最大者相近，是一致的。经舍入后，我们取和数为174.73。

从计算过程还可以看出，小数点以后的第四位、第五位算出来是多余的。若按下列竖式计算可以简捷一些。

$$\begin{array}{r} 54.70?\\ 86.350\\ 32.435\\ +)\quad 1.244\\ \hline 174.729 \end{array}$$

经舍入后可以得到和前面准确度相当的结果 174.73。

根据上面的讨论，归纳出近似数加法法则如下：

法则 1 末位有效数字的数位相同的近似数相加时，和数的末位仍保留到与近似数最末位数有相同单位的数位上。

法则 2 末位有效数字的数位不相同的近似数相加时，先使误差较小的数比误差最大的数多保留一位，然后相加。和数的末位取到与误差最大的数的末位所在的数位。

例 5 求近似数 561.32；491.6；86.954；3.9462 的和。

解

$$\begin{array}{r|l} 561.3 & 2\\ 491.6 & ?\\ 86.9 & 5\\ +)\quad 3.9 & 5\\ \hline 1143.8 & \uparrow\text{————备用位} \end{array}$$

所以
$$561.32+491.6+86.954+3.9462\approx 1143.8$$

2．减法 从一个近似数减去一个比它小得多的近似数时，上述关于加法的法则对减法同样适用。由误差的一般公式可推得如下定理。

定理 2 两近似数之差的误差等于各近似数误差之和。

证 设有两近似数 x_1, x_2，其误差分别为 Δ_1，Δ_2。两者之差可表示为

$$N=f(x_1, x_2)=x_1-x_2$$

由误差的一般公式 $\Delta=\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right|\Delta_1+\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right|\Delta_2$

其中